

# 電気回路相似法によるトラス応力の研究\*

正員 荒井利一郎\*\*

准員 山内利彦\*\*\*

**緒言** 構造物の応力解析には、数字、数学による解析と、実験による応力解析がある。本論文は後者によるもので、構造物と電気回路の相似性を利用した実験応力解析法の述べたものである。

一般に構造物は、その構造が複雑になるほど、応力解析が困難となり、また相当の時間を要する。

1934年 V. Bush<sup>1)</sup>は構造物と電気回路との相似性を利用すれば、これらの解析が容易に行い得ることを発表した。その後、G. Kron<sup>2)</sup>、横山氏<sup>3)</sup>、L. Ryder<sup>4)</sup>らにより、異なる回路要素を用いた研究が発表されているが、そのほとんどが相似回路を主としているため、実験解析が簡単に行い得るようで、実は容易に行うことができない。特に回路要素の良否は、直接実験精度に関係するので、要素の材料的考察と相まって、実験に使用する電氣的諸量を如何にとるか、問題となる。

本報告は、これらの点に関し考察を加え、1力部材としてのトラスを例にとり、各種トラスの相似回路、実験解析法、精度について述べたものである。

## 1. 相似関係

長さ  $l$ 、断面積  $A$  の棒を考え、これに力  $P$  が作用したときの変位を  $\Delta l$  で表わせば、

$$\Delta l = \frac{Pl}{AE} \dots\dots\dots (1)$$

いま、力  $P$  を電流  $I$  に、変位  $\Delta l$  を電圧  $V$  に相似させ、かつオームの法則  $I = V/R$  を用いると、抵抗  $R$  は

$$R = \frac{1}{S_r} \cdot \frac{l}{AE} \dots\dots\dots (2)$$

すなわち、抵抗は部材 Compliance に相似する。

また部材の歪エネルギーは  $P^2l/2AE$  であるから、トラス全体の歪エネルギーは次のようになる。

$$\sum_i \left( \frac{p_i^2 l_i}{2 A_i E} \right)$$

部材応力はこの歪エネルギーを最小にするような値をとるため、

$$\delta \left( \sum_i \frac{p_i^2 l_i}{2 A_i E} \right) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

回路においては、消費電力最小の条件から、

$$\delta (\sum_i I_i^2 R_i) = 0 \dots\dots\dots (4)$$

式 (3)、(4) は式 (1)、(2) から全く同じ関係式となる。

故に、式 (2) の抵抗を原型トラスにしたがつて結び、できあがつた鉛直水平両回路を理想変成器で結べば、トラスの相似回路が得られる。接点両端の電圧降下は  $(pl/AE)$  であるから、抵抗両端の電圧が変位を与えることもわかる。

## 2. 回路要素

回路要素には変成器と抵抗器を用いた。変成器には無損失の理想変成器が要求されるので、できるだけ損失の少ない変成器を試作し、これを用いた。この変成器の良否は直接実験精度に影響するから、よいものを選ぶと同時に、その特性を十分に知って実験を進めなければならない。

試作変成器は鉄心に Ni 鋼を使用し、1次、2次巻線数はともに 500 回である。2次側は 5, 15, 45, 135, 300 回の各端子を出し、これらの極性を考えて直列に結ぶことにより、1次、2次巻線比が 1% の歩みで 100% まで任意の値をとりうるようにした。直流抵抗は  $5 \Omega$  である。図-1 は使用変成器の外観で、図-2 はこれを上面より見たところである。

