

曲げモーメントと軸圧縮力を受ける部材の安定

正員 奥村 敏 恵*

1. はしがき

各種構造分野に溶接構造が使用されるようになった。これらの溶接構造の多くは板材を広範囲に使用し、これらを使用条件に応ずるよう、適当に組合わせて一つの部材に溶接しているが、リベット構造とちがいつづり合わせの材片を用いていない。この結果できるだけむだのない軽い構造物ができようとしている。

一般にこれらの構造物は単純な材料力学の計算方法にしたがつて、外力に応じて生ずる部材応力を計算し、使用材料の許容応力内におさまるように設計している。しかし各種の計算上の仮定を満足してはじめて、その信頼度が高いわけであるが、実際の状態はかなり複雑であつて、これらの条件をみとることが困難な場合が多い。特に溶接構造においてはこの影響がいちぢるしい。このため従来は高い安全率をとるとか、できるだけ単純な形にして、これらの影響を少くするように努力している。しかし局部的な不ツライのため、高い安全率で必ずしも安全と言えない面が多い。このためできる限り溶接構造の特徴を理論実験の両面より明確につかみとることが大切である。これに関連した問題をあげると次のようなものとなる。

(1) いわゆる寸法効果となづけられるものである。溶接構造は残留応力¹⁾が存在し、局部的な応力集中または多軸応力状態をさけることができない。しかもこれらの影響は小さい試験片では強調されずにすむため危険側の評価をする恐れがある。このため 近來特にできるだけ実物大に近い大型試験による判定が要求されている。事実 2,3 の報告は複雑な板構造では静的でもその強度は計算値の 8 割位の低下を示している。なお疲労強度の判定に対しても当然考えねばならないことであり、その解決は今後に残されている。

(2) 上述の中に広い意味で含まれるが、溶接構造の断面形状に起因する部材断面内の応力分布の不均一の問題である。またいわゆる shear lag と称せられるセン断力の不均一分布の影響である²⁾。この場合には普通の基本的な構造理論は厳密には適用できない。なお応力分布に対する初期変形の影響程度も吟味する必要がある。

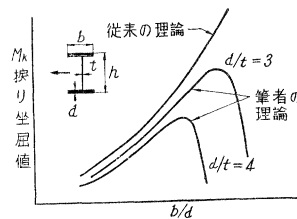
(3) ここで特に取り扱う問題であり、(2)と同じ断面形状の影響に関する問題である。たゞ(2)は従来の初等材料力学と同じく変位前より変位後の状態を眺めているのに対し、ここでは変位後より変位後の状態を眺めようとする点が異なる。これは従来のハリの力学では断面重心に断面積が集中したものと考えて理論をたてているが、実断面では必ずしも 2 軸対称ではない。またたとえ設計では対称であつても実際につくられた部材断面では断面重心とセン断中心とは完全に一致するとはいえない。この影響を十分考慮せねばならない。

(4) また従来の理論では変位後も断面形状は不変と考えているが、溶接構造のように比較的薄い板厚で初期タワミのあるものでは、もつとも不利な断面形状の変形をおこす状態を想定し、その影響を吟味する必要がある。例えば対称 I 断面の振り座屈値は従来の理論ではフランジ板と腹板の剛性のツライに無関係に、フランジ板の振り剛性を大にすると無制限に大となる結果を示している。腹板の剛性が低ければフランジ板の振り剛性の完全発揮を期待することができないことは、腹板断面が 0 に近づく極限を考えれば明らかである。これらの影響を考慮すると、すでに発表したように⁴⁾図-1 のようになる。結局断面各部の相互に最もツライのとれ、しかももつとも有効に強度を期待できる条件を確立せねばならない。

図-1 腹板の変形による振り座屈値の低下

(5) 薄肉断面の座屈を厳密にとり扱い、全体座屈と局部座屈のツライを考えねばならない。部材全体の細長比を小にし塑性座屈領域で設計することは見掛け上の安全度は高いが、局部座屈に同じ安全度を与えなければその強度を完全に期待することができない。したがつて、この点より断面各部の板厚を定めなければ、経済断面を選ぶことができない。スチフナを有効に利用することも経済設計の要点となる。この点よりスチフナの配置と剛度と座屈強度の関係を明確にする必要がある。

(6) 部材の振動減衰の問題を明らかにする必要がある。



$$M_k = \frac{\pi}{l} \sqrt{BC \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{l^2} \frac{Dh^2}{2C} - \frac{\pi^2}{l^2} \frac{C_{F1}C_{web}h}{6B_{web}C} + \frac{\pi^4}{l^4} \frac{C_{F1}Dh^3}{12B_{web}C} \right\}}$$

従来理論 補正項

l: 長さ B: 曲げ剛性 C: 振り剛性 B_{web}: 腹板のみの曲げ剛性 D: 曲げ振り剛性 (6.1) の bt に相当 C_{F1}: フランジ板のみの振り剛性 C_{web}: 腹板のみの振り剛性 1

* 工学博士，東大助教授，工学部土木教室

2. セン断中心および曲げ振りの算定

Wagner⁹⁾が指摘して以来薄肉開断面の振りには振り中心に関する付加的な振りモーメントが発生することが確められ、これに対する考慮を払うことが大切な条件となつた。なお振り中心は板厚がその他の寸法に比しきわめて小の場合はセン断中心とほとんど一致すると考えて差しつかえない⁹⁾。一般の断面形ではセン断力によつて生ずる断面内のセン断応力の合力は通常断面の重心をとおらない。したがつて振り変形をともなわないで純粋な曲げモーメントを与えるためにはセン断力の作用線は断面に分布するセン断応力の合力の作用線と一致せねばならない。このような断面に分布するセン断応力の合力の作用点をセン断中心と名づけている。この仮定にしたがつて、一般の開断面のセン断中心を求めてみよう。

いま図-2 に示すような任意の断面形状のハりにベクトル表示した M_x, M_y が作用すると考える。その正負は右手ねじの法則にしたがうものと考え、 x, y は一般に主軸でないとする。従来の単純なハリの理論より M_x または M_y によつて生ずる z 方向応力 σ_z はそれぞれ次式で表わされる。

図-2 右手ねじ座標
(時計まわり正)

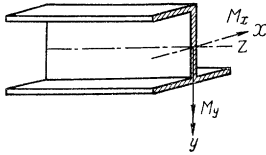
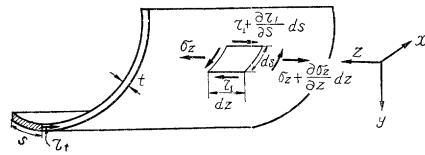


図-3



$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} (I_{xz} y - I_{xx} x) \dots\dots\dots (2.1)$$

$$\sigma_z = \frac{M_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} (I_{yy} y - I_{xy} x) \dots\dots\dots (2.2)$$

ただし I_x, I_y, I_{xy} は断面二次モーメントで、 $I_x = \int_A y^2 dA, I_y = \int_A x^2 dA, I_{xy} = \int_A xy dA$ で計算される。

図-3 に示すような状態(断面中心線に関する座標 s , 原点自由端)を考えると、一要素のツリアイより

$$\partial(\tau_t t) / \partial s = -t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \dots\dots\dots (2.2)$$

いま $\partial M_y / \partial z = Q_y, s=0$ (自由端) で $\tau_t=0$, を考慮すると、

$$\tau_t t = -\frac{Q_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} \left(I_y \int_0^s y t ds - I_{xy} \int_0^s x t ds \right) \dots\dots\dots (2.3)$$

したがつてセン断中心の重心に関する座標を (x_0, y_0) とすると、前述の定義より、

$$x_0 = \frac{1}{Q_y} \int_0^m \tau_t t r' ds = \frac{1}{I_x I_y - I_{xy}^2} \left[-I_y \int_0^m r' ds \int_0^s y t ds + I_{xy} \int_0^m r' ds \int_0^s x t ds \right] \dots\dots (2.4)$$

同様に

$$y_0 = \frac{1}{I_x I_y - I_{xy}^2} \left[I_x \int_0^m r' ds \int_0^s x t ds - I_{xy} \int_0^m r' ds \int_0^s y t ds \right] \dots\dots\dots (2.5)$$

