

# 平行四辺形板の曲げについて

准員 小松 定夫\*

**要旨** 本文は周辺固定あるいは、周辺単純支持された平行四辺形板が等分布荷重ならびに集中荷重を受けて曲げられた場合の解を複素函数形で与えたものである。若干の数値計算例を S. Timoshenko および W. Fuchssteiner の結果と比較したが満足すべきものである。

## 1. 緒言

既設橋梁には斜橋がかなりあつて、構造力学の立場から考えて平行四辺形板の曲げの問題は相当重要である。現在までのところでは平行四辺形板の解は大別して2つの考え方で得られている。1つは H. Favre<sup>1)</sup>, P. Lardy<sup>2)</sup>, J. Krettner<sup>3)</sup> が行つたように斜交座標を用いることである。この場合には  $\partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2$ ,  $\partial^4 w / \partial x \partial y^3$  の項がタワミの微分方程式に入り込んでくるため、境界条件および荷重状態に適合するような解式をうることは困難である。

一方 P. Rongved<sup>4)</sup>, W. Fuchssteiner<sup>5)</sup> のように、直角座標を用いるとすれば、微分方程式には周知の形のものを使えるけれども、斜辺における境界条件を厳密に満足させることが難しい。したがつて最小自乗法、階差法などの近似計算によらねばならない。

本文では等角写像により境界を単純な円周に帰着させる方法を採用する。その概念は N. Muschelišvili<sup>6)</sup> が2次元応力問題に使つたものに基礎をおいている。ただ曲げの問題においては基礎微分方程式が非斉次であるため、それに対する処置を施す必要がある。尙集中荷重に対しては未だ解が与えられていないように思われるので、Green 函数を利用した解がえられたことは一つの収穫だといふ。

## 2. 写像函数の誘導

与えられた平行四辺形が占有する面分を  $z$  平面上の単一連結領域と考える。一般に  $t$  平面内の実軸の上半面を  $n$  多角形領域に写像する函数は周知のように Schwarz-Christoffel の変換公式によつて与えられる。すなわち  $B_1$ ,  $B_2$  を未定常数として

$$z = B_1 \int_0^t \prod_{v=1}^n (t - a_v)^{-\alpha_v} dt + B_2$$

今  $z$  平面上に図-1 のような形状、寸法を有する平行四辺形を考える。その4頂点 A, B, C, D をそれぞれ  $t$  平面実軸上の4点 a, b, c, d に対応させる変換をとる。これら4つの点の中で3つの点は任意に選べるが、他の1点は四辺形の形状、大きさによつて、自然に決るべきものである。そこで a, c, d の3点をそれぞれ  $t=1, t=\infty, t=0$  と指定し、他の1点 b は  $t=1/r$  とする。この  $r$  の値を平行四辺形の所与の条件から定めて b 点の位置を確定しようとした。図-1 に対し変換式は次のようになる。

$$Z = B_1 \int_0^t \frac{dt}{t^{1-\alpha}(1-t)^\alpha(1-rt)^{1-\alpha}} + B_2 \dots\dots\dots (1)$$

そして常数  $B_1$  は式 (1) から頂点の対応関係を考慮に入れて定める。先ず平行四辺形の一辺 DA と  $t$  平面実軸上の線分 da が対応することにより

$$a = B_1 \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\alpha}(1-t)^\alpha(1-rt)^{1-\alpha}} \dots\dots\dots (2)$$

一方超幾何函数  $F(1-\alpha, \alpha; 1; r)$  に関する Euler 公式より

$$F(1-\alpha, \alpha; 1; r) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\alpha}(1-t)^\alpha(1-rt)^{1-\alpha}}$$

なる関係がある。そして  $\Gamma$  函数の性質によつて

$$\Gamma(1) = 1 \quad \text{および} \quad \Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) = \pi / \sin \pi \alpha$$

だから式 (2) の積分形を変形して

$$a = B_1 F(1-\alpha, \alpha; 1; r) \pi / \sin \pi \alpha \dots\dots\dots (3)$$

同様に平行四辺形の一辺 CD と  $t$  平面実軸上の線分 cd の対応関係より

$$-(c+ib) = B_1 \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t^{1-\alpha}(1-t)^\alpha(1-rt)^{1-\alpha}}$$

図-1 (a)

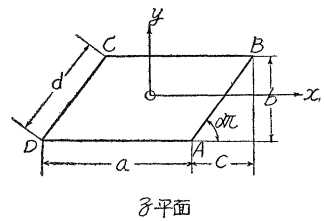
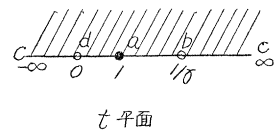


図-1 (b)



\* 大阪市立大学講師，理工学部

右辺の積分の変数を変換して  $t = -s$  とおくと

$$-(c+ib) = B_1(-1)^{\alpha-1} \int_0^{\infty} s^{\alpha-1}(1+s)^{-\alpha}(1+rs)^{\alpha-1} ds,$$

この式の右辺も超幾何関数で表現できる。そして

$$c+ib = B_1(\cos \pi\alpha + i \sin \pi\alpha) \Gamma(1-\alpha) \Gamma(\alpha) F(1-\alpha, \alpha; 1; 1-r)$$

かつ  $d = \sqrt{b^2 + c^2}$  なることを利用して

$$d = B_1 F(1-\alpha, \alpha; 1; 1-r) \pi / \sin \pi\alpha \dots \dots \dots (4)$$

関係式 (3), (4) より  $B_1$  を消去すれば,

$$\frac{d}{a} = \frac{F(1-\alpha, \alpha; 1; 1-r)}{F(1-\alpha, \alpha; 1; r)} \dots \dots \dots (5)$$

与えられた平行四辺形の外角  $\alpha\pi$ , 2辺の長さの比  $d/a$  を知れば, 超越方程式 (5) の根として常数  $r$  の値が求まる。