またこの変成器の特性曲線を図-3 に示す。

抵抗器には摺触線型可変抵抗器を用い、図-4 の如く 2 コの抵抗を 1 組として使用した。最大値はそれぞれ 10

\*昭和 30 年 9 月 9 日、第 5 応用力学連合講演会で発表

\*\*名古屋工業大学教授、土木工学教室

\*\*\*名古屋工業大学講師、土木工学教室

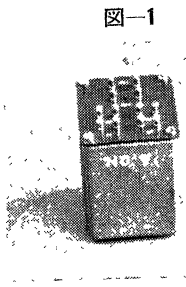


図-1

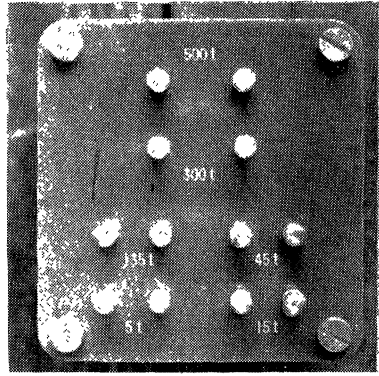


図-2

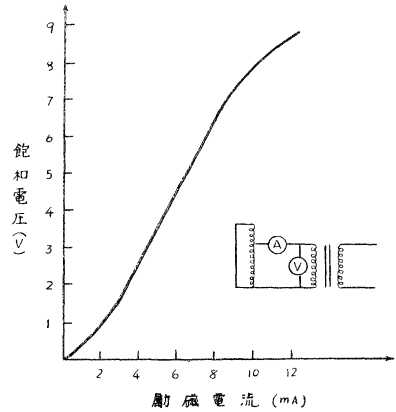


図-3

$\Omega$ , 100  $\Omega$  である。

その他に、電源電圧調整用スライダック、電圧測定用の真空管電圧計が必要である。この真空管電圧計には、横河電機製 Type APE-103 を用いた。実験は動作電流が小さく分路抵抗も小さいので、高インピーダンスの真空管電圧計で抵抗両端の電圧降下を測り、これからその部分を流れる電流を計算した。図-5は使用した真空管電圧計である。

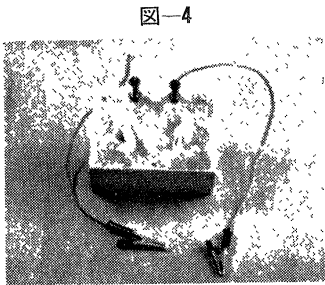


図-4

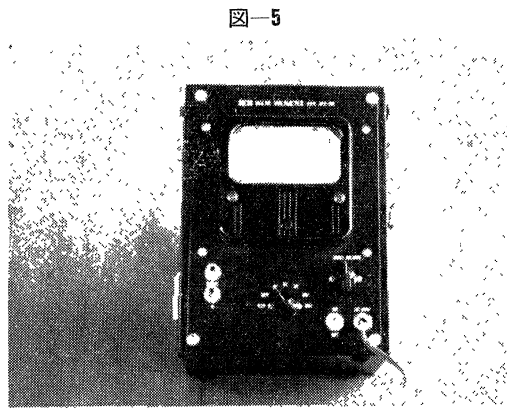


図-5

### 3. 電氣的諸量に対する考察

上記器械を用いて実験をする場合、回路に挿入する抵抗及び回路に流す電流をいかにとるかが、非常に重要となる。

いま、わかりよくするため1次、2次巻線比が1:1の変成器を考える。2次側無負荷のとき1次側に流れる電流を  $I_0$  とし、2次側の負荷をとつたとき2次側に流れる電流を  $I_2$ 、このときこれと平衡するため1次側に流れる電流を  $I_1'$  とすれば、 $I_1' = I_2$  であり、1次側に流れる全電流  $I_1$  は、 $I_1 = I_0 + I_1'$  となる。

図-6 は変成器の電圧と、電流の関係を示すベクトル図である。

故に、 $I_1$  は  $I_2$  より大きくなるが、実験精度をよくするには  $I_0$  を小さく、 $I_2$  を大きくとるようにしなければならぬ。

$I_2$  を大きくするには2通りの方法がある。1つは2次電圧を大きくとること、1つは2次側抵抗を小さくとることである。前者は励磁電流の増加を来たすので後者により実験を行わなければならない。