ここに m は断面中心線の全長を示し、 r' は重心より断面の中心線上の任意の点の切線に下した距離を示す。 $r' ds (ds > 0)$ が重心に関し正のモーメントを与えるとき $r' > 0$ とする。従つて s の座標のとり方に関係してその正負が与えられる。なお x, y が主軸のときは、Wagner と一致し

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{I_x} \int_0^m \omega_s y t ds \\ y_0 &= \frac{1}{I_y} \int_0^m \omega_s x t ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.6)$$

ただし、 $\int_0^s r' ds = \omega_s$

なお閉断面のときは自由端をもたない。この場合には断面中心線上任意の点に原点を設ける。この解はすでに指摘されているように⁹⁾,

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{I_x} \oint r' ds \left[\int_0^s y t ds - \frac{\oint \frac{ds}{t} \int_0^s y t ds}{\oint \frac{ds}{t}} \right] \\ y_0 &= \frac{1}{I_y} \oint r' ds \left[\int_0^s x t ds - \frac{\oint \frac{ds}{t} \int_0^s x t ds}{\oint \frac{ds}{t}} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.7)$$

\oint は全周積分を意味する。

さてセン断力が重心をとる場合には単純な曲げモーメントのほか、セン断中心のまわりの捩り変形を生ずる。

この場合について考えてみよう。

断面中心線上の任意の点の s 方向の変位を v_t , z 方向の変位を w とする。 w はいわゆる反り (warping) と名づけられる値である。捩り変形後も断面中心線と母線が互に直角を保つもの (形がくずれないもの) と仮定すると、

$$\frac{\partial v_t}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \dots \dots \dots (2.8)$$

単位の反りを w_t , 断面の捩り角を φ であらわすと、

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} w_t \dots \dots \dots (2.9)$$

w_t は断面座標のみの函数である。なおセン断中心のまわりに捩れにより φ だけ回転したと考え、セン断中心より断面中心線の任意の点の切線に下した垂線の長さを r で示すと、 $v_t = r\varphi$ となる。(2.8), (2.9) より、

$$w_t = w_0 - \int_0^s r ds \dots \dots \dots (2.10)$$

w_0 は積分常数を示す。このような w は z 方向に $\partial w / \partial z$ なる付加的な直応力を発生する。しかし外力は存在しないため、これらの直応力の一断面内の総和は 0 とならねばならない。この関係を用いると、

$$w_0 = \frac{1}{m} \int_0^m ds \int_0^s r ds \dots \dots \dots (2.11)$$

この変位 w による z 方向の応力 σ_z は、

$$\sigma_z = E \partial w / \partial z = E \partial^2 \varphi / \partial z^2 \left(w_0 - \int_0^s r ds \right) \dots \dots \dots (2.12)$$

この応力につり合うべき (2.2) の関係を満足する付加的なセン断応力 τ_z が生ずべきである。

$$\tau_z = -E \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} \int_0^s \left(w_0 - \int_0^s r ds \right) t ds \dots \dots \dots (2.13)$$

これによる捩りモーメントを M_t とすると

$$\begin{aligned} M_t &= \int_0^m (\tau_z t) r ds = -E \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} \left[\int_0^m r ds \int_0^s \left(w_0 - \int_0^s r ds \right) t ds \right. \\ &= -E \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} \int_0^m \left(w_0 - \int_0^s r ds \right)^2 t ds = -E C_{bt} \partial^3 \varphi / \partial z^3 \dots \dots \dots (2.14) \end{aligned}$$

ただし $C_{bt} = \int_0^m \left(w_0 - \int_0^s r ds \right)^2 t ds \dots \dots \dots (2.15)$

3. 局部座屈に対する考慮

曲げモーメントと軸圧力を同時に受ける部材、たとえばソリッドリブアーチの部材を形成する腹板に対しては、全体座屈が計算通りの安全度を持たすためには、局部座屈に対しても十分な考慮を払う必要がある。古い鋼道路橋の示方書では、軸圧縮力のみのかかった場合と曲げモーメントのみがかかった場合しかこの点が考慮されていない。このため新しい鋼道路橋では著者が提案した規定にしたがつて曲げモーメントと軸圧縮力を同時に受ける部材に対してもある種の制限を設けて考慮することになった。

この詳細については新鋼道路橋示方書および解説を参考にされたいが、その大体の骨子を述べ、それに一、二の補足を加えたい。

いま一般に上述の腹板は上下縁が弾性的に支持された帯状の板と考えられるが、まず安全側の処置として単純支持とみなして調べることにする。

図-4 に示す腹板の縁の y 点に作用する力を $\sigma_x t, y=0$ における圧縮力を $\sigma_0 t$ とし、

$$\sigma_x t = \sigma_0 t (1 - \varphi y/h) \dots \dots \dots (3.1)$$

とする。 φ は曲げおよび圧縮力の比をあらわす係数である。すなわち $\varphi=0$ は純圧縮、 $\varphi>1$ で下縁に引張を生じ $\varphi=2$ は単純曲げを示す。この場合座屈応力を σ_k とすると、

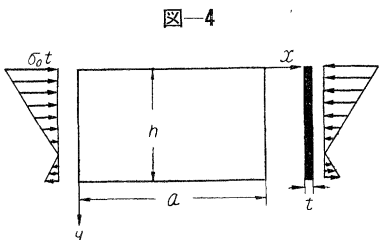


図-4

$$\sigma_k = k \frac{E \pi^2 \zeta}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{h}\right)^2 \dots\dots\dots (3.2)$$

大体において $a/h=1$ の場合に最小の座屈値⁷⁾ を与えると考えるとよいので、 k の値としてこの場合の値を考えれば安全となる。これを表-1 に示す。

なお k は材料の直線限界より上の座屈を修正する係数であり、reduced modulus によるか、tangent modulus によるかによりその値を異にする。通常柱の実験をもとにして定めている。すなわち直線限界をこえたのちの応力ヒズミ曲線の切線のヒズミ軸となす角の tangent を E_t とするとき、tangent modulus であらわす場合(ただし板の荷重方向のみが直線限界をこえると考え、直交異方性板としてとり扱うと)

表-1 k の推定される最小値

| | | | | | | |
|-----------|------|------|-----|-----|-----|-----|
| φ | 2 | 4/3 | 1 | 4/5 | 2/3 | 0 |
| k | 23.9 | 11.0 | 7.8 | 6.6 | 5.8 | 4.0 |

$$\zeta = \sqrt{E_t/E} = \sqrt{\varepsilon} \dots\dots\dots (3.3)$$

reduced modulus であらわす場合

$$\zeta = 1/2(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}) \dots\dots\dots (3.4)$$

で与えられる。わが国のこのような実験値がないので、たとえば平井敦著鋼橋 p 416 に示す値を採用すると、

$$\varepsilon = \frac{\sigma_k}{\pi^2 E} \frac{(2890 - \sigma_k)^2}{(8.175)^2} \dots\dots\dots (3.5)$$

で与えられる。これは幾分直線限界が高いようであるが、たとえば Bleich⁸⁾ の与えた値を採用した場合と結果はほとんど変わらない。直線限界の低い Moisseiff の値⁹⁾ とあまり差はない。大体の目安を与えるものとみなしてよい。なお Shanley¹⁰⁾ は tangent modulus によるのが実験値とよく合致するとのべている。

さて実際に生ずる応力は許容応力を一ぱいに満たすと考え、許容応力の最大値をとり、特に曲げ応力のときはフランジ板厚をケタ高に比し無視しうるように小と考える。わが国の鋼道路橋および鋼鉄道橋の示方書にしたがうと、 φ のすべての値に対し

$$\sigma_a = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

安全率 n は $\varphi=0$ のとき 2、 $\varphi=2$ のとき 1.5 とし、その間直線的に変えるものとする。

$$\sigma_k \leq n \sigma_a = 1200(2 - 0.25\varphi) \dots\dots\dots (3.6)$$

(3.2)、(3.6) より

$$h/t \leq \sqrt{k \zeta} \sqrt{E \pi^2 / 12(1-\nu^2)} (2400 - 300\varphi) \dots\dots\dots (3.7)$$

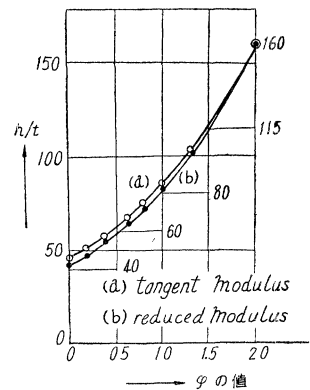
(3.5)、(3.7) を用いて計算すると、図-5 に示す限界曲線を得る。reduced modulus による方が安全側にある。