すなわち実軸上の残りの対応点の位置が確定する。また式 (3) より未知常数  $B_1$  も定まることになる。

次に  $\zeta = \varepsilon(t-t_0)/(t-i_0)$  なる変換によつて  $t$  平面実軸の上半分を  $\zeta$  平面内の単位円内に写像する。 $|\varepsilon|=1$  にとり,  $\varepsilon$  は共軛数を示すものとする。これを変換式 (1) に用いれば

$$Z = B_1 \frac{t_0 - i_0}{\varepsilon} t_0^{\alpha-1} (1-t_0)^{-\alpha} (1-r t_0)^{\alpha-1} \int^{\zeta} \left(1 - \frac{i_0}{\varepsilon t_0} \zeta\right)^{\alpha-1} \left[1 - \frac{1-i_0}{\varepsilon(1-t_0)} \zeta\right]^{-\alpha} \left[1 - \frac{1-r i_0}{\varepsilon(1-r t_0)} \zeta\right]^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\zeta}{\varepsilon}\right)^{-\alpha} d\zeta + B_2$$

こゝで下記の4つの等式が満足されるように  $\varepsilon, t_0$  の値を定める。

$$\frac{i_0}{\varepsilon t_0} + \frac{1-r i_0}{\varepsilon(1-r t_0)} = 0, \quad \frac{1-t_0}{\varepsilon(1-i_0)} = \frac{i_0}{\varepsilon t_0}, \quad \frac{1-i_0}{\varepsilon(1-t_0)} + \frac{1}{\varepsilon} = 0, \quad \frac{1-r t_0}{\varepsilon(1-r i_0)} = \frac{1}{\varepsilon}$$

これより  $t_0 = 1 + i\sqrt{(1-r)/r}, \quad \varepsilon = \sqrt{1-r} + i\sqrt{r}$

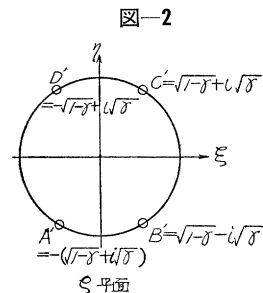
したがつて変換式は具体的に次の形をとる。

$$\zeta = (\sqrt{1-r} + i\sqrt{r}) \frac{t - (1 + i\sqrt{(1-r)/r})}{t - (1 - i\sqrt{(1-r)/r})}$$

あるいは  $\zeta = (\sqrt{1-r} + i\sqrt{r}) \frac{\sqrt{r}t - (\sqrt{r} + i\sqrt{1-r})}{\sqrt{r}t - (\sqrt{r} - i\sqrt{1-r})}$

こうすれば四辺形の各頂点の  $\zeta$  平面上における像点は図-2 のようにお互に対称の位置にくる。この式を変換式 (1) に代入して整理すれば,

$$Z = 2 B_1 i (\sqrt{r} + i\sqrt{1-r})^2 \alpha^{-1} \int^{\zeta} [1 - (\sqrt{1-r} + i\sqrt{r})^2 \zeta^2]^{-\alpha} [1 - (\sqrt{1-r} - i\sqrt{r})^2 \zeta^2]^{-\alpha} d\zeta \dots \dots \dots (6)$$



こゝでは  $z$  平面の原点  $z=0$  と,  $\zeta$  平面の原点  $\zeta=0$  を対応させても一般性を失わないので  $B_2=0$  とする。しかるに右辺の積分因子は Gegenbauer 函数  $C_n^\nu$  を用いて表現できる。すなわち

$$[1 - (\sqrt{1-r} - i\sqrt{r})^2 \zeta^2]^{-\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m}^\alpha(0) [(-1)^{\frac{1}{2}} (\sqrt{1-r} - i\sqrt{r})]^{2m} \zeta^{2m}$$

$$[1 - (\sqrt{1-r} + i\sqrt{r})^2 \zeta^2]^{-\alpha} = \sum_{l=0}^{\infty} C_{2l}^{1-\alpha}(0) [(-1)^{\frac{1}{2}} (\sqrt{1-r} + i\sqrt{r})]^{2l} \zeta^{2l}$$

よつて  $Z = A \int^{\zeta} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} C_{2m}^\alpha(0) C_{2l}^{1-\alpha}(0) (-1)^{m+l} (\sqrt{1-r} - i\sqrt{r})^{2m} (\sqrt{1-r} + i\sqrt{r})^{2l} \zeta^{2(m+l)} d\zeta$

右辺の積分を実行して

$$Z = A \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{m+l} C_{2m}^\alpha(0) C_{2l}^{1-\alpha}(0) [\cos 2(l-m)\theta' + i \sin 2(l-m)\theta'] \zeta^{2(m+l)+1} / [2(m+l)+1] \equiv \omega(\zeta) \dots \dots \dots (7)$$

こゝに  $A = 2a \{ \sin(1-2\alpha)\theta + i \cos(1-2\alpha)\theta \} \sin \pi\alpha / \pi F(1-\alpha, \alpha; 1; r)$   
 $\theta = \tan^{-1} \sqrt{(1-r)/r}, \quad \theta' = \tan^{-1} \sqrt{r/(1-r)}$  } ..... (8)

かつ Gegenbauer 函数には次のような漸化式が存在するので2重級数 (7) の係数は容易に計算できる。

$$\left. \begin{aligned} (n+2) C_{n+2}^\nu(0) &= -(2\nu+n) C_n^\nu(0) \\ C_0^\nu(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

特に矩形の場合には、 $\alpha=1/2$ であるから、式(6)に戻つて式(8)をも併用すれば、

$$Z = A \int_0^{\zeta} \{1 - [(\sqrt{1-r} - i\sqrt{r})^2 + (\sqrt{1-r} + i\sqrt{r})^2] \zeta^2 + [(\sqrt{1-r} + i\sqrt{r})^2 \cdot (\sqrt{1-r} - i\sqrt{r})^2] \zeta^4\}^{-\frac{1}{2}} d\zeta = A \int_0^{\zeta} [1 - 2(1-2r)\zeta^2 + \zeta^4]^{-\frac{1}{2}} d\zeta$$