以上の点を考慮し、かつ準備された変成器、抵抗器の数より次の如き値を用いた。

$$(\text{斜材に相当する抵抗}) = (\text{変成器の直流抵抗}) = 5 \Omega$$

故に  $S_r = I / (5 AE)$

また Scale factor  $S_s$  には主として (1/0.1)P, (1/0.12)P, (1/0.15)P を用いた。

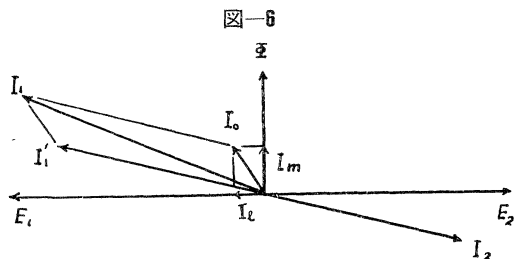


図-6

4. 実験

以下各種トラスの相似回路，実験結果を示す。相似回路は水平回路を大文字，鉛直回路を小文字で表わすことにする。なお図中に書き入れてある数字は抵抗値である。

a) (例-1) K-truss

K-truss の各部材寸法ならびに载荷状態は，図-7 a のようである。構造，载荷状態が対称であるから半分の構造について回路を組みばよい。 $S_r=150/AE$  とすれば，回路に挿入される抵抗は，上弦材，下弦材，鉛直材，斜材に対しそれぞれ  $4\Omega, 4\Omega, 3\Omega, 5\Omega$  となる。図-7 b はこの相似回路である。またこの結線の状態を示すと図-8 のようである。

測定は  $S_r=(1/0.24)P$  とし，回路接点 m に電流を流し，各部材に相当する抵抗器の両端の電圧降下及び点 m と格点相当の回路接点間の電圧降下を測ればよい。これを表-1 に示す。この場合，各抵抗を流れる電流に  $(1/0.24)P$  を乗じたものが部材応力を与え，また格点相当の接点までの電圧に  $S_\eta=(1/0.24)P \times (150/AE) = 625(P/AE)$  を乗じたものが格点の撓みを与える。

b) (例-2) Warren truss

この場合の各部材寸法ならびに载荷状態は，図-9 a のようである。 $S_r=200/AE$  とすれば，図-9 b のような

表-1  $S_r = \frac{1}{0.24} P$

部材	抵抗①	電圧②	電流= $\frac{②}{①}$	$S = \frac{②}{①} S_r$	計算値	誤差	%	
上弦材	FI	4Ω	0.310 V	0.07750 A	0.323 P	0.333 P	0.010 P	3.00
	IL	"	0.620	0.15500	0.646	0.667	0.021	3.15
	LN	"	0.940	0.23500	0.979	1.000	0.021	2.10
下弦材	DG	"	0.306	0.07650	0.319	0.333	0.014	4.20
	GJ	"	0.620	0.15500	0.646	0.667	0.021	3.15
	JM	"	0.920	0.23000	0.958	1.000	0.042	4.20
鉛直材	AB	3Ω	0.360	0.12000	0.500	0.500	0	0
	DE	"	0.186	0.06200	0.258	0.250	0.008	3.20
	EF	"	0.182	0.06067	0.253	0.250	0.003	1.20
	GH	"	0.178	0.05933	0.247	0.250	0.003	1.20
	HI	"	0.180	0.06000	0.250	0.250	0	0
	JK	"	0.181	0.06033	0.251	0.250	0.001	0.40
	KL	"	0.180	0.06000	0.250	0.250	0	0
	MN	12Ω	0.355	0.02958	0.123 0.246	0.125 0.250	0.002 0.004	1.60

$$S_\eta = 625 \frac{P}{AE}$$

	電圧	撓み	計算値	誤差	%
D	3.65 V	$2281 \frac{P}{AE}$	$2308 \frac{P}{AE}$	$27 \frac{P}{AE}$	1.17
G	6.78	$4238 \frac{P}{AE}$	$4312 \frac{P}{AE}$	74 "	1.72
J	9.02	$5638 \frac{P}{AE}$	$5746 \frac{P}{AE}$	108 "	1.88
M	10.50	$6563 \frac{P}{AE}$	$6604 \frac{P}{AE}$	41 "	0.62

