

運動エネルギーの分配に関する法則

正 員 小 野 一 良*

要 旨 種々の構造物に関してその基準振動の形を求める方法は従来多く発表されているが、この振動振幅は外力の性質ならびに初期条件によつて異なり、かつその計算が煩雑なるためあまり求められていない。本文においては Lagrange の運動方程式をいくらか変形して一つの公式を導いたが、この公式を使えば構造物が衝撃を受けたときに、この構造物に発生する各種の運動についてその運動速度または振動振幅を容易に決定できる。この公式に重畳の原理を適用することによつて種種の型式の外力が作用する場合にも拡張することができる。

1. 運動エネルギーの分配に関する法則

静止せる体系に P なる衝撃を加えたときにこの体系は B_1, B_2, \dots なる運動を始めたとする。 B_1, B_2, \dots がたがい直交をなす運動であるときにはこれらの運動の持つエネルギーをそれぞれ T_1, T_2, \dots とし、またこれらの運動において衝撃の作用点が衝撃の方向に有する初速度を V_1, V_2, \dots とする。しかるときには次の関係が成立する。

$$\frac{2T_1}{V_1} = \frac{2T_2}{V_2} = \dots = P \dots \dots \dots (1.1)$$

ここに P の単位は“力×時間”または“質量×速度”によつてあらわされたものとなし、その作用時間は非常に短かく、その間におけるポテンシャルの変化を無視できるとする。また、たがい直交をなす運動とはこのなかの任意の数コの運動が同時に発生している場合にこの運動の持つ全エネルギーがおのおの運動が単独に発生している場合におのおの運動の持つエネルギーの和に等しい場合をいう。この運動のなかには並進運動、回転運動、振動のいずれを含んでいても差支えない。

衝撃の作用点に質量 M が集中して存在するときには P なる衝撃によつて生ずる運動の全エネルギー ΣT および衝撃の作用点が衝撃の方向に有する初速度 ΣV は次式によつて与えられる。

$$\Sigma T = \frac{P^2}{2M} \dots \dots \dots (1.2)$$

$$\Sigma V = \frac{P}{M} \dots \dots \dots (1.3)$$

(1.1), (1.2), (1.3) 式を組合わせれば、

$$\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2} = \dots = \frac{\Sigma T}{\Sigma V} \dots \dots \dots (1.4)$$

上式によれば静止せる体系に衝撃が作用して、各種の運動を発生したときに運動の全エネルギーがおのおのの運動に分配される割合は おのおのの運動において 衝撃の作用点、衝撃の方向に持つ初速度に比例することを示している。

上述の法則は静止せる体系に 1 コの衝撃が作用した場合であるが、これを次のように拡張することができる。すでに運動中の体系に衝撃が作用した場合に対してはこの衝撃の作用時にこの体系が一時静止したものと運動を解き、もとの運動に加えればよい。また作用点および作用時の異なる 2 コ以上の衝撃が作用した場合を解くにはおのおの衝撃が単独に静止せる体系に作用したとしてこの体系の運動を解き、最後にこれらの運動を合成すればよい。大きさの変化する力がある時間継続して作用する場合にも、これを多数の衝撃が短い時間間隔をもつて作用したと考えれば上記の公式を適用することができる。しかしこれは一般的に証明することはできず、単振動をなす体系に限ることに注意を払う要がある。

2. 証明

n コの自由度を持つ質点系について各質点の質量を m_1, m_2, \dots とし、これらの質点の変位を一般座標 q_1, q_2, \dots, q_n であらわせば

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1.5)$$

$$i = 1, 2, \dots$$

質点 m_1 が x_1, y_1, z_1 なる 3 方向の変位を生じ得る場合には $m_1 = m_2 = m_3$ なる 3 コの質点それぞれ $x_1, x_2 = y_1, x_3 = z_1$ なる変位をなす場合におきかえて考えることができる。以下同様とする。

質点 m_i の運動速度は

* 工学博士、金沢大学教授、工学部土木教室

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial x_i}{\partial t} \dots \dots \dots (1.6)$$

この質点系の運動エネルギー T は次式であらわされる。

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2 \dots \dots \dots (1.7)$$

質点 m_i に x_i の方向に作用する衝撃の大きさを P_i とする。一般座標 q_r の方向に作用する衝撃 Q_r を次式によつて定義する。

$$Q_r = \sum_i P_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dots \dots \dots (1.8)$$