よつて積分を実行すれば、

$$Z = A \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1-2r) \zeta^{2n+1} / (2n+1) \dots \dots \dots (10)$$

こゝに  $P_n(1-2r)$  は Legendré 函数である。そして係数  $A$  は式(8)において  $\alpha=1/2$  とおくと

$$A = \frac{ai}{K(\sqrt{r})} \dots \dots \dots (11)$$

である。分母の  $K$  は母数  $\sqrt{r}$  を有する完全楕円積分である。さらに正方形の場合には写像函数は、 $d/a=1$  とすれば  $r=0.5$  であるから

$$Z = \frac{ai}{K(\sqrt{0.5})} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) \zeta^{2n+1} / (2n+1) = \frac{ai}{1.85407} \left( \zeta - \frac{\zeta^5}{10} + \frac{\zeta^9}{24} - \frac{5}{208} \zeta^{13} + \dots \right) \dots \dots (12)$$

として具体的にえられる。

3.  $r$  の 決 定

写像函数(7)あるいは(10)の中に含まれる常数  $r$  は超越方程式(5)の根として所与の  $d/a \geq 1$ ,  $0.5 \geq \alpha > 0$  の範囲に存在する  $d/a, \alpha$  の値に対して  $0.5 \geq r > 0$  の範囲で決定せねばならない。 $d/a \leq 1$  の場合は四辺形を裏返せば本質的には  $d/a \geq 1$  の場合に帰着する。ところがこのような  $r$  の値に対して式(5)の分子は収束がおそいため計算に不便である。そこで次のように変形しておく。

$$F(1-\alpha, \alpha; 1; 1-r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(1-\alpha, \alpha; 1+\varepsilon; 1-r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha+\varepsilon)\Gamma(\alpha+\varepsilon)} F(1-\alpha, \alpha; 1-\varepsilon; r) + r^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} F(\alpha+\varepsilon, 1-\alpha+\varepsilon; 1+\varepsilon; r) \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)r^n}{\varepsilon n!} \left\{ \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(\alpha+\varepsilon)\Gamma(1-\alpha+\varepsilon)} \frac{\Gamma(1-\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\varepsilon+n)} - r^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha+\varepsilon+n)\Gamma(\alpha+\varepsilon+n)\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha+\varepsilon)\Gamma(\alpha+\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon+n)} \right\}$$

$\varepsilon$  による微分を ' で示せば

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \left\{ \left[ \frac{\Gamma'(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha+\varepsilon)\Gamma(\alpha+\varepsilon)} - \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma'(1-\alpha+\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\alpha+\varepsilon)\Gamma(\alpha+\varepsilon)} - \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma'(\alpha+\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha+\varepsilon)\Gamma^2(\alpha+\varepsilon)} \right] \right.$$

$$\times \frac{\Gamma(1-\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\varepsilon+n)} - r^\varepsilon \log r \cdot \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha+\varepsilon+n)\Gamma(\alpha+\varepsilon+n)\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha+\varepsilon)\Gamma(\alpha+\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon+n)}$$

$$+ \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha+\varepsilon)\Gamma(\alpha+\varepsilon)} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(1-\alpha+n)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[ \frac{-\Gamma'(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon+n)} + \frac{\Gamma'(1-\varepsilon+n)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon+n)} \right]$$

$$- \frac{r^\varepsilon}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[ \left( \frac{\Gamma'(1-\alpha+n+\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha+\varepsilon)} - \frac{\Gamma(1-\alpha+n+\varepsilon)\Gamma'(1-\alpha+\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\alpha+\varepsilon)} \right) \frac{\Gamma(\alpha+\varepsilon+n)\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(\alpha+\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon+n)} \Gamma(1-\varepsilon) \right.$$

$$+ \left( \frac{\Gamma'(\alpha+n+\varepsilon)}{\Gamma(\alpha+\varepsilon)} - \frac{\Gamma(\alpha+n+\varepsilon)\Gamma'(\alpha+\varepsilon)}{\Gamma^2(\alpha+\varepsilon)} \right) \frac{\Gamma(1-\alpha+\varepsilon+n)\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha+\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon+n)} \Gamma(1-\varepsilon)$$

$$+ \left( \frac{\Gamma'(1+\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon+n)} - \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma'(1+\varepsilon+n)}{\Gamma^2(1+\varepsilon+n)} \right) \frac{\Gamma(1-\alpha+\varepsilon+n)\Gamma(\alpha+\varepsilon+n)}{\Gamma(1-\alpha+\varepsilon)\Gamma(\alpha+\varepsilon)} \Gamma(1-\varepsilon)$$

$$\left. - \Gamma'(1-\varepsilon) \frac{\Gamma(1-\alpha+\varepsilon+n)\Gamma(\alpha+n+\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha+\varepsilon)\Gamma(\alpha+\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon+n)} \right\}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)(n!)^2} r^n \{ 2\psi(n+1) - \psi(1-\alpha+n) - \psi(\alpha+n) - \log r \}$$

こゝで  $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1) \dots \dots \dots (13)$

$$\kappa_n = 2\psi(n+1) - \psi(\alpha+n) - \psi(1-\alpha+n) \dots \dots \dots (14)$$

とおけば、  $F(1-\alpha, \alpha; 1; 1-r) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (1-\alpha)_n}{(n!)^2} (\kappa_n - \log r) \cdot r^n$

こゝに  $\psi$  は  $\psi$  ガンマー函数である。

したがって方程式 (5) は

$$\frac{d}{a} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi F(1-\alpha, \alpha; 1; r)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (1-\alpha)_n}{(n!)^2} (r_n - \log r) r^n \dots \dots \dots (15)$$