図-7 (a)

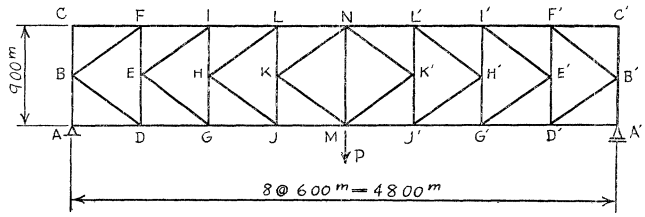


図-7 (b)

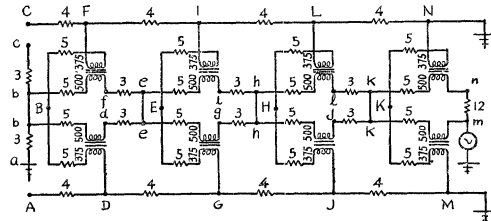


図-8

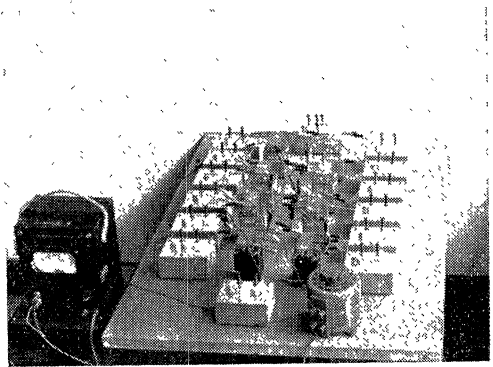


図-9 (a)

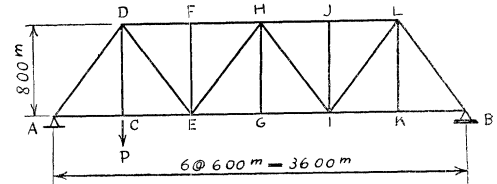
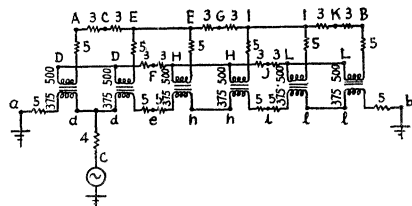


図-9 (b)



相似回路が得られる。測定方法は例-1と全く同じで、Scale factor は  $S_i = (1/0.10)P$ ,  $S_7 = 2000(P/AE)$  である。測定結果を表-2に示す。

図-10 (a)

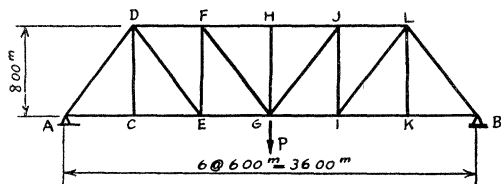


表-2  $S_i = \frac{1}{0.10}P$

部材	抵抗①	電圧②	電流 = $\frac{②}{①}$	$S_i = \frac{②}{①}S_i$	計算値	誤差	%	
下弦材	AC	6Ω	0.370V	0.06167A	0.617P	0.625P	0.008P	1.28
	CE	6	0.220	0.03667	0.367	0.375	0.008	2.13
	EG	6	0.220	0.03667	0.367	0.375	0.008	2.13
	GI	6	0.220	0.03667	0.367	0.375	0.008	2.13
	KB	6	0.075	0.01250	0.125	0.125	0	0
上弦材	DF	6	0.305	0.05083	0.508	0.500	0.008	1.60
	FH	6	0.305	0.05083	0.508	0.500	0.008	1.60
	HJ	6	0.152	0.02533	0.253	0.250	0.003	1.20
	JL	6	0.152	0.02533	0.253	0.250	0.003	1.20
鉛直材	CD	4	0.400	0.10000	1.000	1.000	0	0

