

塑性理論及び統計理論より見た構造物の 安全性に関する一考察

正員 小 西 一 郎*
准員 篠 塚 正 宣**

要 旨 構造物の安全性に関する基礎的な研究の一つとして、ハリが確率密度函数 $f(W)$ に従う単一転動荷重 W をうける場合の安全性を、破壊の確率を導入して評価する方法を提案した。この際、極限設計法の概念を用いて、ハリが破壊する様式には、崩壊によるものとハリの角度変化の累積によるものがあることを明らかにし、そのいずれかの破壊が生ずる確率を理論的に求める方法を示した。

1. 緒 言

塑性理論の発達は、これまであまり明らかでなかつた構造物の極限強度を次第に明確にしつつある。さきに、M.R. Horne¹⁾ は風荷重を受ける固定バリについて、その安全性を考察しているが、理論的に不満な点が多い。本研究では、構造物の安全性に関する基礎的な研究の一つとして、Horne の方法とは全く異つた方法で、極限設計法を考慮して、ハリが確率密度函数 $f(W)$ に従う単一転動荷重 W の繰返し作用を受ける場合の安全性を、破壊の確率を導入して評価する方法を提案した。現在のところ、一定の転動荷重が通過する場合のハリの極限設計については種々論ぜられているが、土木構造物を考える場合には、上述のように大きさの変動する荷重を受ける場合を考えることが必要だと思ふ。

2. 基礎式の誘導

図-1 のような一端固定、他端移動支点のハリを考える。荷重 W が点 A から距離 x にあるときの断面 A 及び x の活荷重による曲げモーメントは弾性理論によれば

$$\left. \begin{aligned} M_{Al} &= WE_A(x) = -\frac{Wx(l-x)(2l-x)}{2l^2} \\ M_{xl} &= WE_x(x) = \frac{Wx^2(l-x)(3l-x)}{2l^3} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

となる。 M_{Al} は $x=0.4227l$ で最小値 $-0.1925Wl$ をとり、 M_{xl} は $x=0.6340l$ で最大値 $0.1740Wl$ をとる。

次に死荷重について考える。断面一定とし、単位長さ当りの重量を w とすると、断面 A 及び x の死荷重による曲げモーメントは、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} M_{Ad} &= -0.1250wl^2 \\ M_{xd} &= -0.1250w(4x^2 - 5lx + l^2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

である。 M_{xd} は $x=0.6250l$ で最大値 $0.0703wl^2$ をとる。

ここで、ハリの曲げモーメント M と曲率 κ との関係は図-2 のようであるとする。また、このハリで降伏関節となるのは点 A 及び $x=c$ の点 C であるとする。点 A において角度変化 $-\theta_A$ が生じたときの断面 A 及び x の曲げモーメント M'_A 及び M'_x はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M'_A &= \frac{3}{2}A = \frac{3}{2} \frac{2EI}{l} \theta_A \\ M'_x &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) A = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{2EI}{l} \theta_A \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

点 C において角度変化 θ_C が生じたときの断面 A 及び x の曲げモーメント M''_A 及び M''_x は、それぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M''_A &= -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{c}{l}\right) C = -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{c}{l}\right) \frac{2EI}{l} \theta_C \\ M''_x &= -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{c}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) C = -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{c}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{2EI}{l} \theta_C \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

* 工学博士，京都大学教授，工学部土木工学教室兼工学研究所

**京都大学大学院博士課程学生

図-1

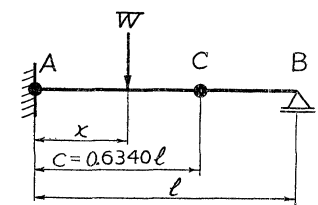
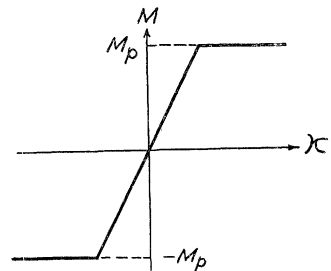