となる。級数 (15) は  $r$  の値に対して収束迅速である。例えば  $\alpha=0.3, d/a \geq 5$  の場合唯一つの項  $n=0$  のみをとつて小数点以下第 7 位まで正確に計算される。また  $\alpha=0.1, d/a \geq 2$  の場合には  $n=0, 1$  の 2 項のみで同じ程度の精度をうる。この根  $r$  の第 1 近似値が容易にえられるように、 $r, d/a, \alpha$  の間の関係図を図-3 から図-7 までに図示しておいた。これから  $r$  の第 1 近似値を読み取り、その後反復法その他の数値計算法によつて、根の精度を欲するところまで向上させることができるのはいうまでもない。

このように求める写像函数の形が完全に決定したので力学的な考察に移る。

4. 平板の曲げに対する複素解

直角座標系に関する平板のタワミ  $w$  の基礎微分方程式は分布荷重  $q(x, y)$  に対して、 $D$  を板剛度とすれば

図-3

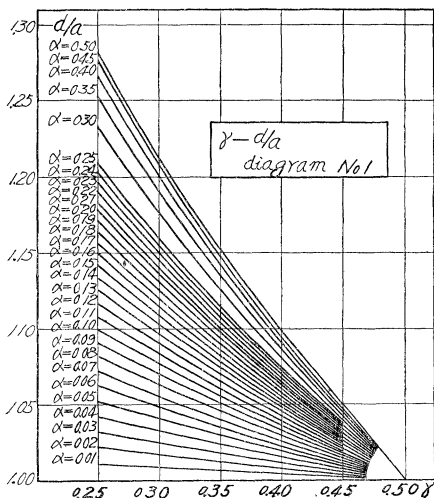
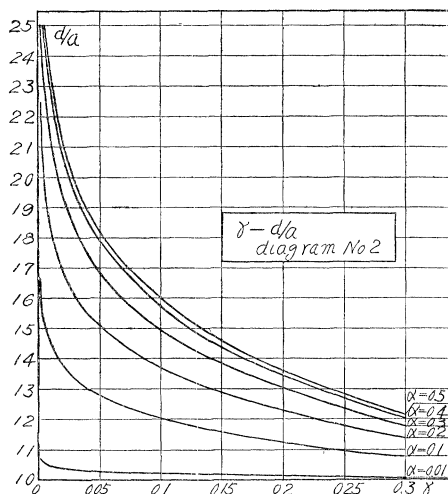


図-4



$$\Delta \Delta w = q/D \dots \dots \dots (16)$$

である。方程式 (16) の解  $w(x, y)$  はその同次方程式

$$\Delta \Delta w_0 = 0 \dots \dots \dots (17)$$

の一般解  $w_0(x, y)$  と元の方程式 (16) の特解  $w_p$  との和としてえられる。すなわち

$$w = w_0 + w_p \dots \dots \dots (18)$$

まず一般解  $w_0$  について考える。方程式 (17) より直ちに  $\Delta w_0$  が調和函数であることが知れる。それで  $z = x + iy$  とすると、

$$\Delta w_0 = 2[\phi(z) + \bar{\psi}(\bar{z})] \dots \dots (19)$$

と書ける。こゝに  $\phi(z)$  は  $z$  の解析函数を表わしている。

だから  $\varphi = \int \phi(z) dz$  とし、 $\chi(z)$  で積分函数を示せば、

$$w_0 = R[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] \dots \dots (20)$$

こゝに  $R$  は実数部をとることを意味する。

次に特解  $w_p$  は 2 つの荷重状態につい

図-5

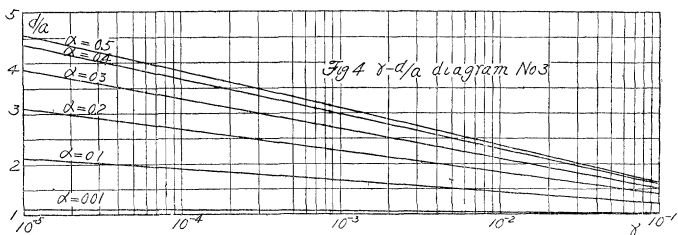


図-6

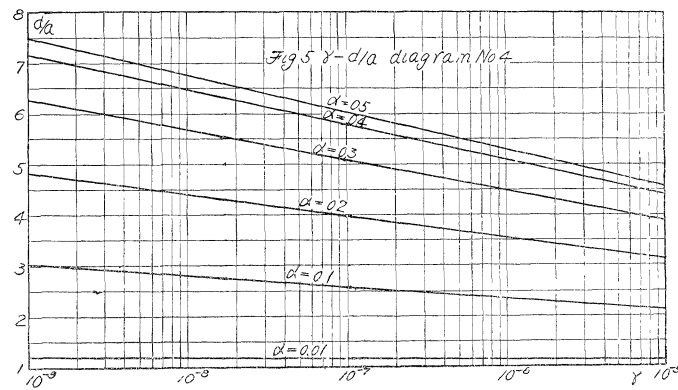
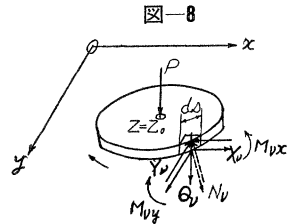
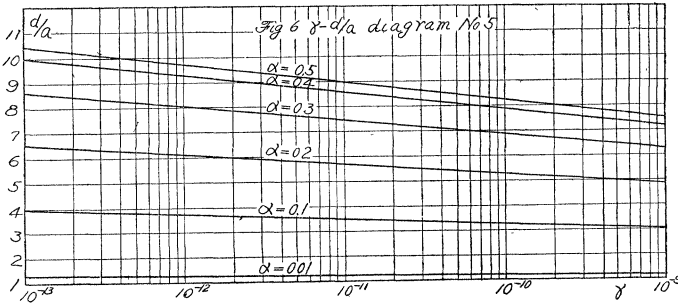