しかるときは次の関係が成立する¹⁾。

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right)_0 = Q_r \dots \dots \dots (1.9)$$

上式において $\partial T / \partial \dot{q}_r$ は衝撃の作用直後における値とし、添字 0 をつけたものは衝撃の作用直前における値とする。以下同様とする。

(1.5) 式において x_i に t を含まないときには運動エネルギーは次式によつてよつてあらわすことができる。

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s} g_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s \dots \dots \dots (1.10)$$

ただし

$$g_{rs} = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dots \dots \dots (1.11)$$

一般座標を $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ がたがいに直交をなすように選ぶときには

$$r \neq s \text{ のとき } g_{rs} = 0 \dots \dots \dots (1.12)$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} \sum_r g_{rr} \dot{q}_r^2 \dots \dots \dots (1.13)$$

上式を (1.9) 式に代入すれば

$$g_{rr} (\dot{q}_r - \dot{q}_{r0}) = Q_r \dots \dots \dots (1.14)$$

上式の左右両辺に $(\dot{q}_r - \dot{q}_{r0})$ を乗ずれば

$$g_{rr} (\dot{q}_r - \dot{q}_{r0})^2 = Q_r (\dot{q}_r - \dot{q}_{r0}) \dots \dots \dots (1.15)$$

m_k なる質点に P_k なる衝撃が作用し、その他の質点に作用する衝撃を 0 とすれば (1.8) 式により

$$Q_r = P_k \frac{\partial x_k}{\partial q_r} \dots \dots \dots (1.16)$$

上式を (1.15) 式に代入し、かつ

$$\frac{\partial x_k}{\partial q_r} \dot{q}_r = \dot{x}_{kr} \dots \dots \dots (1.17)$$

とおけば $g_{rr} (\dot{q}_r - \dot{q}_{r0})^2 = P_k (\dot{x}_{kr} - \dot{x}_{kr0}) \dots \dots \dots (1.18)$

上式において \dot{x}_{kr} または \dot{x}_{kr0} はそれぞれ P_k なる衝撃の作用直後または作用直前において m_k なる質点の一般座標 q_r の変化によつて生ずる速度である。特に、 $\dot{q}_{r0} = 0$ とおけば、 $\dot{x}_{kr0} = 0$ となり、(1.18) 式は次式のごとく書き換えられる。

$$2 T_r = P_k \dot{x}_{kr} \dots \dots \dots (1.19)$$

ただし上式において

$$T_r = \frac{1}{2} g_{rr} \dot{q}_r^2 \dots \dots \dots (1.20)$$

であり、これは一般座標 q_r の変化によつて生ずる運動エネルギーである。以上の考察によつて (1.1) 式が証明された。

衝撃の作用前においてすでに \dot{q}_{r0} なる運動をなしているときには衝撃によつて増加した速度すなわち $\dot{q}_r - \dot{q}_{r0}$ に関して上記の法則を適用できることを (1.18) 式は示している。したがつて多数の質点に作用時を異にして多数の衝撃が作用する場合にも拡張することができる。これは重畳の原理であるが、次に力が衝撃として作用せず継続して作用する場合にも重畳の原理が適用できるかいなかを検討する。

一般座標 q_r に関する Lagrange の運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = K_r(t) - \frac{\partial U}{\partial q_r} \dots \dots \dots (1.21)$$

上式の右辺は q_r なる一般座標に関する一般力であり、この中で $-\partial U/\partial q_r$ はポテンシャル U より導かれた力とする。 q_r を基準座標とするときこの平衡点附近の振動を解くために次の2式が成立する場合を考察する。

$$\frac{\partial T}{\partial q_r} = 0 \dots\dots\dots (1.22)$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_r} = C_r q_r \dots\dots\dots (1.23)$$

上式における C_r は常数とする。(1.13), (1.22) および (1.23) 式を用いて (1.21) 式を書き直せば

$$g_{rr}\ddot{q}_r = K_r(t) - C_r q_r \dots\dots\dots (1.24)$$

上式を $t=0$ のとき $q_r=0, \dot{q}_r=0$ なる初期条件のもとに解けば次式が得られる²⁾。

$$q_r = \frac{1}{g_{rr}\omega_r} \int_0^t K_r(\tau) \sin \omega_r(t-\tau) d\tau \dots\dots\dots (1.25)$$