以上の考察は周辺単純支持としたため断面による特異性は考慮されていない。全体座屈の関係も考慮されていない。これを是正するため純圧縮を例にとつて考察を試みよう。局部座屈と全体座屈と同時に生ずる条件は、

図-5 局部座屈に対する板厚の制限

$$\frac{\pi^2 E \varepsilon}{(l/r)^2} = k \frac{\pi^2 E \sqrt{\varepsilon}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{h}\right)^2 \dots\dots\dots (3.8)$$

k の値は板の上下の荷重がのつていない辺に接続するとりつけられた板の拘束条件に影響される。この条件はその辺において板に単位のタワミ角を与える曲げモーメントの大きさ α で示される。 α と k の関係は引用文献 4) の筆者の論文に示したように計算される。



すなわち、板が両端の辺より拘束されている場合

$$k = \{2 + 2/(10\alpha + 3)\}^2 \dots\dots\dots (3.9)$$

一端が拘束されており、他端完全自由の場合

$$k = \{0.65 + 2/(3\alpha + 4)\}^2 \dots\dots\dots (3.10)$$

で与えられる。これを用いて腹板の制限厚さと細長比 l/r の関係を計算すると図-6 となる。図の下に計算に用いた断面形状および拘束係数を示す。上の群は腹板が下部フランジ板で拘束された場合、下の群は腹板の下端が自由の場合を $\alpha = \infty$, $\alpha = 1$, $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0$ について示している。 $\alpha = \infty$ は単純支持、 $\alpha = 0$ は固定条件を示す。この図より明らかに以下のことが言える。

(イ) 部材の局部座屈は l/r が小になるに従い、その危険性をきたす。 l/r が 40 以下では示方書の値より幾分低目の値を採用してほしい。通常使用する 40~80 位の間では図-5 の値をとれば安全である。

(ロ) 片端が自由の場合には当然局部座屈に対する危険性が增大するが、 $h/t = 12$ 程度に制限するのが好ましい。

(ハ) わずかな断面による拘束を与えても図の下に示す計算例よりわかるように局部座屈に対する危険性は緩和されて固定に近い性質を示す。

(ニ) 拘束辺は直線を保つと仮定しているが、溶接構造ではこの条件を満足しない恐れがある。一般に $\alpha = \infty$ の値を採用するのがよい。

4. 曲げモーメントと軸圧縮力を受ける部材の変位に関する一般式の誘導

以下の取扱いをするため次のように仮定する。

(1) 従来のハリ理論の仮定がそのまま適用できる

(2) 変位後も断面形状は変形しない。2.に述べた振りに関する性質がそのまま適用できる。

(3) 重心とセン断中心は一般に一致しない。

いま図-7に示すように軸圧縮力の作用方向をz軸とし、それに直角にx,y軸をとる。軸圧縮力Pはx方向に偏心 e_1 , y方向に偏心 e_2 だけ離れた点に作用するものと考え、図-7のような方向(座標の正の方向)に測つたとき正と考える。なお曲げモーメント M_y, M_x はそれぞれxz, yz面に働くもので図のような方向を正とみなす。この場合弾性的に貯えられるエネルギーは

- ① 曲げおよび振りによつて弾性的に貯えられるエネルギー: V
 - ② z方向に応力が働いたままで変位するときと与えるエネルギー: U_1
 - ③ 横方向に働く荷重がのつたままで、その荷重方向に変位するため与えるエネルギー: U_2, U_3
- となる。

いま載荷による変位を次のように分析して考える。すなわち、まず断面重心を原点とした(x,y)座標(断面に固定した座標)を考える。次にセン断中心のまわりにφだけ回転する。先の座標系のxy方向は新しい方向をとる、これをξη座標とする。この座標に関し断面はξη方向にそれぞれuおよびvの変位をなすものとする。

①のエネルギーは(2.14)を考慮すると

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_y u''^2 + EI_x v''^2 + EC_{bt} \varphi'^2 + KG \varphi'^2) dz \dots\dots\dots (4.1)$$

はzによる微分を示す。KGは普通の振り剛性を示し、 EC_{bt} は(2.15)に示す値である。

②のエネルギーは部材の軸方向のセン維が座屈した結果 $\Delta\sigma_z$ だけ変化したと考えると、 $\sigma \cdot dA$ (A_0^0 は断面積)を受けたセン維に考えられたエネルギーは(図-8)

$$U_1 = -\sigma_z dA \left(\delta_c + \frac{1}{E} \int_0^l \Delta\sigma_z dz \right)$$

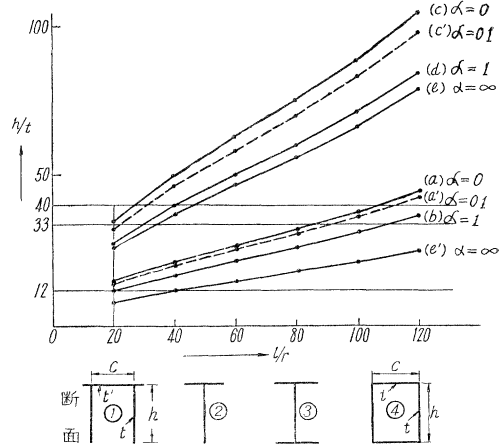
ここに

$$\sigma_z = \frac{P}{A} + \frac{(e_1 P - M_y)}{I_y} x + \frac{(e_2 P - M_x)}{I_x} y$$

いま

$$\left. \begin{aligned} \int_A \Delta\sigma_z dA &= 0 \\ \int_A y \Delta\sigma_z dA &= 0 \\ \int_A x \Delta\sigma_z dA &= 0 \end{aligned} \right\} \text{を考慮すると,}$$

図-6



| 記号 | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) | (a') | (c') | (e') |
|----------|---|-----|-----|-----|----------|------|------|----------|
| 断面 | ①,② | ①,② | ③,④ | ③,④ | ③,④ | ①,② | ③,④ | ①,② |
| α | 0 | 1 | 0 | 1 | ∞ | 0.1 | 0.1 | ∞ |
| 計算例 | 断面① $c=60$ cm, $h=50$ cm, $t=20$ mm, $t'=30$ mm, $\alpha=0.0381$ | | | | | | | |
| | 断面④ $c=60$ cm, $h=100$ cm, $t=16$ mm, $t'=30$ mm, $\alpha=0.0644$ | | | | | | | |

図-7

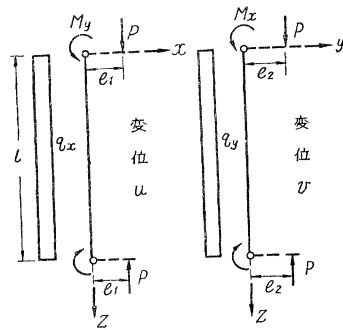
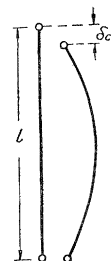


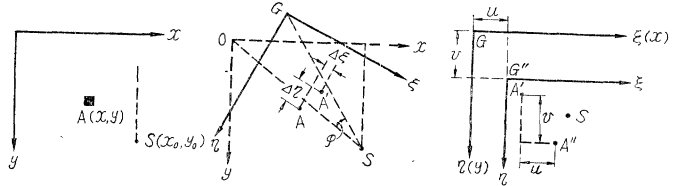
図-8



$$U_1 = -\frac{P}{A} \int_A \delta_c dA + \frac{(e_1 P - M_y)}{I_y} \int_A x \delta_c dA + \frac{(e_2 P - M_x)}{I_x} \int_A y \delta_c dA \dots\dots\dots (4.2)$$

いま材断面の図-9に示すように $S(x_0, y_0)$ を中心として φ だけ回転し、そのまま ξ 方向に u 、 η 方向に v だけ変位することになる。

図-9 変位の状態



したがって断面内の任意の一点Aに着目し、 φ を微小量とすると、*

$$\begin{aligned} d\xi &= x_0 - x + (u - x_0 + x) \cos \varphi - (v - y_0 - y) \sin \varphi \approx u + (y_0 - y) \varphi \\ d\eta &\approx v - (x_0 - x) \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_c &= \int_0^l \left[\sqrt{1 + \left(\frac{d d\xi}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d d\eta}{dz}\right)^2} - 1 \right] dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\left\{ \frac{du}{dz} + (y_0 - y) \frac{d\varphi}{dz} \right\}^2 + \left\{ \frac{dv}{dz} - (x_0 - x) \frac{d\varphi}{dz} \right\}^2 \right] dz \end{aligned}$$