図-2



したがって、すべての場合を考慮すると、断面 A および x の曲げモーメント M_A 及び M_x は (1)~(4) の和で示される。ここで、このハリの降伏関節となる点を、支点 A 及び活荷重による曲げモーメントが最大となる $c=0.6340l$ の点 C であると仮定し、 M_x は点 C の近傍の値のみを示すことにすれば式 (3), (4) において、 $x=c=0.6340l$ とおくことができ、 M_A, M_x に関する次の基礎式を得る。

$$\left. \begin{aligned} M_A &= WE_A(x) + \frac{3}{2}A - 0.3660 \frac{3}{2}C - 0.1250 wl^2 \\ M_x &= WE_x(x) + 0.3660 \frac{3}{2}A - (0.3660)^2 \frac{3}{2}C + 0.0703 wl^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ただし、上式では簡単のため、 M_{xd} も $x=0.6340l$ で最大値をとるものと仮定している。

3. 一定荷重が支点 A から支点 B の方へ繰返し通過する場合

a) 崩壊荷重 崩壊荷重 W^* は次のようなものである。すなわち、 W によつて点 A がまず降伏し、点 A における角度変化は次第に大きくなるが、 W が $x=0.4227l$ に達すると、この角度変化は停止される。そして、ちょうどその時、 $x=0.4227l$ の断面も降伏を起すような荷重 W が崩壊荷重 W^* である。このような考えから W^* を計算すると式 (6) のようになる。

$$W^* = 4.0979 \frac{M_p - 0.0500 wl^2}{l} + 2.3669 \frac{M_p - 0.1250 wl^2}{l} \quad (6)$$

したがって、 W^* の計算には、点 A 及び点 C のみが降伏関節となるという仮定は用いられていない。なお式 (6) は活荷重による残留曲げモーメントが存在していても成立する。

b) 点 A のみが降伏する場合 点 A が降伏する最小の荷重 W_{Amin} は式 (7) で与えられる。

$$W_{Amin} = \frac{5.1962(M_{pA} + M_{ARl})}{l} \quad (7)$$

ここに、 M_{ARl} は最初、点 A に生じていた活荷重による残留曲げモーメントである。

次に、点 A のみが降伏する最大の荷重 W_{Amax} は、

$$M_A = -M_p = -0.1925 W_{Amax}l + \frac{3}{2}A - 0.1250 wl^2$$

$$\therefore \frac{3}{2}A = 0.1925 W_{Amax}l - M_p + 0.1250 wl^2$$

$$M_C = M_p = 0.1740 W_{Amax}l + 0.3660 \frac{3}{2}A + 0.0703 wl^2$$

$$= 0.2445 W_{Amax}l - 0.3660 M_{pA} + 0.0703 wl^2$$

より
$$W_{Amax} = 4.0900 \frac{M_{pC} + 0.3660 M_{pA}}{l} \quad (8)$$

ただし、 $M_{pA} = M_p - 0.1250 wl^2$ 、 $M_{pC} = M_p - 0.0703 wl^2$ である。

一般に活荷重による残留曲げモーメントが存在していても、近似的に式 (8) が得られる。 W_{Amax} は、通常、通増塑性変形限度とよばれる。

さて、 W_{Amax} より小さく、 W_{Amin} より大きい荷重では点 A のみに降伏関節を生じ、第一回の荷重通過以後はすべて弾性的となる。このときの角度変化は、

$$\frac{3}{2}A = 0.1925 Wl - M_{pA} - M_{ARl} \quad (9)$$

より求められ、一定値をとる。

c) 点 A 及び点 C が降伏する場合 W が W_{Amax} より大きければ、点 A 及び点 C が降伏関節となる。第 $n-1$ 回までの荷重通過によつて、生じた活荷重による点 A 及び点 C の残留曲げモーメントを、それぞれ M_{ARn-1l} 、 M_{CRn-1l} 第 n 回目の荷重通過による点 A 及び点 C の角度変化を表わす量を A_n 及び C_n とすると第 n 回目の荷重通過に際しては、

$$M_A = -M_p = -0.1925 Wl + \frac{3}{2}A_n + M_{ARn-1l} - 0.1250 wl^2$$

$$\therefore \frac{3}{2}A_n = 0.1925 Wl - M_{pA} + M_{ARn-1l} \quad (10)$$

$$M_C = M_p = 0.1740 Wl + 0.3660 \frac{3}{2}A_n - (0.3660)^2 \frac{3}{2}C_n + M_{CRn-1l} + 0.0703 wl^2$$

$$\therefore (0.3660)^2 \frac{3}{2} C_n = 0.1740 Wl - M_{pC} + 0.3660 \frac{3}{2} A + M_{CR_{n-1}l} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore M_{AR_{n}l} &= 2.7322 M_{pC} - 0.4754 Wl \\ M_{CR_{n}l} &= M_{pC} - 0.1740 Wl \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