図-7



て、それぞれ次のようにえられる。

(1) 等分布荷重 この場合には微分方程式 (16) の右辺の  $q$  が常数であるから簡単に  $w_p$  が計算される。方程式 (16) より

$$16 \frac{\partial^4 w_p}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = \frac{q}{D}$$

これを4度積分すれば、

$$w_p = \frac{q}{64 D} z^2 \bar{z}^2 \dots \dots \dots (21)$$

(2) 集中荷重  $P$  が点  $z = z_0$  に作用する場合  $z = z_0$  を内部に含む微小要素の釣合を図-8のように考察する。鉛直方向の釣合

$$P = - \int_c Q_\nu ds \dots \dots \dots (22)$$

点  $z = z_0$  に関するモーメントの釣合

$$\int_c (M_{\nu x} - i M_{\nu y}) ds = \int_c Q_\nu (\bar{z} - \bar{z}_0) ds \dots \dots \dots (23)$$

ここに  $Q_\nu$  は要素の周辺に作用するせん断力である。 $C$ は要素の周にその積分を示す。また  $M_{\nu x}, M_{\nu y}$  は微小要素周辺部単位長さには作用する応力の  $x$  軸および  $y$  軸方向の分力  $X_\nu, Y_\nu$  による曲げモーメントである。 $ds$  を斜辺とする微小直角三角形の鉛直方向の釣合を考えれば、

$$Q_\nu ds = -Q_y dx + Q_x dy$$

これを条件式 (22) に代入すれば、

$$P = -I \left\{ \int_c (Q_x - i Q_y) dz \right\}$$

$I$  は虚数部なることを意味する。この式の右辺を  $w_p$  で表わすと、

$$P = DI \left\{ \int_c 2 \frac{\partial}{\partial z} \Delta w_p dz \right\}$$

よつて 
$$\frac{P}{4 \pi D} = \text{Residu of } \left( \frac{\partial}{\partial z} \Delta w_p \right)$$

結局 
$$\Delta w_p = \frac{-P}{2 \pi D} \log \frac{1}{|z - z_0|} \dots \dots \dots (24)$$

これを2度積分すれば

$$w_p = \frac{P}{16 \pi D} (\bar{z} - \bar{z}_0)(z - z_0) [\log(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) - 2]$$

この  $w_p$  は釣合条件 (22) を満足する微分方程式 (16) の特解にほかならない。これはまた釣合条件式 (23) をも満足することは次のようにして証明できる。

まず条件式 (23) の左辺を変形する。

$$\begin{aligned} (M_{\nu x} - i M_{\nu y}) ds &= \int_{-h/2}^{h/2} [(-\tau_{xy} dx + \sigma_x dy) - i(-\sigma_y dx + \tau_{xy} dy)] u du \\ &= M_{xy} dx + M_{yx} dy + i(M_y dx + M_x dy) = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx - D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dy \\ &\quad + i \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx + D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right] \end{aligned}$$

よつて 
$$\int_c (M_{\nu x} - i M_{\nu y}) ds = \frac{1}{1-\nu} \int_c M_{xy} dz - D \nu \int_c \left[ d \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) + id \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - D \int_c \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dy + i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx \right)$$

この右辺第2項は  $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$  の周期性によつて消滅する。

したがつて 
$$\oint_c (M_{\nu x} - iM_{\nu y}) ds = \frac{1}{1-\nu} \oint_c M_{xy} dz - D \oint_c \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dy + i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx \right) \dots\dots\dots (25)$$

一方 
$$\oint_c (M_{\nu x} - iM_{\nu y}) ds = \oint_c i(M_y - M_x - 2iM_{xy}) dz + \oint_c (iM_x dx + M_y dy) - \oint_c M_{xy} dz \dots\dots (26)$$

そして右辺第2項の積分を  $w$  で示せば,

$$\begin{aligned} \oint_c (iM_x dx + M_y dy) &= -i \oint_c D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx - i \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dy \right] \\ &= -iD \oint_c \left\{ \left[ d \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) - id \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + i \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dz + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx - i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dy \right) \right\} \end{aligned}$$

右辺の第1項は周期性によつて0となり

$$\oint_c (iM_x dx + M_y dy) = \frac{1}{1-\nu} \oint_c M_{xy} dz - \nu D \oint_c \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dy + i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx \right) \dots\dots\dots (27)$$

式(25)と(27)より  $w$  の項を消去すれば

$$\oint_c (iM_x dx + M_y dy) = \oint_c M_{xy} dz + \nu \oint_c (M_{\nu x} - iM_{\nu y}) ds \dots\dots\dots (27)'$$

一方式(26)の右辺の第1項は

$$\oint_c i(M_y - M_x - 2iM_{xy}) dz = i \cdot 4 D(1-\nu) \oint_c \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dz \dots\dots\dots (28)$$

式(26)に式(27)',(28)を代入すれば,

$$\oint_c (M_{\nu x} - iM_{\nu y}) ds = 4iD \oint_c \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dz$$

この式の右辺の  $w$  に特解  $w_p$  を入れると

$$\oint_c (M_{\nu x} - iM_{\nu y}) ds = -\frac{P}{2} (\bar{z} - \bar{z}_0)$$

次に条件式(23)の右辺について考えよう。

$$\begin{aligned} \oint_c Q_\nu (\bar{z} - \bar{z}_0) ds &= \frac{-1}{2} \oint_c \left[ Q_y (dz + d\bar{z}) - \frac{Q_x}{i} (dz - d\bar{z}) \right] (\bar{z} - \bar{z}_0) \\ &= iD \left[ \oint_c \frac{\partial}{\partial z} A w \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0) dz - \oint_c \frac{\partial}{\partial \bar{z}} A \bar{w} \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0) d\bar{z} \right] \end{aligned}$$