$S_7 = 2000 \frac{P}{AE}$

	電圧	撓み	計算値	誤差	%
C	1.57	$3140 \frac{P}{AE}$	$3133 \frac{P}{AE}$	$7 \frac{P}{AE}$	0.22
E	1.26	2520 "	2542 "	22 "	0.87
G	1.14	2280 "	2300 "	20 "	0.87
I	0.87	1740 "	1721 "	19 "	1.10
K	0.45	900 "	917 "	17 "	1.85

図-11 (a)

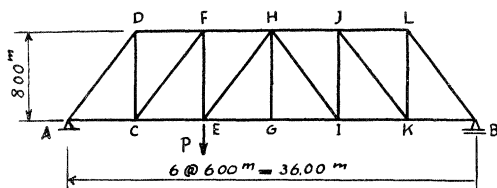


図-11 (b)

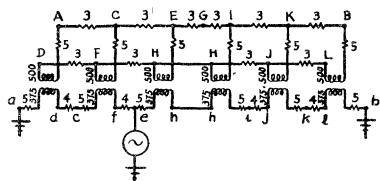
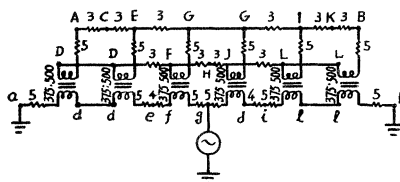


図-10 (b)



c) (例-3) Pratt truss

この場合の各部材寸法ならびに載荷状態は図-10 a のようである。荷重は中央に作用しているが全構造の相似回路を組んだ。これを図-10 b に示す。この場合の Scale factor は,  $S_r = 200/AE$ ,  $S_i = (1/0.10)P$ ,  $S_7 = 2000(P/AE)$  である。

測定結果は表-3 のようである。

d) (例-4) Howe truss

この場合の各部材寸法ならびに載荷状態は, 図-11 a のようである。相似回路を図-11 b に示す。また測定結果は表-4 のようである。

表-3  $S_i = \frac{1}{0.10}P$

部材	抵抗①	電圧②	電流 = $\frac{②}{①}$	$S_i = \frac{②}{①}S_i$	計算値	誤差	%	
下弦材	AC	6Ω	0.222V	0.03700A	0.370P	0.375P	0.005P	1.33
	CE	6	0.222	0.03700	0.370	0.375	0.005	1.33
	EG	3	0.226	0.07533	0.753	0.750	0.003	0.40
	GI	3	0.224	0.07400	0.740	0.750	0.010	1.35
	KB	6	0.224	0.03733	0.373	0.375	0.002	0.53
上弦材	DF	3	0.224	0.07467	0.747	0.750	0.003	0.40
	FH	6	0.665	0.11083	1.108	1.125	0.017	1.51
	HJ	6	0.665	0.11083	1.108	1.125	0.017	1.51
	JL	3	0.222	0.07400	0.740	0.750	0.010	1.35
鉛直材	CD							
	EF	4	0.200	0.05000	0.500	0.500	0	0
	GH							
	IJ	4	0.200	0.05000	0.500	0.500	0	0
	KL							

$S_7 = 2000 \frac{P}{AE}$

	電圧	撓み	計算値	誤差	%
C	1.16V	$2320 \frac{P}{AE}$	$2300 \frac{P}{AE}$	$20 \frac{P}{AE}$	0.87
E	2.15	4300 "	4263 "	37 "	0.87
G	3.00	6000 "	5950 "	50 "	0.84
I	2.14	4280 "	4263 "	17 "	0.40
K	1.15	2300 "	2300 "	0 "	0