すなわち、式 (12) から明らかなように、 W が一定で W_{Amax} より大きい場合は、点 A 及び点 C の残留曲げモーメントは一定となるが、角度変化は毎回、式 (10), (11) で示される量だけ増加することに注意しなければならない。

4. 変動荷重が支点 A から支点 B の方へ繰返し通過する場合

転動荷重 W が各回ごとに大きさを变化する場合、すなわち、 W が確率密度函数 $f(W)$ に従う場合を考え、第 n 回目の荷重を W_n と表わすことにすると、第 n 回の荷重の通過に際して、式 (13) で示される角度変化が生ずる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2} A_n &= 0.1925 W_n l - M_{pA} - M_{AR_{n-1}l} \\ (0.3660)^2 \frac{3}{2} C_n &= 0.2445 W_n l - (M_{pC} + 0.3660 M_{pA}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ただし、式 (13) は右辺が正となるような荷重に対してのみ意味をもつ。もし右辺の計算値が負になるときは、角度変化は実際に生じていないことになる。

活荷重による残留曲げモーメントは、点 A のみが降伏関節となつた場合は、

$$M_{AR_{n}l} = 0.1925 W_n l - M_{pA} \quad (14)$$

点 A 及び点 C が降伏関節となつた場合は、

$$M_{AR_{n}l} = 2.7322 M_{pC} - 0.4754 W_n l \quad (15)$$

となる。

点 C における活荷重による残留曲げモーメントは、

$$M_{CR_{n}l} = 0.3660 M_{AR_{n}l} \quad (16)$$

で与えられる。

さて、式 (13) にもどつて、 n 回の荷重通過による点 A 及び点 C の角度変化を示す量の累計 S_{An} および S_{Cn} について考える。

まず、 S_{Cn} について考えると、

$$S_{Cn} = \sum_{i=1}^n \frac{3}{2} C_i = 74.6269 \sum_{i=1}^n \{0.2445 W_i l - (M_{pC} + 0.3660 M_{pA})\} \quad (17)$$

$$\text{ただし、} \quad W_i > 4.0900 \frac{M_{pC} + 0.3660 M_{pA}}{l}$$

の場合のみを集める。

次に、 S_{An} について考えると、

$$S_{An} = \sum_{i=1}^n \frac{3}{2} A_i = \sum_{i=1}^n \{0.1925 W_i l - (M_{pA} + M_{AR_{i-1}l})\} \quad (18)$$

$$\text{ただし、} \quad W_i > 5.1962 \frac{M_{pA} + M_{AR_{i-1}l}}{l}$$

の場合のみを集める。

ところが、式 (18) の右辺の $M_{AR_{i-1}l}$ は一定値でなく、 W の履歴に関係する量であり、これを正しく評価することはむずかしいので、ここでは、式 (14), (15) を用い、これの $f(W)$ に関する平均値 \bar{M}_{ARi} をもつて代表させることにする。すなわち、

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ARi} &= \left\{ \int_{W_{Amin}}^{W_{Amax}} (0.1925 Wl - M_{pA}) f(W) dW \right. \\ &\quad \left. + \int_{W_{Amax}}^{W^*} (2.7322 M_{pC} - 0.4754 Wl) f(W) dW \right\} / \int_{W_{Amin}}^{W^*} f(W) dW \end{aligned} \quad (19)$$