この  $w$  に特解  $w_p$  を代入すれば,

$$\oint_c Q_\nu (\bar{z} - \bar{z}_0) ds = -\frac{P}{2} (\bar{z} - \bar{z}_0)$$

したがつて釣合条件式(23)が満足されている。

一般に Laplace 方程式が, ある領域内で与えられている場合, その領域を単位円に, 等角写像する函数  $\zeta = f(z)$  が知れている時の Green 函数は次式で表わせる。

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2} \log \frac{(1 - \bar{\zeta}_0 \zeta)(1 - \zeta_0 \bar{\zeta})}{(\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)}$$

こゝに  $\zeta_0$  は荷重点  $z = z_0$  に対応する単位円内の点である。そして Green 函数の定義によれば,

$$G(z, z_0) = \log \frac{1}{|z - z_0|} + R\{F(z)\}$$

この  $F(z)$  は正則函数である。式(24)を2度積分した  $w_p$  が釣合条件式(22),(23)を満足する方程式(16)の特解であつたから,

$$\frac{-P}{2\pi D} G(z, z_0) = \frac{-P}{4\pi D} \log \frac{(1 - \bar{\zeta}_0 \zeta)(1 - \zeta_0 \bar{\zeta})}{(\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)}$$

を2度積分した次の函数も求める特解になりうる。

$$\begin{aligned} w_p &= \frac{-P}{16\pi D} \left[ z\bar{z} \log \frac{(1 - \bar{\zeta}_0 \zeta)(1 - \zeta_0 \bar{\zeta})}{(\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)} + \bar{z} \int z \left( \frac{\bar{\zeta}_0}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} + \frac{1}{\zeta - \zeta_0} \right) d\zeta \right. \\ &\quad \left. + z \int \bar{z} \left( \frac{\zeta_0}{1 - \zeta_0 \bar{\zeta}} + \frac{1}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} \right) d\bar{\zeta} \right] \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

### 5. 周辺単純支持された板

板の周辺条件としては2つの代表的な場合について考える。先ず周辺単純支持された場合の境界条件は

$$w=0, \quad \Delta w=0 \dots\dots\dots (30)$$

条件式 (30)<sub>2</sub> に式 (18) を用いて、板の境界上で次式が成立つ

$$\Delta w_0 + \Delta w_p = 0 \dots\dots\dots (31)$$

$\Delta w_0$  は式 (19) より明らかなように  $\phi(z)$  を含んでいる。この  $\phi(z)$  に  $z=w(\zeta)$  を代入すれば、 $\zeta$  の解析函数  $\phi(\zeta)$  になる。そして  $\phi(\zeta)$  は  $\zeta$  のべき級数で表わせる。

$$\phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n \dots\dots\dots (32)$$

式 (21) と式 (32) とを式 (31) に代入して、 $\zeta = e^{i\vartheta} (\equiv \lambda)$  が境界に対応するので、等分布荷重に対して

$$2 \left[ \phi(\lambda) + \bar{\phi}(1/\lambda) \right] + \frac{q}{4D} \omega(\lambda) \bar{\omega}(1/\lambda) = 0$$

この両項に  $\zeta$  平面内の単位円周  $\Gamma$  にそう積分を施し Cauchy の積分公式を利用すれば、

$$\phi(\zeta) + \bar{A}_0 = \frac{-q}{8D} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\omega(\lambda) \bar{\omega}(1/\lambda)}{\lambda - \zeta} d\lambda \dots\dots\dots (33)$$

式 (33) の両辺の  $\zeta^n$  の係数を比較すれば係数  $A_n$  が求まる。

さらに  $\phi(\zeta)$  と  $\phi'(\zeta)$  との関係式は

$$\phi(\zeta) = \int \phi'(\zeta) \omega'(\zeta) d\zeta \dots\dots\dots (34)$$

かつ境界条件 (30)<sub>1</sub> に式 (18) を代入し、

$$w_0 + w_p = 0 \dots\dots\dots (35)$$

式 (35) に式 (20) と (21) とを用いて、 $z(\zeta)$  が  $\zeta$  の解析函数で

$$z(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^n \dots\dots\dots (36)$$

と級数展開できることを利用すれば、やはり Cauchy の公式を用いて

$$z(\zeta) + \bar{B}_0 = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left\{ \bar{\omega}(1/\lambda) \phi[\omega(\lambda)] + \omega(\lambda) \bar{\phi}[\bar{\omega}(1/\lambda)] + \frac{q}{32D} [\omega(\lambda) \bar{\omega}(1/\lambda)]^2 \right\} \frac{d\lambda}{\lambda - \zeta} \dots (37)$$

この  $z(\zeta)$  についても上式の両辺の  $\zeta^n$  の係数を比較して  $B_n$  がわかれば  $z(\zeta)$  が決定する。これらの函数が具体的に知りえたならば、タワミ  $w$  が計算できる。また各種断面力についても計算できるはずである。

集中荷重の場合にも  $w_p$  を除いては同じ取扱いができる。 $\Delta w_p$  の形からわかるように

$$[\Delta w_p]_{\zeta=\lambda} = 0$$

であるから  $\phi(\zeta) \equiv 0$

なることが直ちに知れる。 $z(\zeta)$  については次式で求まる。

$$z(\zeta) + \bar{B}_0 = \frac{P}{8\pi D} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left\{ \bar{\omega}(1/\lambda) \left[ \int \omega(\zeta) \frac{\zeta_0 \zeta_0 - 1}{(\zeta \zeta_0 - 1)(\zeta - \zeta_0)} d\zeta \right]_{\zeta=\lambda} + \omega(\lambda) \left[ \int \bar{\omega}(\bar{\zeta}) \frac{\zeta_0 \bar{\zeta}_0 - 1}{(\bar{\zeta} \zeta_0 - 1)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)} d\bar{\zeta} \right]_{\bar{\zeta}=1/\lambda} \right\} \frac{d\lambda}{\lambda - \zeta} \dots\dots\dots (38)$$