(4.2) より、断面の重心に関する性質を用い整理すると、

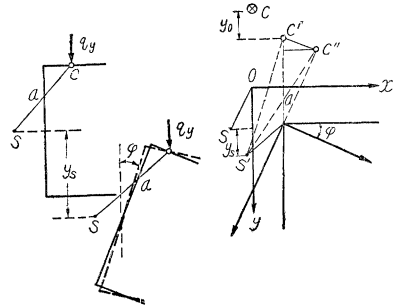
$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{1}{2} \int_0^l \left[P(u'^2 + v'^2) - \{2P(y_0 - e_2) + 2M_x\} u' \varphi' + \{2P(x_0 - e_1) + 2M_y\} v' \varphi' \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{I_p}{A} P + (-e_1 P + M_y) \frac{\alpha_1}{I_y} + (-e_2 P + M_x) \frac{\alpha_2}{I_x} \right\} \varphi'^2 \right] dz \dots\dots\dots (4.3) \end{aligned}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} I_p &= \iint_A \{(y_0 - y)^2 + (x_0 - x)^2\} dA \\ \alpha_1 &= 2x_0 I_y - \int \int_A x(x^2 + y^2) dA \\ \alpha_2 &= 2y_0 I_x - \int \int_A y(x^2 + y^2) dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.4)$$

③ のエネルギーは図-10を参考にして考慮すると、力の作用点cは断面全体として鉛直方向に y_s' だけ沈下し、Sのまわりに a を半径として φ だけ回転する。したがってcより c'' までの垂直変位は

図-10 横荷重による変位



$$v + \varphi u + a(1 - \cos \varphi) \approx v + \varphi u + \frac{a}{2} \varphi^2$$

$$U_2 = - \int_0^l q_y \left(v + \varphi u + \frac{a}{2} \varphi^2 \right) dz \dots\dots\dots (4.5)$$

同様に

$$U_3 = - \int_0^l q_x \left(u - \varphi v + \frac{b}{2} \varphi^2 \right) dz \dots\dots\dots (4.6)$$

a, b はセン断中心Sより q_y および q_x の作用点までの距離を示す。

ツライイ条件を満すためには、これらのエネルギーの総和 $V + U_1 + U_2 + U_3$ の u, v, φ に関する変分が0であればよい。一般に M_x, M_y の値が z についての函数関係にあるとみなし、純捩りモーメント m_t' によるエネルギーも加え、 u, v, φ についての変分計算を施すと、ツライイ式として次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} EI_y u'''' + Pu'' + P(y_0 - e_2) \varphi'' + (M_x \varphi)'' &= q_x \\ EI_x v'''' + Pv'' - P(x_0 - e_1) \varphi'' - (M_y \varphi)'' &= q_y \\ EC_{bt} \varphi'''' - KG \varphi'' + \{P(y_0 - e_2) + M_x\} u'' - \{P(x_0 - e_1) + M_y\} v'' \\ &+ \left\{ \frac{\alpha_1}{I_y} (-e_1 P + M_y) + \frac{\alpha_2}{I_x} (-e_2 P + M_x) + \frac{I_p}{A} P \right\} \varphi'' + \frac{\alpha_1}{I_y} S_y \varphi' \\ &+ \frac{\alpha_2}{I_x} S_x \varphi' - a q_y \varphi - b q_x \varphi = m_t' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.7)$$

ここに $S_y = dM_y/dz$, $S_x = dM_x/dz$ でセン断力を意味する。従来のハリ理論はこの一部を示すにすぎない。

* x, y を断面に固定したものと考えると、このようにあらわしうる。

5. y 軸に対して対称な断面の座屈に対する考察

いま、もつとも一般的に使用される形として一軸対称(y 軸)を有する断面 図-11 を考えると、 $x_0=0$ となる。

$$\left. \begin{aligned} M_y=0, e_1=0, q_y=0 \\ M_x=-一定, e_2=e, q_x=0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.1)$$

なる場合を取扱う。

この場合 (4.7) は簡単になり、

$$EI_y u'''' + Pu'' + P(y_0 - e_2)\varphi'' + M_x \varphi'' = 0 \dots \dots \dots (5.2)-a$$

$$EI_x v'''' + Pv'' = 0 \dots \dots \dots (5.2)-b$$

$$EC_{bt} \varphi'''' - KG \varphi'' + \{P(y_0 - e) + M_x\} u'' + \left\{ \frac{\alpha_2}{I_x} (-eP + M_x) + \frac{I_p}{A} P \right\} \varphi'' = 0 \dots \dots (5.2)-c$$

ここに (a), (c) より振り座屈 (b) より普通の Euler 座屈が算出される。

(1) 振り座屈に対する考察

端条件として自由反りおよび単純支持とする。

$$\left. \begin{aligned} z=0, z=l \text{にて } \varphi=0, \varphi'=0 \\ u=0, u'=0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.3)$$

$u = a_1 \sin \frac{n\pi}{l} z, \varphi = a_2 \sin \frac{n\pi}{l} z$ を満足するから、(5.2) a, c に代入し、 a_1, a_2 の係数の行列式を0とおき、そのときの $P = P_K, M_x = M_K$ とおくと

$$\{P_K(y_0 - e) + M_K\}^2 + (P_K - P_e) \left\{ i^2 (P_t - P_K) + \frac{\alpha}{I_x} (eP_K - M_K) \right\} = 0 \dots \dots \dots (5.4)$$

ただし

$$\alpha = 2y_0 I_x - \iint_A y(x^2 + y^2) dA$$

$P_e = EI_y (\pi/l)^2$: x 方向の Euler 座屈値

$P_t = \{KG + EC_{bt} (\pi/l)^2\} / i^2$: Wagner の純振り座屈値

$i = \sqrt{\iint (x^2 + y^2) dA / A}$: 極回転半径

(a) 純圧縮による横方向 (x) の座屈値

$$P_K / P_e = \frac{(P_t / P_e + 1) \pm \sqrt{(P_t / P_e - 1)^2 + 4 y_0^2 / i^2 \cdot P_t / P_e}}{2(y_0^2 / i^2 - 1)} \dots \dots \dots (5.5)$$

したがって一般に P_e より低い値を示す。しかも横方向の座屈値は P_e でなく、振り変形をともなつたある特殊の座屈値となることが示される。この場合断面の振り中心と重心と一致すると、

$$(P_K - P_e)(P_K - P_t) = 0 \dots \dots \dots (5.6)$$

となり、横方向の座屈値は P_e か P_t のうち小さい方の値をとることが示される。

(b) 端曲げおよび圧縮を支配する式

$$M_K^2 + \{2y_0 P_e + \beta_1 (P_K - P_e)\} M_K + \{i^2 (P_K - P_e)(P_t - P_e) + y_0^2 P_e^2\} = 0 \dots \dots \dots (5.7)$$

ただし

$$\beta_1 = \iint_A y(x^2 + y^2) dA / I_x$$

これは一般に図-12 のような限界曲線を示す。

$P_K = 0$ で重心と振り中心が一致するとき $\beta_1 = 0$ となるから

$$M_K = i \sqrt{P_e \cdot P_t} \dots \dots \dots (5.8)$$

これは従来の横方向の振り座屈を与える式と一致する。

(c) 偏心座屈を支配する式

(5.4) で、 $M_K = 0$ とおけばよい。

$$P_K / P_e = \frac{1}{2K_1} \left\{ -K_2 \pm \sqrt{K_2^2 + 4K_1 i^2 P_t / P_e} \right\} \dots \dots \dots (5.9)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} y_0^2 + e^2 - i^2 - e\beta = K_1 \\ i^2 (P_t / P_e + 1) - e(2y_0 - \beta) = K_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.10)$$

(2) 普通の座屈に対する考察

両端において M_A, M_B の端モーメントが作用する場合は $\sqrt{P / EI_x} = k$ とおくと、(5.2)-b より

図-11 一軸対称断面

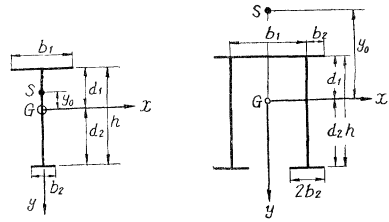
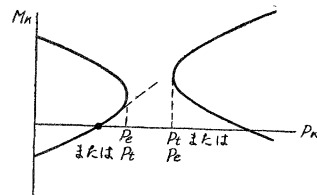