ただし $\omega_r = \sqrt{\frac{C_r}{g_{rr}}} \dots\dots\dots (1.26)$

$K_r(t)$ の代りに $t=0$ において Q_r なる衝撃が作用するときには

$$q_r = -\frac{Q_r}{g_{rr}\omega_r} \sin \omega_r t \dots\dots\dots (1.27)$$

(1.27) 式に重ねの原理を適用すれば (1.25) 式が誘導され、したがってこのときには重ねの原理が成立している。

(1.1), (1.9), (1.27) 式はいずれも質点系に衝撃が作用したときに質点系に生ずる基準振動の振幅を決定する公式であつて、その内容には本質的の差はないが、(1.1) 式が最も扱い易い形で示されている。

以上で証明を終つたが、次にこれに関連した法則を誘導する。(1.14) 式の左右両辺に $(\dot{q}_r + \dot{q}_{r0})$ を乗ずれば

$$g_{rr}(\dot{q}_r^2 - \dot{q}_{r0}^2) = P_k(\dot{x}_{kr} + \dot{x}_{kr0}) \dots\dots\dots (1.28)$$

(1.20) 式を用いて上式を書き直せば

$$T_r - T_{r0} = \frac{1}{2} P_k(\dot{x}_{kr} + \dot{x}_{kr0}) \dots\dots\dots (1.29)$$

上式によれば P_k なる衝撃が作用した場合に q_r なる一般座標上における運動エネルギーの増加は衝撃の大きさと衝撃の前後における衝撃の作用点における速度の平均値との積に等しいことを示している³⁾。

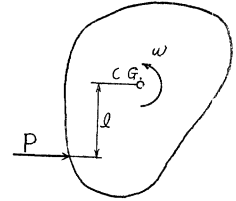
3. 適用例

ここには簡単な適用例を述べる。この中には特にこの法則を使わなくても解けるものがあるが、この法則の適用方法を示したものである。

(i) 並進運動と回転運動を生ずる場合

静止せる剛体に P なる衝撃を加えたときの運動を論ずる。剛体の質量を M とする。剛体の重心を通り、この重心と P とを含む平面に直角な軸のまわりの慣性率を I とする。また剛体の重心から P までの距離を l とする。衝撃によつて剛体は並進運動 B_1 と重心を通る軸のまわりの回転運動 B_2 とを生ずる。 B_1 と B_2 とがたがいに直交をなす運動であることは簡単に証明できる。

図一 剛体に衝撃を加えた場合



B_1 および B_2 における P の作用点の P の方向における初速度をそれぞれ、 V_1, V_2 とし、また B_1 および B_2 の運動エネルギーをそれぞれ T_1, T_2 とすればこれらは次式によつて計算できる。

$$2T_1 = MV_1^2 \dots\dots\dots (2.1)$$

$$2T_2 = I\omega^2 \dots\dots\dots (2.2)$$

ただし $\omega = V_2/l$

さきの法則によつて

$$\frac{2T_1}{V_1} = \frac{2T_2}{V_2} = P \dots\dots\dots (2.3)$$

これより $V_1 = \frac{P}{M}, \omega = \frac{Pl}{I} \dots\dots\dots (2.4)$

が求められる。

(ii) 並進運動と2種の基準振動を生ずる場合

図-2 に示すごとく3コの質量 m_0, m_2, m_4 がばね常数 k_1, k_3 を有する2コのばねで連結されている体系において m_0 に P なる衝撃を加えた場合を論ずる。 m_0, m_2, m_4 の変位をそれぞれ x_0, x_2, x_4 とする。 $t=0$ のときこれらの変位がすべて0となる条件のもとに m_0, m_2, m_4 の運動を解けば次式に示す2種類の解が得られる。

$$x_0 = x_2 = x_4 = At \dots\dots\dots (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= C \alpha (\beta - \omega^2) \sin \omega t, & x_2 &= C (\alpha - \omega^2) (\beta - \omega^2) \sin \omega t \\ x_4 &= C \beta (\alpha - \omega^2) \sin \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2)$$