したがつて、式 (18) の代りに、

$$S_{An} = \sum_{i=1}^n \{0.1925 W_i l - (M_{pA} + \bar{M}_{ARi})\} \quad (20)$$

となる。ただし、

$$W_i > 5.1962 \frac{M_{pA} + \bar{M}_{ARl}}{l}$$

の場合のみを加える。

5. S_{An} 及び S_{Cn} の分布

S_{An} 及び S_{Cn} に関して、それぞれ次の一次変換を考える。

$$\left. \begin{aligned} K_i &= 0.1925 W_i l - (M_{pA} + \bar{M}_{ARl}) \\ K_i &= 74.6269 \{0.2445 W_i l - (M_{pC} + 0.3660 M_{pA})\} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

この変換によつて、 K の確率密度函数 $g(K)$ 及び分布函数 $F_0(K)$ は $f(W)$ より求められる。

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} g(K) &= f(W) \frac{dW}{dK} \\ F_0(K) &= \int_{-\infty}^K g(K) dK \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

以下、取扱いが全く同じであるので、 S_{An} および S_{Cn} をともに S_n で表わすと、

$$S_n = \sum_{i=1}^n U(K_i) K_i \quad (23)$$

となる。ここに、 $U(K_i)$ は unit step function を表わす。

すなわち、 S_n は式 (24) で示される分布函数から抽出された n 個の独立変量の和となる。

$$F(K) = U(K) F_0(K) \quad (24)$$

式 (24) より

$$dF(K) = \{\delta(K) F_0(K) + U(K) g(K)\} dK \quad (25)$$

ここに、 $\delta(K)$ は Dirac の δ -function である。

したがつて、この分布の特性函数 $Q_0(it)$ は

$$\begin{aligned} Q_0(it) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itK} \{\delta(K) F_0(K) + U(K) g(K)\} dK \\ &= F_0(0) + \int_0^{\infty} e^{itK} g(K) dK = p + \int_0^{\infty} e^{itK} g(K) dK \end{aligned} \quad (26)$$

ただし、図-3 のように $p = F_0(0) = \int_{-\infty}^0 g(K) dK$, $q = \int_0^{\infty} g(K) dK$

としてある。

したがつて、 S_n の分布函数に対する特性函数 $Q(it)$ は

$$\begin{aligned} Q(it) &= [Q_0(it)]^n = \left\{ p + \int_0^{\infty} e^{itK} g(K) dK \right\}^n \\ &= \sum_{r=0}^n {}_n C_r p^{n-r} \left\{ \int_0^{\infty} e^{itK} g(K) dK \right\}^r \end{aligned} \quad (27)$$

となる。

一般に $\int_0^{\infty} e^{itK} g(K) dK$ は容易には求められない。

そこで、次のように考えて、近似的に見当をつける。すなわち、 $K > 0$ の部分の確率密度函数 $g(K)$ を qke^{-kK} で近似させる。 $K=0$ に対する超過の確率 q はきわめて小さいので、このような仮定も一応は許されると思われる。そうすると、式 (27) から容易に式 (28) を導くことができる。

$$Q(it) = \sum_{r=0}^n {}_n C_r p^{n-r} q^r \frac{1}{(1-it/k)^r} \quad (28)$$

したがつて、式 (28) の逆変換から S_n の分布函数を求めることができるわけであるが、この逆変換は線型であるので、 $r=r$ の場合の逆変換を求めて、これを r について集めればよい。ところで、 $1/(1-it/k)^r$ に対する分布函数は Γ 分布となり、その確率エレメントは、これに対する確率変量を $S_{r'}$ とすれば

$$h(S_{r'}) dS_{r'} = \frac{1}{\Gamma(r)} e^{-kS_{r'}} (kS_{r'})^{r-1} d(kS_{r'}) \quad (29)$$

で示される。

ここで、ハリは角度変化がある大きさ θ_f になつたときに破断すると仮定する。 θ_f は実験によつて定められるべき値である。したがつて、 $M = 2EI\theta_f/l$ とすれば、この分布の M に対する超過の確率、すなわち、破壊の確率は式 (30) で与えられる。