図-12 限界曲線



$$v = -M_B/P\{\sin kz/\sin kl - z/l\} + M_A/P\{\sin k(l-z)/\sin kl - (l-z)/l\} \dots\dots\dots (5.11)$$

この変位 v によつて生ずる曲げモーメント $EI_x v''$ は $M_A/\sin kl\{\sin k(l-z) - M_B/M_A \sin kz\}$ となる。

この曲げモーメント最大となる位置を z_1 とすると、上式の一次微分を 0 とおけばえられる。すなわち

$$\cos k(l-z_1) = -M_B/M_A \cos kz_1 \dots\dots\dots (5.12)$$

この z_1 の位置で、曲げ圧縮応力線は軸圧縮力による圧縮応力と曲げ圧縮応力が合成して最大の応力を生ずる。

この応力が材の降伏応力 $\sigma_y = 2400 \text{ kg/cm}^2$ に達したとき限界となると考えると、この限界応力の条件式は、断面積を A 、断面係数を W とおくと、

$$M_A/W = (\sigma_y - P/A) \sin kl / \{\sin k(l-z_1) - M_B/M_A \sin kz_1\} \dots\dots\dots (5.13)$$

ここで三角関数の関係より

$$\sec \frac{kl}{2} = \frac{1 + 0.26(k^2 I^2 / \pi^2)}{1 - (k^2 I^2 / \pi^2)} = \frac{P_E - 0.26 P}{P_E - P}$$

ただし $P_E = EI_x (\pi/l)^2$ となるから

$$\frac{\sin k(l-z_1) - M_B/M_A \sin kz_1}{2 \sin (kl/2)} = k' \quad \text{とおくと}$$

$$k' M_A/W = (\sigma_y - P/A) \frac{(P_E - P)}{P_E + 0.26 P} \dots\dots\dots (5.14)$$

P_E に対し $0.26 P$ を無視し、 $\sigma_y = 1200 \text{ kg/cm}^2$ (安全率を考慮した曲げ圧縮許容応力度) $P_E = P_{ca}$ または $\sigma_{ca} A$ (許容圧縮応力度) におきかえて、設計式を誘導すると

$$k' M_A/W = (1200 - P/A) (1 - P/A/\sigma_{ca}) \dots\dots\dots (5.15)$$

となる。この式で設計すれば、圧縮側の縁応力が降伏点に達する限界をある安全率をもつて防ぐことができる。次に端モーメントの性質に応ずる k' の値をしらべてみる。

(a) $M_A = -M_B$ の場合

(5.12) より $z_1 = l/2$, $k' = 1$ となる。

(b) $M_A = M$, $M_B = 0$ の場合

(5.12) より $k(l-z_1) = \pi/2$, $P = P_E$ の状態を考えると、 $k = \pi/l$ となるから $z_1 = l/2$, $k' = 1/2$ となる。

(c) $M_A = M_B$ の場合

(5.12) より、 $2kz_1 = kl + \pi$, $P = P_E$ の状態を考えると、 $k = \pi/l$ となるから、 $k' = 1$ となる。

以上の考察より (5.15) の M_A は実際に作用する端モーメントの絶対値の平均値で計算すれば安全側にある。

6. 数値計算例とその考察

重心と振り中心が一致しない一例として非対称 I 断面を取扱う。実際にはこのような断面を圧縮材とすることはほとんどないが、その危険の程度を吟味するため、柱として細長比 λ を 60 と 80 の場合について、横方向の座屈値の低下を示したものが 図-13 (a), (b), (c), (d) である。なおこの場合の主要な値 y_0, C_{bt} は (2.6), (2.7) を用い、図-11 記号であらわすと、

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= (d_2 I_2 - d_1 I_1) / I_y, \quad C_{bt} = h^2 I_2 / I_y \\ I_1 &= b_1^3 t_1 / 12, \quad I_2 = b_2^3 t_2 / 12, \quad I_y = I_1 + I_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.1)$$

この場合対称軸を y 軸とし、重心より b_2 フランジ板に向つて正にとる。したがつて y_0 は重心より負の方向すなわち幅の広い b_1 フランジ板に近い方向に向く。

この図は h/t が大となる、すなわち断面の肉厚が薄くなるほど、または λ が小となるほど、またはフランジ板と腹板の高さの比が小となる、すなわち広幅フランジ板になるほど横方向の座屈値の Euler 値よりの低下はきつくなる。したがつて上述の 3 つの工夫はみかけ上の座屈値をあげているにすぎない点に注目すべきである。

図-14 は細長比および断面積一定とし、もつとも有利な座屈値を与える $\theta_1 = 1$ の場合の $P_K/A \sim \lambda$ 曲線を対称断面と比較して示したものである。弾性座屈の範囲内においても、断面形状によつては Euler 座屈と一致しない。

次に 2 枚ウェブ断面の代表として T 断面の場合を取り扱う。この場合の y_0, C_{bt} の値は図-11 に示す記号を用いると、(2.6), (2.15) より次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= -d_1 \left(1 + \frac{b_1^2}{4 I_y} A \right) + 2 h I' / I_y \\ C_{bt} &= (y_0 - d_1)^2 I_y + \frac{4}{3} b_2^3 h I (2 y_0 + d_2 - d_1) - \frac{(y_0 - d_1) b_1^2 d_1 A}{4} + \frac{b_1^2 h^2 t}{12} (h + 6 b_2) \\ I_y &: y \text{ 軸のまわりの断面二次モーメント} \quad A: \text{全断面積} \\ I' &= (2/3) b_2^3: \text{下フランジ板の腹板軸に関する断面二次モーメント} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.2)$$

図-13 (a)

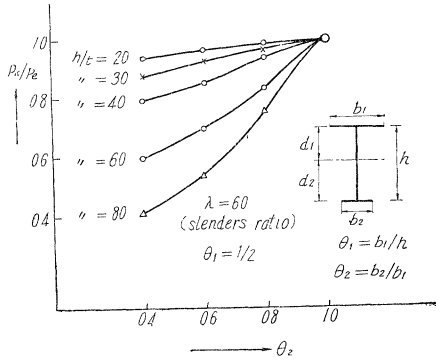


図-13 (b)

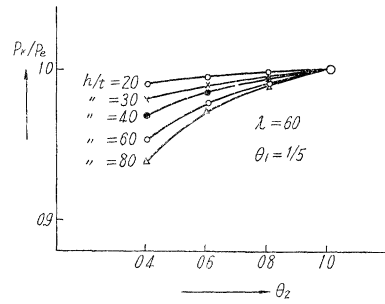
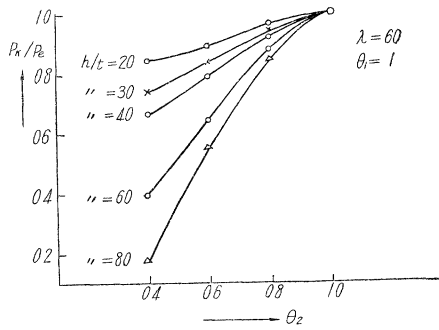
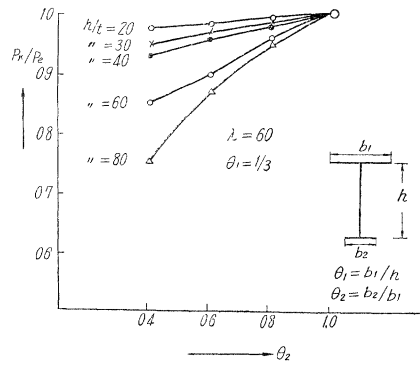


図-13 (c)

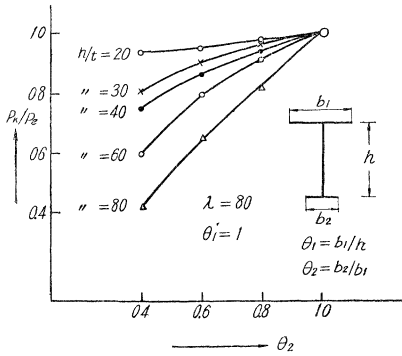


図-13 (d)