ただしここに $\alpha = \frac{gk_1}{m_0}, \beta = \frac{gk_3}{m_4} \dots\dots\dots (3.3)$

$$m_0 \alpha (\beta - \omega^2) + m_2 (\alpha - \omega^2) (\beta - \omega^2) + m_4 \beta (\alpha - \omega^2) = 0 \dots\dots\dots (3.4)$$

(3.4) 式を解けば ω^2 が正の実数として2コ定まるが、これらの ω の値を(3.2)式に代入すれば2組の解が得られる。ここに得られた3コの解はたがいに直交をすることは容易に証明できる。

(3.1) 式に示す運動の持つエネルギーを T_1 とすれば、

$$2T_1 = (m_0 + m_2 + m_4) A^2 \dots\dots\dots (3.5)$$

P なる衝撃は m_0 に加えられ、 m_0 の初速度 V_1 は A となるので(1.1)式により

$$\frac{2T_1}{V_1} = \frac{(m_0 + m_2 + m_4) A^2}{A} = P \dots\dots\dots (3.6)$$

上式より $A = \frac{P}{m_0 + m_2 + m_4} \dots\dots\dots (3.7)$

次に(3.2)式に示す運動の持つエネルギーを T_2 とすれば

$$2T_2 = C^2 \omega^2 \{ m_0 \alpha^2 (\beta - \omega^2)^2 + m_2 (\alpha - \omega^2)^2 (\beta - \omega^2)^2 + m_4 \beta^2 (\alpha - \omega^2)^2 \} \dots\dots\dots (3.8)$$

また衝撃の作用点における初速度を V_2 とすれば、

$$V_2 = C \omega \alpha (\beta - \omega^2) \dots\dots\dots (3.9)$$

これらの式を(1.1)式に代入して C が求められる。

(iii) 無限に多数の基準振動を生ずる場合

一例として単純バリの中央に質量 M があるときハリの質量も考慮に入れて振動を解く。ハリのコワさを EJ とし、ハリの単位長さの質量を ρ とし、ハリのタワミを y とすれば次の微分方程式が成立つ。

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (4.1)$$

ハリの中央を原点に選び、 $x \leq 0$ における y を y_1 とし、 $x \geq 0$ における y を y_2 とする。境界条件として次式

$$x = \pm l \text{ において } y = 0, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

$$x = 0 \text{ において } y_1 = y_2,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial x}, & \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}, & EJ \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} - EJ \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} &= \frac{M}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.2)$$

を満足し、かつ初期条件として $t=0$ のとき $y=0$ となる解を求めれば次の2群の振動が得られる。

第I群の振動

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A_n \left\{ \frac{\sin \lambda_n (l+x)}{\cos \lambda_n l} - \frac{\sinh \lambda_n (l+x)}{\cosh \lambda_n l} \right\} \sin \omega_n t \\ y_2 &= A_n \left\{ \frac{\sin \lambda_n (l-x)}{\cos \lambda_n l} - \frac{\sinh \lambda_n (l-x)}{\cosh \lambda_n l} \right\} \sin \omega_n t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.3)$$

ただし $\omega_n = \sqrt{\frac{EJg}{\rho}} \lambda_n^2 \dots\dots\dots (4.4)$

$$n = 0, 1, 2, \dots\dots\dots$$

また λ_n は次式によつて求められる正の実数であつて $n\pi$ と $(n+0.5)\pi$ との間にある値とする。

$$M \lambda_n (\tan \lambda_n l - \tanh \lambda_n l) = 4 \rho \dots\dots\dots (4.5)$$

図-2 3コの質量を2コのパネで連結した場合

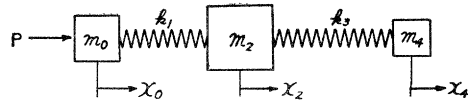
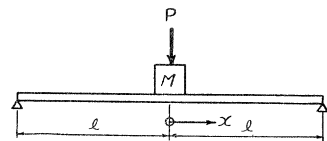


図-3 単純バリの中央に質量のある場合



第 II 群の振動

$$y = C_n \sin \frac{n \pi x}{l} \sin \psi_n t \dots\dots\dots(4.6)$$

ただし $\psi_n = \sqrt{\frac{EJg}{\rho}} \left(\frac{n \pi}{l} \right)^2 \dots\dots\dots(4.7)$
 $n = 1, 2, \dots\dots\dots$