表-4  $S_1 = \frac{1}{0.10} P$

部材	抵抗①	電圧②	電流③④	$S_2 = \frac{②}{①} S_1$	計算値	誤差	%	
下弦材	AC	3Ω	0.152 V	0.05067 A	0.507 P	0.500 P	0.007 P	1.40
	CE	〃	0.303	0.10100	1.010	1.000	0.010	1.00
	EG	〃	0.225	0.07500	0.750	0.750	0	0
	GI	〃	0.220	0.07333	0.733	0.750	0.017	2.27
	IK	〃	0.147	0.04900	0.490	0.500	0.010	2.00
	KB	〃	0.074	0.02467	0.247	0.250	0.003	1.20
上弦材	DF	〃	0.151	0.05033	0.503	0.500	0.003	0.60
	FH	〃	0.300	0.10000	1.000	1.000	0	0
	HJ	〃	0.150	0.05000	0.500	0.500	0	0
	JL	〃	0.071	0.02367	0.237	0.250	0.013	5.20
	鉛直材	CD	4	0.268	0.06700	0.670	0.667	0.003
	EF	〃	0.271	0.06775	0.678	0.667	0.011	1.65
	GH	〃						
	IJ	〃	0.135	0.03375	0.338	0.333	0.005	1.50
	KL	〃	0.136	0.03400	0.340	0.333	0.007	2.10

$$S_7 = 2000 \frac{P}{AE}$$

	電圧	撓み	計算値	誤差	%
C	1.48 V	$2960 \frac{P}{AE}$	$2986 \frac{P}{AE}$	$26 \frac{P}{AE}$	0.87
E	2.78	5560 〃	5520 〃	40 〃	0.72
G	2.52	5040 〃	5063 〃	23 〃	0.45
I	1.95	3900 〃	3928 〃	28 〃	0.71
K	1.03	2060 〃	2076 〃	16 〃	0.77

表-5  $S_1 = \frac{1}{0.50} P$

部材	抵抗①	電圧②	電流③④	$S_2 = \frac{②}{①} S_1$	計算値	誤差	%	
下弦材	AC	3Ω	0.800 V	0.26667 A	0.533 P	0.532 P	0.001 P	0.19
	CE	〃	0.800	0.26667	0.533	0.532	0.001	0.19
	EG	〃	0.145	0.04833	0.097	0.096	0.001	1.04
	GI	〃	0.145	0.04833	0.097	0.096	0.001	1.04
	IK	〃	0.091	0.03033	0.061	0.061	0	0
	KB	〃	0.091	0.03033	0.061	0.061	0	0
上弦材	DF	〃	0.475	0.15833	0.317	0.314	0.003	0.96
	FH	〃	0.470	0.15667	0.313	0.314	0.001	0.32
	HJ	〃	0.184	0.06133	0.123	0.121	0.002	1.65
	JL	〃	0.179	0.05967	0.119	0.121	0.002	1.65
	鉛直材	CD	4	2.000	0.50000	1.000	1.000	0

$$S_7 = 400 \frac{P}{AE}$$

	電圧	撓み	計算値	誤差	%
C	6.20 V	$2480 \frac{P}{AE}$	$2494 \frac{P}{AE}$	$14 \frac{P}{AE}$	0.56
E	3.35	1340 〃	1347 〃	7 〃	0.52
G	1.80	720 〃	717 〃	3 〃	0.42
I	0	0	0	0	0
K	0.069	27.6 〃	27 〃	0.6 〃	2.22

e) (例-5) 連続 Warren truss

例-2 に示す Warren truss の格点 I を支承とした構造についてのべる。支点 I を除いては例-2 と全く同じであるから、相似回路もこの点以外は 図-9 b と同じになる。この支点は、相似回路ではただアースするだけでよい。したがって解析計算にくらべて如何に簡単にしかも短時間で応力解析ができるかわかると思う。測定結果は表-5 のようでタワミならびに応力とも相当の精度を示す。

図-12 (a)

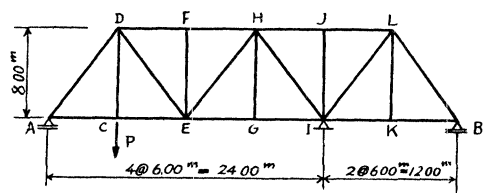
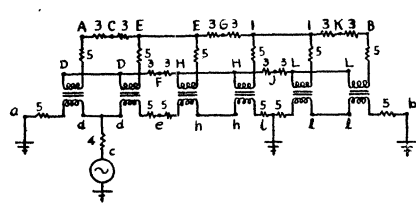