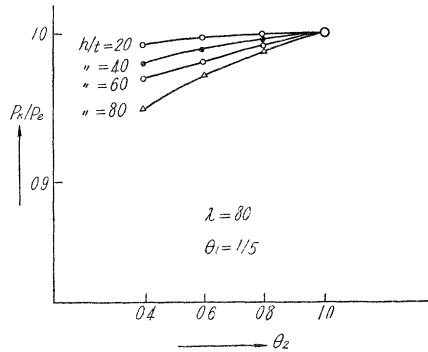
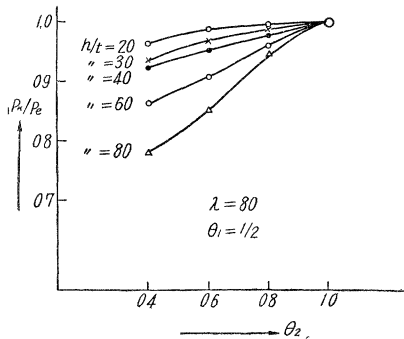
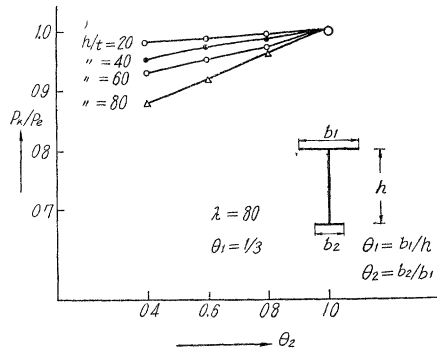
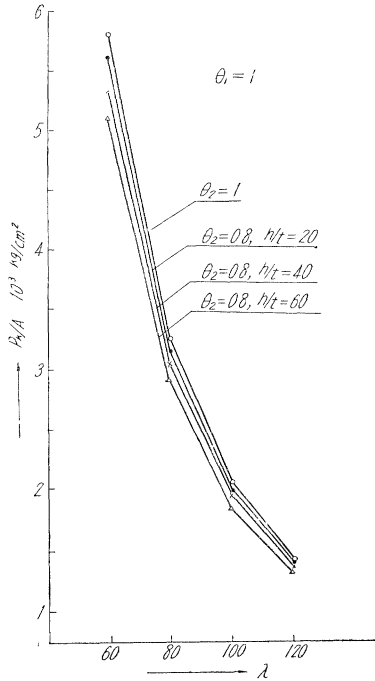


図-14



この計算の1例を図-15 (a), (b), (c) に示す。 h/t が小なるほど座屈値の低下の程度は小となるが、通常用いられる $h/t=30\sim 40$ の範囲内ではその低下の程度は b/h をかえてもほとんど変わらず、 P_K/P_E は $0.4\sim 0.3$ の値をとる。このような断面は、 h を大とすると側方への Euler 座屈値は対称軸方向の座屈値に比して小となるが、実情はなお小となり、非常に振じられ易い傾向をもつ。図の黒点は $P_t < P_e$ 、白点は $P_t > P_e$ の場合に対応する。したがって Wagner の純振り座屈値が、Euler の横座屈値より大なる断面を選べば振り易い傾向を防ぐことができるが、このような断面ではあまり有効でない。図-16 はこの計算値を利用し、横方向座屈値 P_K と対称軸方向の Euler 座屈値 P_E の比を b/h をかえ比較したものである。 b/h が大となるほど 1 に近づくが、まだこの範囲では両方向の座屈値のツライイは保つに至らない。

図-15 (a) には重心がウェブ中心より上フランジ近い場合、(b) は重心とウェブ中心と一致した場合、(c) は重心がウェブ中心より下フランジに近い場合の例であるが、明らかに重心とウェブ中心と一致する場合は比較的確両方向の座屈値の一致をつくり易い。

図-15 (a) の断面について端曲げモーメントによる振り座屈値を (5.7) による値と従来の理論 (5.8) による値を比較して示したのが表-2 である。振り中心と重心と一致しない場合は、はるかに低い値を示し、従来の計算では安心できなく、振り座屈を生じ易いことがいえる。

なお計算例は示さないが、たとえば、普通使用される等脚アングルでは一般に対称軸 (角の2等分線) 方向の断面二次モーメントはそれに直角方向の断面二次モーメントに比し小であり、従来の計算上では対称軸方向の座屈値を吟味すれば十分である。しかしこの場合も振り中心と重心が一致しないため横方向の座屈値は (5.5) 式によら

図-15 (a)

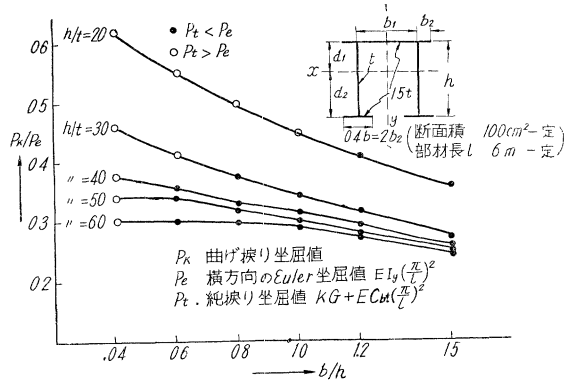


図-15 (b)

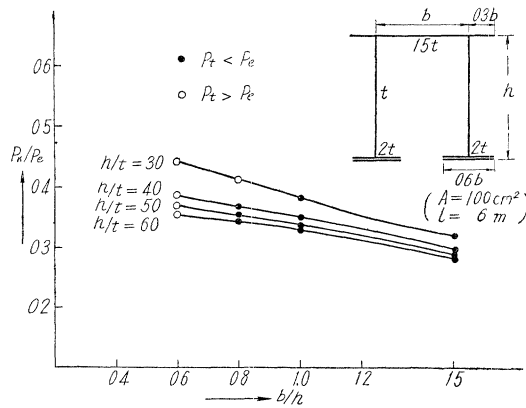


図-15 (c)