第 I 群の解は原点を中心として x につき偶函数となり、第 II 群の解は原点を中心として奇函数となる。第 I 群の解と第 II 群の解との相互の間または、一方の群の中でも n の異なる 2 種の解の間では直交の関係が満足されることは容易に証明できる。

次に $t=0$ において質量 M に P なる衝撃が加えられたときこのハりに生ずる振動を計算する。 P は y の正の方向に作用するものとする。第 I 群の振動において $n=0, 1, 2, \dots$ に対する振動のエネルギーをそれぞれ T_0, T_1, T_2, \dots とし、質量 M がおのおのの振動において有する初速度を V_0, V_1, V_2, \dots とする。しかるときは

$$V_n = A_n \omega_n \frac{4 \rho}{M \lambda_n} \dots\dots\dots(4.8)$$

$$2 T_n = M \left(A_n \omega_n \frac{4 \rho}{M \lambda_n} \right)^2 + 2 \int_0^l \rho (A_n \omega_n)^2 \left(\frac{\sin \lambda_n x}{\cos \lambda_n l} - \frac{\sinh \lambda_n x}{\cosh \lambda_n l} \right)^2 dx \dots\dots\dots(4.9)$$

上の 2 式を (1.1) 式に代入して A_n を求めれば

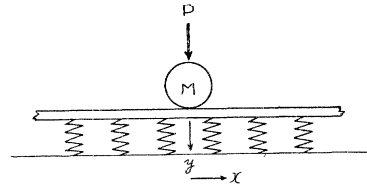
$$A_n = \frac{4 \sqrt{\rho} P}{\sqrt{EJg} \lambda_n \{ 4 \rho + M \lambda_n^2 l (\tan^2 \lambda_n l + \tanh^2 \lambda_n l) \}} \dots\dots\dots(4.10)$$

第 II 群の振動においては衝撃の作用点の初速度はすべて 0 となるので P が有限であれば (1.1) 式によつて T_n もまた 0 となる要がある。したがつて第 II 群の振動は全然生じないことがわかる。

4. 弾性床上的のハリ

振動数が連続的に変化する無限に多数の基準振動を生ずる 場合の例として弾性床にある長さ無限のハリの 1 点に質量 M があるときハリの質量も考慮に入れてその振動を解く。この模型は弾性床の質量が考慮に入れてないと云う欠点はあるが、鉄道線路に生ずる振動を解く方法として多くの人に採用されている。しかし M に振動荷重が加わる場合の解は容易に得られるが、 M に衝撃が加わる場合の解は困難である。しかし本論文に紹介した法則を使えば簡単に解くことができる。

図—4 弾性床上的のハリ



(i) 弾性床上的のハリに衝撃が作用する場合

ハリのコワさを EJ とし、ハリの単位長さ当りの質量を ρ とし、弾性床のばね常数を単位長さ当り K とすればハリのタワミ y に関して次の微分方程式が成立する。

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ky = 0 \dots\dots\dots(5.1)$$

質量 M の位置を原点を選び、 $x \leq 0$ における y を y_1 とし、 $x \geq 0$ における y を y_2 とする。境界条件として (4.2) 式および次の条件

$$x \rightarrow \pm \infty \text{ において } y \neq \infty$$

を満足し、かつ初期条件として $t=0$ のとき $y=0$ となる解として次の 3 種類の振動が求められる。

第 I 群の振動

これは x について偶函数となる。

$$y = Af(\kappa x) \sin \omega_0 t \dots\dots\dots(5.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ただし } \xi \leq 0 \text{ のとき } f(\xi) = \exp(\xi) (\cos \xi - \sin \xi) \\ \xi \geq 0 \text{ のとき } f(\xi) = \exp(-\xi) (\cos \xi + \sin \xi) \end{array} \right\} \dots\dots\dots(5.3)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8EJg}{M}} \kappa^2 = \sqrt{\frac{g}{\rho} (K - 4EJ\kappa^4)} \dots\dots\dots(5.4)$$