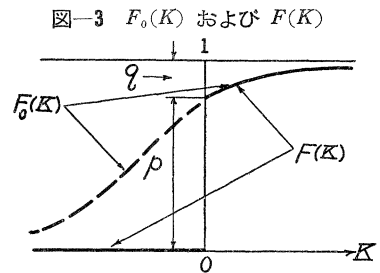


図-3 $F_0(K)$ および $F(K)$

$$P_r = \int_M^\infty h(S_r') dS_r' \quad (30)$$

しかし、 r が適当に大きければ、式 (29) で示される分布は正規分布とと考えてよい。すなわち、式 (29) の S_r' は平均値 $r\bar{K}$ 、標準偏差 $r\sigma_K$ なる正規分布に従うと考えると、 M に対する超過の確率 P_r を求めてよい。ここで、 \bar{K}, σ_K はそれぞれ次式で示される。

$$\bar{K} = \frac{1}{q} \int_0^\infty K g(K) dK, \quad \sigma_K = \frac{1}{q} \int_0^\infty (K - \bar{K})^2 g(K) dK \quad (31)$$

すなわち、近似的に導かれた式 (29) から漸近される正規分布を用いるのではなく、 $g(K)$ を用いて、そのパラメータを定めるわけである。

すべての r を考慮して S_n が M を越える確率 P は

$$P = \sum_{r=0}^n {}_n C_r p^{n-r} q^r P_r \quad (32)$$

で表わされる。

このことは、 n 個の K のうち、 r 個が正であるという確率 ${}_n C_r p^{n-r} q^r$ と、正である r 個の K の和が M を越える確率 P_r の積を r について集めたものが P であると考えた結果と一致している。

なお、 ${}_n C_r p^{n-r} q^r$ の計算は nq が大きければ、 r が nq に近いところでは、 r は平均値 nq 、標準偏差 \sqrt{npq} の正規分布であると考えて、近似計算を行うことができる。この近似計算においては、 r が nq に比して小さい場合には、 $r\bar{K}, \sqrt{r}\sigma_K$ が小さく、 M に対する超過の確率は小さく問題にならなくなり、 r が nq に比して大きい場合には ${}_n C_r p^{n-r} q^r$ がきわめて小さくなる。したがって、 P の計算には、 $r=nq$ の近傍において行われた計算で十分であることになる。

なお、先程も述べたが、 M は実験によつて定めねばならないものであるが、実験値がかなりばらつくことが予想される。その時は、 P_r は、単に、 S_n の M に対する超過の確率として論ずることはできないで、 M の分布を考慮しなければならない。

6. 破壊の確率

以上で考察したような、角度変化の累積による破壊のほか、荷重が崩壊荷重を越すことによる破壊がある。 $f(W)$ において、 W^* に対する超過の確率 p' が求められると、 n 回の荷重の通過で崩壊する確率は p' が十分小さいときには np' で示される。

さらにこのほかに、このように繰返し荷重が通過するような場合には、より小さいが、より頻繁に生ずる曲げモーメントによる曲げ疲労についての考察がなされねばならない。むしろ、それの方が決定的である場合もあろう。しかし、こゝでは疲労に関しては考慮しないで置き、その必要性を述べておくに止める。

さて、上述の2つの破壊様式があるから、このハリがいずれかの様式で破壊する確率 P_f は、 P, P' が小さいときは、

$$P_f = P + P' \quad (33)$$

で与えられることになる。

7. 結 言

以上述べたことを要約すると次のようである。

1) 図-1 のようなハリに $f(W)$ なる確率密度函数によつて規定された荷重が支点 A から支点 B の方へ繰返し作用する場合、極限設計法の概念によりハリの破壊について考察を加えた。

2) ハリの破壊には2つの様式があり、一つは崩壊、他は角度変化の累積がある量に達して破壊する場合である。

3) ハリの破壊の確率 P_f は近似的に n 回の荷重通過によつて崩壊する確率 P' と角度変化の累積によつて破壊する確率 P との和と考えられる。そしてその大きさによつて、安全性を判定することができる。

荷重が支点 B から支点 A の方へ通過する場合も同様の考察がなされ得る。また、ここで 図-1 のようなハリを用いて説明したのは、降伏関節が少なくて説明、計算に便利だからであつて、固定バリ、連続バリについても同様の考察がなされ得る。これらについては、更に考察を行うつもりである。

参 考 文 献

- 1) M.R. Horne : "The Effect of Variable Repeated Loads in Building Structures Designed by the Plastic Theory", Proc. IABSE., Vol. 14, (1954) p.p. 53~74 (昭. 30. 9. 21)