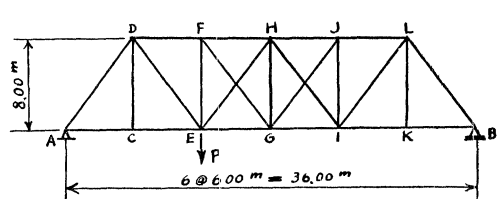
図-12 (b)



f) (例-6) 2次不静定 Pratt truss

図-13 a のような2本の冗材を有する truss を例にとる。この場合も、斜材の数の増加しただけ変成器が余分に増えるが、例-2,3 の場合と同様に、簡単に相似回路を組むことができる。相似回路は図-13 b のようである。測定方法はすべて上記と同じであるから構造が複雑になるほど効力を発揮する。結果を 表-6 に示す。

図-13 (a)



g) (例-7) Schwedler truss

例-1 から 6 まではすべて平行弦トラスについてのべてきたが、曲弦トラスにおいても同様に求めることができる。図-14 a は中央に荷重のかゝる Schwedler truss を示す。構造ならびに載荷状態が対称であるから相似回路は左半分について求めてよい。図-14 b はこれを示す。図中の括弧内の数字は変成器の抵抗を考慮した対角材として回路に入る実抵抗値である。なお、対角材の応力も出しうるように Scale factor  $S_7 = 100/AE$  とした。測定結果は表-7 のようである。

図-13 (b)

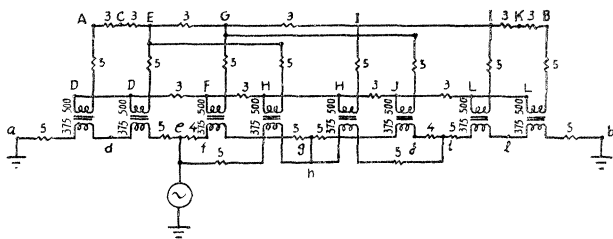


表-6  $S_s = \frac{1}{0.10} P$

		抵抗	実挿入抵抗	測定電圧	電流	応力	計算値	誤差	%
下弦材	AC	3Ω	6Ω	0.299V	0.04983P	0.498P	0.500P	0.002P	0.40
	CE	"	"	"	"	"	"	"	"
	EG	"	3	0.261	0.08700	0.870	0.853	0.017	1.99
	GI	"	3	0.192	0.06400	0.640	0.647	0.007	1.08
	IK	"	"	"	"	"	"	"	"
	KB	"	6	0.152	0.02533	0.253	0.250	0.003	1.20
上弦材	DF	"	3	0.300	0.10000	1.000	1.000	0	0
	FH	"	"	0.272	0.09067	0.907	0.897	0.010	1.12
	HJ	"	"	0.180	0.06000	0.600	0.603	0.003	0.50
	JL	"	"	0.145	0.04833	0.483	0.500	0.017	3.40
鉛直材	CD	4	"	"	"	"	"	"	"
	EF	"	4	0.055	0.01375	0.138	0.138	0	0
	GH	"	"	0	0	0	0	0	0
	IJ	"	"	0.055	0.01375	0.138	0.138	0	0
	KL	"	"	"	"	"	"	"	"

$$S_\eta = 2000 \frac{P}{AE}$$

	電圧	換み	計算値	誤差	%
C	1.24V	$2480 \frac{P}{AE}$	$2455 \frac{P}{AE}$	$25 \frac{P}{AE}$	1.02
E	2.26	4520 "	4459 "	61 "	1.37
G	2.15	4300 "	4263 "	37 "	0.87
I	1.72	3440 "	3391 "	49 "	1.45
K	0.91	1820 "	1808 "	12 "	0.67

h) (例-8) Gerber truss

電気相似法はゲルバートラスにも応用できる。図-15 aのように、点 H にヒンジを有するトラスを例にとる。回路では、このヒンジを如何にするかが問題となるが、この場合には図-15 b のように、FB 間を開いてやれば