また κ は次式を解いて得られる正の実数とする。

$$\kappa^4 + \frac{2\rho}{M} \kappa^3 = \frac{K}{4EJ} \dots\dots\dots(5.5)$$

上式より得られる κ は 1 コに限るので第 I 群の振動は 1 種類に限られる。

第II群の振動

これは x について偶函数となる。

$$y = CF(\lambda, x) \sin \omega t \dots\dots\dots (5.6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ただし } x \leq 0 \text{ のとき } F(\lambda, x) = -\exp(\lambda x) + (1+\varphi) \cos \lambda x + \sin \lambda x \\ x \geq 0 \text{ のとき } F(\lambda, x) = -\exp(-\lambda x) + (1+\varphi) \cos \lambda x - \sin \lambda x \end{array} \right\} \dots\dots\dots (5.7)$$

$$\text{ここに } \varphi = \frac{4EJ\rho\lambda^3}{M(K+EJ\lambda^4)} \dots\dots\dots (5.8)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\rho}(K+EJ\lambda^4)} \dots\dots\dots (5.9)$$

λ は任意に選び得る正の実数とする。(5.9)式によれば ω の最小値は $\sqrt{gK/\rho}$ となり、したがって上式による ω が (5.4) 式による ω_0 と一致する値をとることはない。

第III群の振動

これは x について奇函数となる。

$$y = D \sin \lambda x \sin \omega t \dots\dots\dots (5.10)$$

上式における ω と λ との関係は (5.9) 式により示される。

(5.6) および (5.10) 式において λ は任意に選ぶうる正の実数であるから第II群, 第III群には無限に多くの解が含まれている。

これら3群の振動はたがいに直交をなすこと, また同一群の中でも λ の異なる2種の振動はたがいに直交をなすことは容易に証明することができる。ただし第II群に所属する振動がたがいに直交をなすことを証明するときには (5.7) 式に示すままの形では x による積分値が不定となるので次に示す極限值を使う必要がある。

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 0 \text{ のとき } F(\lambda, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp(\varepsilon x) \{-\exp(\lambda x) + (1+\varphi) \cos \lambda x + \sin \lambda x\} \\ x \geq 0 \text{ のとき } F(\lambda, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp(-\varepsilon x) \{-\exp(-\lambda x) + (1+\varphi) \cos \lambda x - \sin \lambda x\} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (5.11)$$

ただし $\varepsilon > 0$

第III群に所属する振動に対しても同様な方法で極限值を求める必要がある。

次にその振動についてその振幅を求めることとし, ハリが静止の状態にあるとき質量 M に P なる衝撃を加えた場合を考察する。 P の正の方向は y の正の方向と一致するとす。

第I群の振動の運動エネルギー T_0 を計算すれば

$$2T_0 = (M+m)(A\omega_0)^2 \dots\dots\dots (5.12)$$

$$\text{ただし } m = \frac{3\rho}{2\pi} \dots\dots\dots (5.13)$$

衝撃の作用点の初速度 V_0 は

$$V_0 = A\omega_0 \dots\dots\dots (5.14)$$

これらの値を (1.1) 式に代入すれば次式によつて振幅が求められる。

$$A = \frac{P}{(M+m)\omega_0} \dots\dots\dots (5.15)$$

第II群の振動においては任意の λ を選び, 運動のエネルギー T および衝撃の作用点における初速度 V を計算すれば,

$$2T = (C\omega)^2 \times \infty, \quad V = C\omega\varphi$$

となる。よつて P が有限のときには $C=0$ となる。したがつて第II群としては一定の λ または一定の振動数を持つ振動は発生しない。しかし振動数が連続的に変化する無限に多数の振動を合成した運動は発生する可能性があり, (5.6) 式において C を λ の函数として書き直せば

$$y = \int_0^\infty C(\lambda) F(\lambda, x) \sin \omega t d\lambda \dots\dots\dots (5.16)$$

上式の中で λ の値が $\lambda_0 - \Delta\lambda$ と $\lambda_0 + \Delta\lambda$ との間にある振動について運動エネルギー T を求めるには

$$2T = M \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} \{\varphi\phi(\lambda)\}^2 d\lambda + \int_{-\infty}^\infty \rho \left\{ \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} \phi(\lambda) F(\lambda, x) d\lambda \right\}^2 dx \dots\dots\dots (5.17)$$