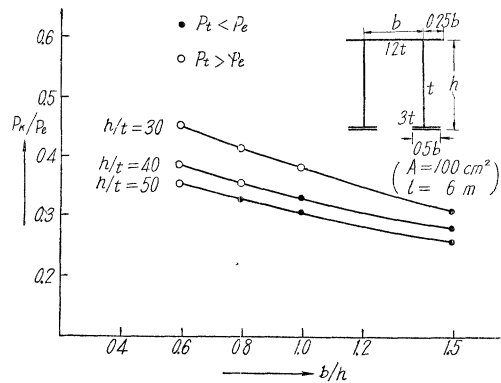


図-16

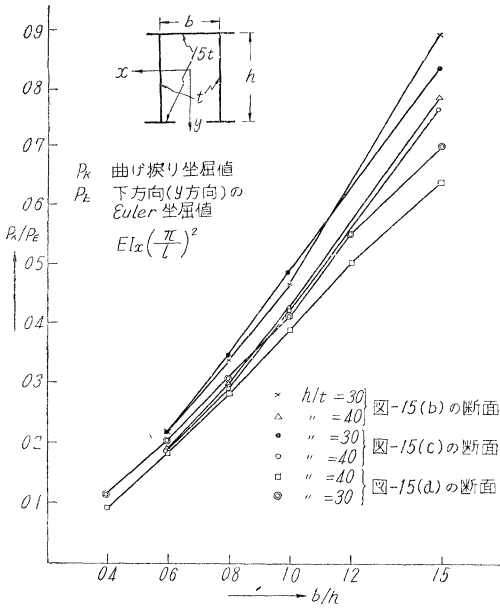


図-17 偏心荷重の影響

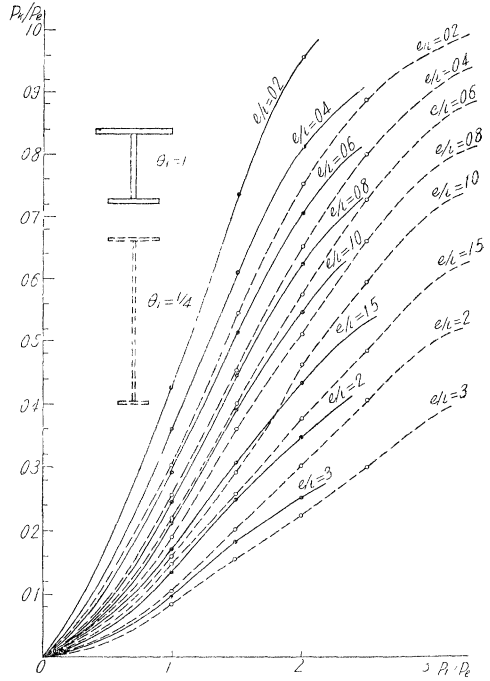
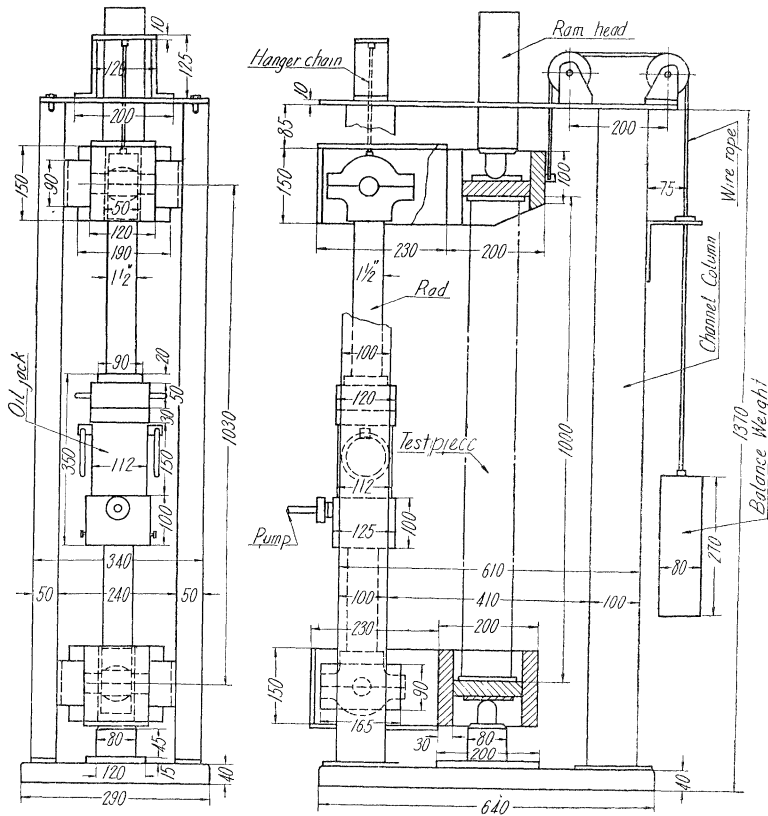


図-18 加圧試験装置



ねばならない。 P_o でも P_f でもない。

肉厚が薄くなり、脚長と肉厚の比が10~20以上になると、逆に横方向の座屈値が小となる場合があるから、その使用にあたっては注意すべきである。

図-17は偏心の影響を示した計算例である。偏心量は極回転半径*i*の比であらわした。普通考えられる偏心量は $e/i=0.1\sim 0.3$ 程度であるから、 $P_i/P_o=2\sim 3$ 以上になるよう設計することにより、偏心の振り座屈値におよぼす影響を軽減することができる。この意味でWagnerの純振り座屈値は重要な断面常数である。

7. 非対称I断面の一実験

(1) 実験の概要

圧縮力と無関係な一定の端曲げモーメントを与えた状態で圧縮力をかけようようにするため、図-18に示すような特殊に考案した試験架の中に試験片を入れ、100tアムスラー試験機を使用し加圧した。できるだけ重心載荷するように努めた。

端曲げモーメントは試験片端支承構造より出した上下の腕の間にオイルジャッキを入れ、オイルジャッキにより一定の値を支承構造に与えようようにした。

端曲げモーメントはI形柱の腹板面内に作用するようにし、狭い方のフランジ板に正または負の曲げ応力の生ずる2つの場合を比較し、この差が理論的結果とうまく合致するか否かをしらべた。一定の端曲げモーメントによる応力はフランジ板に抵抗線ヒズミ計をはりつけ、そのヒズミを測定して吟味した。結果は割りに良好であつた。

(図-19)

なおオイルジャッキを入れた柱と上下の腕との結合はピン構造にし、腕の重さに相当する対重をおき、試験片直上の支承構造が、自由に回転できるようにした。

その結果オイルジャッキの柱は試験片にかかる荷重を分担することなく、試験機の示す荷重をそのまま試験片にかけることができた。

なお一定の端曲げモーメントを荷重に先立つて与えたわけであるが、荷重がかかり上部の腕が、回転すると、オイルジャッキの圧力が低下するが、一定の端曲げモーメントを保持するよう、荷重ごとにオイルジャッキの圧力を一定に保つようにした。

また腕の回転にともない、荷重が試験片に偏心しないようにするため、Ram headを使用し、二重のピン構造にし、腕の回転後も荷重は常に試験片重心軸方向を向くようにした。

試験片は上下に加圧板をとりつけ、上下の支承構造にボルト結合し、支承部における試験片の軸線が上下の腕に常に直角を保つようにした。このようにして、試験片全断面に一樣に荷重が分布するようにした。なお試験片のタワミ 図-20に示すように5ヶ所においてダイヤルゲージで測定した。d-1,d-2は柱中央部の回転をはかる目的であつて、この差で振り変形を代表する性質と考えた。d-3,d-4は下より15.6cmの所においたが、これもこの所の回転状態を測定した。これは試験が偏心荷重と同様の性質をおび、座屈荷重に近づくると側方にとび出す危険性があるため、上下の加圧板を端支承構造にボルトづけした。このため座屈有効長は試験片長より小となる。前節で展開した理論の中で端部の回転角を0とする条件をいれたが、これがこの実験でどの程度確保されているかを実証するためであつた。d-4は中央部の側方のタワミ d-6で中央部の曲げ面内のタワミを測定した。試験片の性質上座屈と深い関係を持つのはd-4である。

8コの試験片について実験したが、その主要寸法および一定の端曲げモーメントの大きさを表-3に示す。

端曲げモーメントの+の記号は幅 b_2 のフランジ板に引張応力、-の記号は幅 b_2 のフランジ板に圧縮応力を生ずる場合を意味している。

(2) 実験結果およびその考察

表-2 筆者の理論と従来の理論の比較
 $h/t=40$ の場合

| b/h | M_K/P_o (5.7) 式による | M_K/P_o 従来の理論 |
|-------|-------------------------|--------------------|
| 1.5 | 2.65 | 32.9 |
| 1.2 | 2.78 | 25.6 |
| 1.0 | 3.08 | 22.5 |
| 0.8 | 3.31 | 19.1 |
| 0.6 | 4.0 | 16.4 |
| 0.4 | 4.3 | 12.3 |

図-19

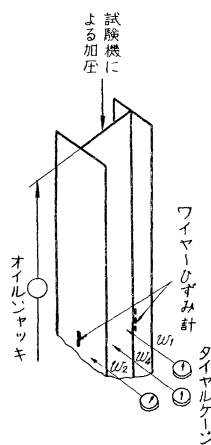


図-20 ダイヤルゲージの位置

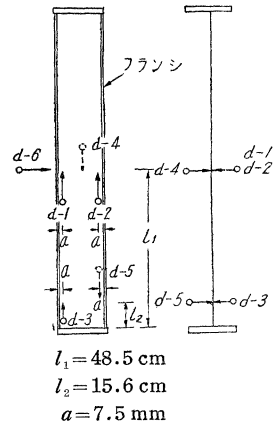


図-21 は下より 15.6 cm の所における振り角に相当するタワミの差を示す。No. 6 の最後の段階を除き、明らかに荷重に無関係にこの部分の振り角はほとんど 0 であることを意味している。一方図-22 は対称断面で端曲げモーメントを与えない No. 8 の測定値を示す。全長にわたり荷重に無関係に振り角はほとんど 0 であり、実験が比較的理論どおりにおこなわれていることを示す。他の実験では振り角を代表する w_1-w_2 と側方へのタワミをあらわす w_4 とは同じ傾向を示す。互に無関係であるべきこの値が同じ傾向を示すことは側方の変形による座屈と、振りによる座屈が同一現象であることを示すもので、前節の理論の一つの裏づけをしたものといえる。図-23 は荷重タワミの関係を Donnell の方法で整理して示す。図の直線と縦軸の交点が座屈荷重を示す。この内白点は w_4 の値によるもの黒点は w_1-w_2 の値によるものを示す。No. 3, を除き両者は全く一致する。表-4 はこの結果よりみた座屈値を示す。なお理論値の基礎となる有効座屈長に対しては対称断面の No. 8 をもとにして定めると、 $l = 64.8$ cm となり、全長の約 67% となる。一方 d-5 の振り角の側定より、振り角 0 なる位置は 97 cm - $(15.6 \times 2) = 65.8$ cm とほとんど一致する。両端弾性支持の場合の有効長は全長の 70% 位になるといわれているが、比較的よく似た値を示す。したがって有効長を 65.3 cm にとり計算値を求めた。これが表-4