図-14 (a)

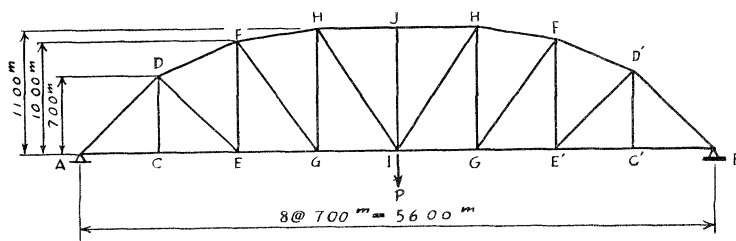




表-8 Scale factor  $S_\eta = \frac{1}{0.15} P$

部材	抵抗	実測 挿入 抵抗	電圧	電流	応力	計算値	誤差	%	
下弦材	AD	3Ω	6Ω	0 V	0 A	0 P	0	0	
	DF	"	"	"	"	"	"	"	
	BJ	"	6	0.520	0.0867	0.577	0.562	0.015	2.7
	JL	"	"	"	"	"	"	"	
	LN	"	6	0.167	0.0278	0.186	0.188	0.002	1.1
	NC	"	"	"	"	"	"	"	
上弦材	EG	"	6	0	0	0	0	0	
	GH	"	"	"	"	"	"	"	
	HI	"	6	0	0	0	0	0	
	IK	"	"	"	"	"	"	"	
	KM	"	6	0.330	0.055	0.367	0.375	0.008	2.1
	MO	"	"	"	"	"	"	"	
鉛直材	ED	4	"	"	"	"	"	"	
	FG	"	"	"	"	"	"	"	
	BI	"	"	"	"	"	"	"	
	JK	4	0.600	0.150	1.000	1.000	0	0	
	LM	"	"	"	"	"	"	"	
	NO	"	"	"	"	"	"	"	

$$\text{Scale factor } S_\eta = \frac{4000}{3} \frac{P}{AE}$$

	電圧	撓み	計算値	誤差	%
D	0.146V	$195 \frac{P}{AE}$	$197 \frac{P}{AE}$	$2 \frac{P}{AE}$	1.0
F	0.291	338 "	394 "	6 "	1.5
H	0.440	587 "	591 "	4 "	0.7
J	1.950	2560 "	2563 "	3 "	0.1
L	1.110	1480 "	1456 "	24 "	1.6
N	0.613	817 "	813 "	4 "	0.5

その応力状態を知ることができる。短時間で解析することができ、しかも得られる解の精度は上記の如く極めてよいから、この相似法は数値解析の困難な問題に大いに利用されよう。

われわれは各種トラスの静的応力の解析を終り、目下動的荷重による、過渡応力状態の実験を行つてゐるが、この結果については次の機会に発表したい。

本研究は文部省科学研究費による研究でありここに附記して感謝の意を表す。また名工大土木工学教室岡林教授、電気工学教室坂田講師にはいろいろ御協力をうけた。ここに記して謝意を表す次第である。

参考文献

- 1) V. Bush : "Structural Analysis by Electric Circuit Analogies" Journal, The Franklin Institute, vol. 217, March, 1934.
- 2) G. Kron : "Tensor Analysis and Equivalent Circuits of Elastic Structures" Journal, The Franklin Institute, vol. 238, December, 1944.
- 3) 横山悌次 : 「トラス構造の電気的解法としての一考察」  
日本建築学会報告 9号 昭和25年11月  
" 12号 昭和26年6月  
" 14号 昭和26年11月
- 4) L. Ryder : "Electrical Analysis of Statically Loaded Structures" Proceedings A.S.C.E. vol. 79, Sep. No. 376, December, 1953.

(昭30.10.24)