ただし上式において

$$\phi(\lambda) = \omega C(\lambda) \dots\dots\dots (5.18)$$

(5.17) 式右辺第2項の計算を行うには積分の順序を変更し x による積分を先に行い, かつ (5.11) 式および

次式に示す極限值を利用する。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} \frac{2\epsilon G(\lambda, \mu)}{4\epsilon^2 + (\lambda - \mu)^2} d\lambda d\mu = \pi G(\lambda_0, \lambda_0) 2\Delta\lambda \dots \dots \dots (5.19)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} \frac{(\lambda - \mu)^2 H(\lambda, \mu)}{4\epsilon^2 + (\lambda - \mu)^2} d\lambda d\mu = H(\lambda_0, \lambda_0) (2\Delta\lambda)^2 \dots \dots \dots (5.20)$$

上式における $G(\lambda, \mu)$ および $H(\lambda, \mu)$ は変数 λ, μ を含む函数であつて、これらの函数は上記の変域内では急激な変化はないものとする。このようにして計算を行つた結果によれば⁴⁾

$$2T = \pi\rho\{1 + (1 + \varphi_0)^2\}\{\Phi(\lambda_0)\}^2 2\Delta\lambda \dots \dots \dots (5.21)$$

ただし上式における φ_0 は (5.8) 式右辺の λ に λ_0 とおいた値とする。次に λ が $\lambda_0 - \Delta\lambda$ と $\lambda_0 + \Delta\lambda$ との間にある振動について衝撃の作用点における初速度 V を求めれば

$$V = \varphi_0 \Phi(\lambda_0) 2\Delta\lambda \dots \dots \dots (5.22)$$

これらの式を (1.1) 式に代入して $\Phi(\lambda_0)$ を求める。 λ_0 は任意の正実数として選ぶことができるので λ_0 の代りに λ とおけば

$$\Phi(\lambda) = \frac{P}{\pi\rho} \frac{\varphi}{1 + (1 + \varphi)^2} \dots \dots \dots (5.23)$$

(5.18) 式により

$$C(\lambda) = \frac{P}{\pi\rho} \frac{\varphi}{\omega\{1 + (1 + \varphi)^2\}} \dots \dots \dots (5.24)$$

上の2式において φ, ω は λ の函数であり、(5.8) および (5.9) 式によつて計算される。この $C(\lambda)$ を (5.16) 式に代入すれば第II群の振動の振幅が決定されたことになる。しかしここで注意を要するのはこのようにして求めた第II群の振動は式の上で振動の形をしているというだけで実際には t の増加に伴い y は一度最大値に達した後 0 に漸近する。しかして運動のエネルギーは時間とともに段々広い範囲に拡がるので原点を含む有限の範囲内に含まれる運動のエネルギーは 0 に近づく。したがつて振動とよぶことは適当でない。

また (5.6) 式には $\cos \lambda x$ または $\sin \lambda x$ と $\sin \omega t$ との積が含まれているのでこれを ω/λ および $-\omega/\lambda$ なる伝播速度をもつ波動の形に書きかえることができる。しかし一定の伝播速度に対して有限の振幅は定まらないので第II群の振動を波動とよぶことも適当でない。よつてこのような運動を仮にエネルギーの拡散とよんで振動または波動と区別する要がある。

最後に第III群の振動の振幅を計算すれば式の上から見て衝撃の作用点すなわち $x=0$ における初速度が常に 0 となるので運動のエネルギーも 0 となることを要し、したがつて振動を発生しないことになる。

以上の計算によつてすべての解が得られたのでこれらの解を合計すれば任意の点の任意の時間における運動が決定される。第I群の振動の有する運動エネルギーと全体の運動エネルギーとの比は (1.3), (1.4), (5.14), (5.15) 式によつて

$$\frac{T_0}{\Sigma T} = \frac{V_0}{\Sigma V} = \frac{M}{M+m} \dots \dots \dots (5.25)$$