表-3 試験主要寸法
試験片長=09.7 cm 板厚=3.3 mm (全断面一定)

| 試験片番号 | 1, 2, 3 | 4, 5, 6 | 7, 8 |
|---------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| フランジ板幅 b_1 (mm) | 25 | 40 | 25 |
| フランジ板幅 b_2 (mm) | 10 | 20 | 25 |
| 腹板高 h (mm) | 75 | 90 | 75 |
| 振り中心座標 y_0 (mm) | -29.28 | -30.4 | 0 |
| β (mm) | 5.93 | 6.757 | 0 |
| KG (kg-cm ²) | 1.07×10^5 | 1.46×10^5 | 1.312×10^5 |
| EC_{bt} (kg-cm ⁴) | 3.3278×10^6 | 3.8320×10^7 | 2.7681×10^7 |
| P_e (kg) | 2.37×10^3 | 9.932×10^3 | 4.348×10^3 |
| P_t (kg) | 14.46×10^3 | 18.495×10^3 | 20.808×10^3 |

端曲げモーメント 1,4,8 ... $M=0$ 2,7 ... $M=+7550$
 M (kg-cm) 3 ... $M=-7550$ 5 ... $M=+15100$
 6 ... $M=+15100$

図-21 タワミの差 (w_3-w_5)

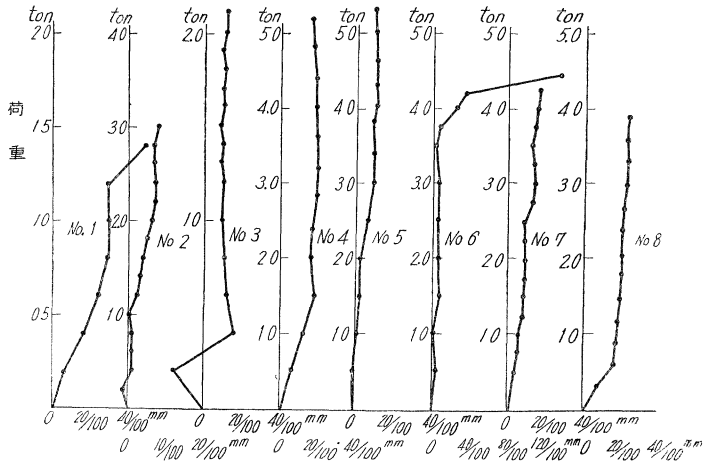


図-22 No. 8 の荷重タワミ曲線

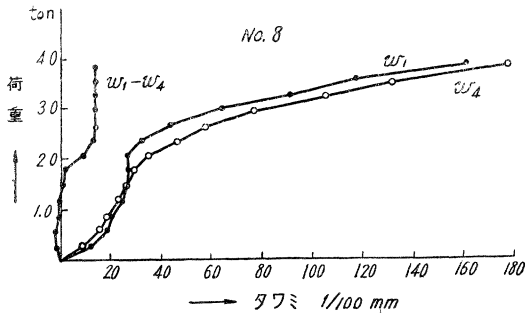


図-23 Donnell 法による実験値の整理

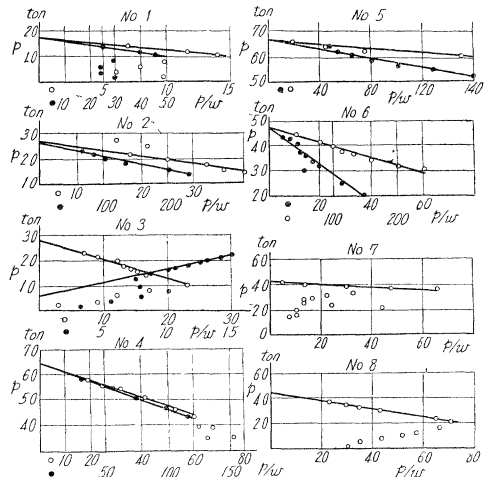


表-4 (ton)

| 試験片番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------|-----------|------|------|------|------|------|------|------|
| 実験値 | 振り変形によるもの | 1.7 | 2.68 | 0.61 | 6.50 | 6.70 | 4.70 | 4.20 |
| | 側変形によるもの | 1.7 | 2.58 | 2.80 | 6.50 | 6.64 | 4.70 | 4.40 |
| 理論値 | 2.01 | 2.37 | 0.77 | 6.96 | 5.18 | 3.29 | 3.97 | |

○ 側方へのタワミ w_4 による値
 ● 振り変形を代表するタワミ差 w_1-w_2 による値

に示す理論値である。両者は比較的良好一致し、計算上の P_e, P_f よりはるかに低い値を示す。このような結果より本考察の妥当性が説明されたと考えてよい。

あとがき

溶接構造の構造力学的性質に関する研究に関連しておこなった曲げと圧縮力を受ける部材に関する諸性質について論じてきた。この主要なる点は部材断面の形状を十分反映した立場で、その耐力を考えねばならないことである。対称断面でない部材を取扱うかぎりではその捩り変形の発展には十分注意し、その耐力の増進をはからなければならぬ。実際に使用する断面はたとえ対称に設計しても板厚の公差のため対称とはいえない。この点をよく考え十分安全な処置および考慮が必要である。しかしその性質を十分知つたならば、いたずらに恐れなくて最も溶接し易くて経済的にその耐力を期待できる断面を選べばよいわけである。

その意味において以上に展開した理論を応用してもらえば幸である。

本研究は文部省科学研究費によつておこなつたものである。研究の指導および便を与えていただいた平井、伸両教授に深く感謝するとともに本研究の実験および数値計算を橋梁研究室出口、佐々木、小栗の3助手に煩わした、長期にわたつた労を感謝する。

参 考 文 献

- 1) Osgood : Residual Stress in Metals and Metal Construction. 残留応力はそれ自身内的につり合つているため、そのまま破壊応力に影響することは考えられない、特に延性に富んだ材料ではこの影響はほとんどないとみてよい。
- 2) この研究については一部は昭和 30 年度の土木学会年次大会に述べた。別に発表する予定である。なほこれに関連した幾多の論文がみられる。特に次にあげるものが参考とされる。
E. Reisner : J. Aeron. Sci., Vol 8 No.7 p.284.
H.A. Schade : The Effective Breadth of Stiffened Plating Under Bending Loads : N.A.E (Nov. 1951)
- 3) その一部はすでに発表した。T. Okumura "Torsional Buckling of Welded Built-Up Members" Proceeding of the 2nd J. N.C.A. (1952).
- 4) 奥村敏恵 : 溶接組立材の座屈に関する研究, 溶接学会誌 21 卷 10 号 (1952 年)
- 5) H. Wagner, u. W Pretsch et, "Verdrehung und Knickung von offenen Profile" Lufo, Bd 11, Nr 6 (1934) なほ同種の論文はその後多くの研究を見ている。例 Kappus (Lufo, Bd 14, Nr 9) Bleich : Buckling Strength of Metal Structure; Goodier (A.S.M.E. 1950); 倉西正嗣 (日大工学研究所報告)
- 6) 倉西正嗣 : 弾性学 (機械学会) p.201~202.
- 7) Timoshenko : Theory of Elastic Stability p.355
- 8) Bleich : Theorie u. Berechnung der Eisernen Brucken.
- 9) L.S. Moisseiff "Theory of Elastic Stability Applied to Structural Design" Proceeding of A.S.C.E (1940)
- 10) F.R. Shanley : Applied Column Theory. Proceeding of A.S.C.E. (1952)
- 11) Bleich は Buckling Strength of Metal Structure に別々の形でその一部を計算しているが、部分積分の考慮が不十分のためか、式構成の項が不十分である。なおこの式はツリアイ形の考慮からも、同様に導きだされる。(昭.30.11.21)