**6. 周辺固定された板**

$z = \omega(\zeta)$  中の変数  $\zeta = r e^{i\vartheta}$  の絶対値  $r$  を一定に保持して  $\vartheta$  を変化させるか、あるいは偏角  $\vartheta$  を一定に保持して  $r$  を変化させれば、 $z$  平面上に一種の曲線座標  $(r, \vartheta)$  が描ける。そして  $r=1$  に対応する座標曲線が平行四辺形の形をとる。しかるにこの曲線座標方向のタワミ角と直角座標  $(x, y)$  方向のタワミ角との関係式は

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = e^{i\delta} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + i \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right) \dots\dots\dots (39)$$

ここに  $\delta$  は両座標系の交角である。したがって周辺固定の条件を式で書けば

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0 \dots\dots\dots (40)$$

式 (40)<sub>2</sub> に式 (18) を代入すれば、

$$\frac{\partial w_0}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w_p}{\partial \bar{z}} = 0 \dots\dots\dots (41)$$

式 (20) を式 (41) に代入すれば、 $z'(z) = \psi(z)$  とおくと、境界上で

$$\phi(z) + z \bar{\phi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) + 2 \frac{\partial w_p}{\partial \bar{z}} = 0 \dots\dots\dots (42)$$

特解  $w_p$  の処置はやはり等分布荷重と集中荷重とに分けて考えよう。先ず等分布荷重の場合には再び式 (21) を使い、周辺に対応して  $z = \omega(\lambda)$  とおけば

$$\varphi(\lambda) + \omega(\lambda) \frac{\bar{\varphi}'(1/\lambda)}{\bar{\omega}'(1/\lambda)} + \bar{\Psi}(1/\lambda) + \frac{q}{16D} [\omega(\lambda)]^2 \bar{\omega}(1/\lambda) = 0$$

$\Psi$  についても  $\Psi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \zeta^n$  の形に展開できるので

$$\varphi(\zeta) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left\{ \frac{\omega(\lambda)}{\bar{\omega}'(1/\lambda)} \bar{\varphi}'(1/\lambda) + \frac{q}{16D} [\omega(\lambda)]^2 \bar{\omega}(1/\lambda) \right\} \frac{d\lambda}{\lambda - \zeta} \dots\dots\dots (43)$$

$\varphi(\zeta)$  が上式によつて定まると式 (37) を使つて引続き  $\chi(\zeta)$  が計算できるのは、周辺単純支持の場合と全く同様である。

次に集中荷重の場合にも境界上で式 (42) が成立せねばならないことから

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left\{ \frac{P}{8\pi D} \left[ \int \omega(\zeta) \left( \frac{\bar{\zeta}_0}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} + \frac{1}{\zeta - \zeta_0} \right) d\zeta \right]_{\zeta=\lambda} - \frac{\omega(\lambda)}{\bar{\omega}'(1/\lambda)} \bar{\varphi}'(1/\lambda) \right\} \frac{d\lambda}{\lambda - \zeta} \dots (44)$$

$\varphi(\zeta)$  から  $\chi(\zeta)$  を求めるには、境界条件 (40)<sub>1</sub> より

$$\begin{aligned} \chi(\zeta) + \bar{\chi}_0 &= \frac{P}{8\pi D} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left\{ \bar{\omega}(1/\lambda) \left[ \int \omega(\zeta) \frac{\bar{\zeta}_0 \zeta_0 - 1}{(\zeta \bar{\zeta}_0 - 1)(\zeta - \zeta_0)} d\zeta \right]_{\zeta=\lambda} \right. \\ &\quad \left. + \omega(\lambda) \left[ \int \bar{\omega}(\bar{\zeta}) \frac{\zeta_0 \bar{\zeta}_0 - 1}{(\bar{\zeta} \zeta_0 - 1)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)} d\bar{\zeta} \right]_{\bar{\zeta}=1/\lambda} \right\} \frac{d\lambda}{\lambda - \zeta} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left\{ \bar{\omega}(1/\lambda) \varphi(\lambda) + \omega(\lambda) \bar{\varphi}(1/\lambda) \right\} \frac{d\lambda}{\lambda - \zeta} \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

以上によつて2つの代表的な荷重状態に対し、2種の周辺条件についての解式がえられた。

**7. 数値計算例**

実際計算においては、写像函数 (7) の有限項のみをとる。その項数を増せばいくらかでも正確な解がえられる。今項数を若干個に留めた実用解について数値計算例を示そう。特に正方形板および矩形板について特別な場合として述べるが、これは既に古典的方法によつて求められた<sup>2)</sup> 結果と比較するためである。

**例 1 単純支持、等分布荷重を受ける正方形板**

一般論において既にえられた写像函数 (12) の第3項までに留めておけば、

$$z = \frac{ai}{1.85407} \left( \zeta - \frac{\zeta^5}{10} + \frac{\zeta^9}{24} \right)$$

公式 (33) を用いて複素積分を実行すれば、

$$\phi(\zeta) = \frac{-qa^2}{D} \times 0.00151512 \times \left( \frac{14\ 569}{1\ 200} \zeta - \frac{5}{2} \zeta^4 + \zeta^8 \right)$$

$\varphi(\zeta)$  は式 (34) によつて

$$\varphi(\zeta) = \frac{-qa^3}{D} \times 0.000817188 i \left( \frac{14\ 569}{1\ 200} \zeta - \frac{20\ 569}{12\ 000} \zeta^5 + \frac{1\ 841}{1\ 600} \zeta^9 - \frac{23}{208} \zeta^{13} + \frac{3}{136} \zeta^{17} \right)$$

公式 (37) より  $\chi(\zeta)$  を求めれば、

$$\begin{aligned} \chi(\zeta) &= \frac{-qa^4}{D} (0.00406103 - 0.000794463 \zeta^4 + 0.000483725 \zeta^8 \\ &\quad - 0.0000267521 \zeta^{12} + 0.00000513137 \zeta^{16}) \end{aligned}$$