となる。一般に m は M に較べてはるかに小さいので第I群の振動だけを求めれば衝撃を受けた後の運動の概要を知ることができる。

(ii) 弾性床上のハりに急に荷重をおいた場合⁵⁾

弾性床にあるハりに質量 M なる荷重を急ににおいた場合にこのハりに発生する運動を解く。この場合は前節の問題において質量 M に $d\tau$ 秒間隔に $gM d\tau$ なる衝撃が加えられたとみなすことができるので前問題の P の代りに $gMd\tau$ とおき、 t の代りに $t-\tau$ とおいて τ について積分すればよい。積分の範囲は荷重をおいたときから t までとする。荷重をハリにおいてから t 秒後におけるハリのタワミのなかで第I群の振動によるものは次式によつて計算される。

$$y = \int_0^t \frac{gM}{(M+m)\omega_0} f(\kappa x) \sin \omega_0(t-\tau) d\tau = \frac{gM}{(M+m)\omega_0^2} f(\kappa x) (1 - \cos \omega_0 t) \dots \dots \dots (5.26)$$

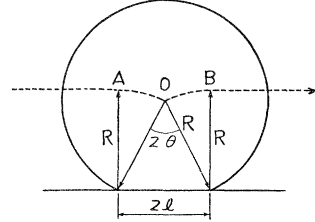
上式には $1 - \cos \omega_0 t$ なる項が含まれているが、このなかで 1 は静的のタワミをあらわし、 $\cos \omega_0 t$ は振動の項をあらわす。同様にして第II群の解についても P の代りに $gMd\tau$ とおいて積分を行えば静的のタワミの項とエネルギーの拡散の項よりなる解が得られる。

(iii) 車輪踏面の平坦部によつてレールに生ずる衝撃

レールを弾性床のハリと考え、弾性床の質量を無視すれば上記の方法を用いてレールの運動を解くことがで

きる。車輪踏面に平坦部があるとき車軸中心の軌跡は図-5に示す点線の如くなる。ばね上重量の影響を無視して車輪の重量を M とし、走行速度を v とすれば AO および OB 間においてレールは $-Mv^2/R$ なる力を受け、O 点において $2Mv\theta$ なる衝撃を受ける。車軸中心が O 点に達するときを $t=0$ として車輪の平坦部通過後にレールに生ずる第 I 群の振動を求めれば

図-5 車輪踏面に平坦部のある場合



$t \geq l/v$ のとき

$$y = \frac{2Mv^2}{(M+m)R\omega_0^2} \left(\frac{l\omega_0}{v} - \sin \frac{l\omega_0}{v} \right) f(\kappa x) \sin \omega_0 t \dots \dots (5.27)$$

上式を導くに当つては境界条件を考慮するとき車軸中心の位置を $x=0$ とした。したがつて x は車軸とともにハリの長さ方向に移動する座標となる。しかるに、(5.1) 式の x はバリに対して固定した座標であるからこの微分方程式から導いた式を移動荷重の場合に適用することに矛盾が含まれる。しかしこの点を吟味した結果によれば次の条件

$$\rho v \ll M\omega_0 \dots \dots \dots (5.28)$$

が満足される限りこのような略算を行つても差支えないことが判明した。

終りに本論文に関して岡本舜三博士より御教示を受けたことを記し、ここに厚く感謝する。

参考文献その他

- 1) Whittaker : Analytical Dynamics (fourth edition), § 35 Impulsive motion.
Handbuch der Physik, Band V, Die Prinzipie der Dynamik, 14. Reibungs-und Stosskräfte.
- 2) 山内恭彦 : 一般力学, 第2篇第3章 § 41 外力が働く場合の振動 (41.5) 式参照
S. Timoshenko : Schwingungsprobleme der Technik, IV Schwingungen elastischer Körper.
または 谷下市松訳 : 工業振動学, 第VI章 弾性体の振動 によれば棒またはハリの振動に関して (1.25) 式を導き、種々の型式の外力が作用する場合について K_r を計算し、これより基準振動の振幅を求めている。
- 3) 上記の Whittaker の著書の 49 ページには直角座標を用いた場合に 1 コの質点に関してこの法則を導き、次にこれを質点系の全質点について合計した場合にも成立することが述べられている。
- 4) (5.21) 式の右辺には $(4\lambda)^2$ の項が含まれていないが、これは省略したのではなくて計算の結果 $(4\lambda)^2$ の項の係数が 0 となつたのである。
- 5) 穂坂 衛 : レールの動力学的問題の研究, 9. 急に質量 m の物体がのつた場合, 機械学会論文集 第15巻 50号 にはこれと同一の問題の解が \sqrt{t} のベキ級数の形で示されている。

(昭.30.10.17)