以上の2つの解析函数より中央の最大タワミを求めれば、 $[w_p]_{z=0} = 0$  であるから

$$w_{\max} = R \{ \bar{\omega}(\bar{\zeta}) \varphi(\zeta) + \chi(\zeta) \}_{\zeta=0} = 0.00406103 \frac{qa^4}{Eh^3} \times 12(1 - \nu^2)$$

こゝで  $\nu = 0.3$  とすれば、

$$w_{\max} = 0.044346 qa^4/Eh^3 \quad (0.0443 qa^4/Eh^3)$$

( ) 内は Timoshenko が計算した値である。

中央最大曲げモーメント  $M_{\max}$  は、

$$\begin{aligned} M_{\max} &= -D(1 + \nu) [\phi(\zeta) + \bar{\phi}(\bar{\zeta})] \\ &= -D(1 + 0.3) \left[ \frac{-qa^2}{D} \times 0.00151512 \times \frac{14\ 569}{1\ 200} \times 2 \right] = 0.047826 qa^2 \quad (0.0479 qa^2) \end{aligned}$$

**例 2 周辺単純支持、等分布荷重を受ける平行四辺形板 ( $b/c=5, b/a=1$ )**

Fuchssteiner が例題として掲げたものと同じ形状、寸法のものについて計算してみよう。 $d/a$  および  $\alpha$  をだせば  $d/a=1.019804, \alpha=0.437167$  である。これをもとにして  $r$  を求めれば、 $r=0.47823$  漸化式 (9) を用いて順次  $C_n^{\alpha}$  の値を計算すれば



$$C_0^\alpha(0)=1, \quad C_{2n+1}^\alpha(0)=0, \quad C_2^\alpha(0)=-0.437167, \\ C_4^\alpha(0)=0.314141, \quad C_6^\alpha(0)=-0.255205$$

$C_\nu^{1-\alpha}$  の値は,

$$C_0^{1-\alpha}(0)=1, \quad C_{2n+1}^{1-\alpha}(0)=0, \quad C_2^{1-\alpha}(0)=-0.562833, \\ C_4^{1-\alpha}(0)=0.439807, \quad C_6^{1-\alpha}(0)=-0.375717$$

$\theta$  および  $\theta'$  は式 (8)<sub>2,3</sub> より

$$\theta = \tan^{-1} \sqrt{(1-r)/r} = \tan^{-1} \sqrt{(1-0.47823)/0.47823} = 0.80718 \\ \theta' = \pi/2 - \theta = \pi/2 - 0.80718 = 0.76362$$

よつて常数  $A$  は式 (8)<sub>1</sub> より

$$A = \frac{2a \sin(\pi \times 0.437167)}{\pi F(0.562833, 0.437167; 1; 0.47823)} \{ \sin[(1-0.437167 \times 2) \\ \times 0.80718] + i \cos[(1-0.437167 \times 2) \times 0.80718] \} = (0.0542097 + 0.532583 i) a$$

そして式 (7) の各係数を求め、第4項までとれば、

$$z = (0.0542097 + 0.532583 i) a \{ \zeta + (0.0145133 + 0.0418490 i) \zeta^2 \\ + (-0.101007 + 0.00218652 i) \zeta^3 + (-0.00944755 - 0.0148563 i) \zeta^4 \} \equiv \omega(\zeta)$$

をうる。

この  $\omega$  を式 (33) に代入して積分すれば

$$\varphi(\zeta) = \frac{-q}{8D} A \bar{A} \{ 0.5062395 + (0.0140607 + 0.0476290 i) \zeta^2 \\ + (-0.101766 + 0.00236628 i) \zeta^4 + (-0.00944755 - 0.0148563 i) \zeta^6 \}$$

式 (34) より  $\varphi$  を計算すれば、

$$\varphi(\zeta) = \frac{-q}{8D} A^2 \bar{A} \{ 0.5062395 \zeta + (0.0120341 + 0.0370620 i) \zeta^3 \\ + (-0.0725604 + 0.00234796 i) \zeta^5 + (-0.00788191 - 0.0148827 i) \zeta^7 \\ + (0.0631629 - 0.000972516 i) \zeta^9 \}$$

以下例1と同じように計算を進めて、中央最大タワミ  $w_{\max}$  をうる。

$$w_{\max} = \chi(0) = \frac{q}{8D} A^2 \bar{A}^2 (0.515595 - 1.051390/8) = 0.0039440 qa^4/D \quad (0.0039738 qa^4/D)$$

( ) 内は Fuchssteiner の方法を使って求めた値である。差異は 0.750% である。Fuchssteiner は境界条件を最小自乗法で近似させた。一応この程度に一致すれば、第4項位まで採用することによって十分実用解がえらわれることがわかった。次に中央最大曲げモーメントを求めれば、

$$M_{x\max} = 0.0478277 qa^2, \quad M_{y\max} = 0.0463955 qa^2$$

この四辺形は正方形に近い形をしているので、両軸方向の曲げモーメントは殆んど差異を認められない。

### 例3 集中荷重を中心に受ける矩形板

$d/a=1.2$  の矩形板の中心に集中荷重  $P$  が作用する場合の計算をこころみた。この例も Timoshenko の結果と比較するために特に選んだ。式 (10) で与えられる写像函数は

$$z = 0.581736 ia(\zeta + 0.127558 \zeta^3 - 0.0560680 \zeta^5)$$

まず周辺固定の場合について述べる。 $\varphi$  を求めるため式 (44) の各項の計算をする。荷重点が中心だから  $\zeta_0=0$  とする。

$$\frac{-\omega(\lambda)}{\bar{\omega}'(1/\lambda)} \bar{\varphi}'(1/\lambda) = 1.854516 \bar{A}_2 + 0.596056 \bar{A}_3 - 0.336408 \bar{A}_6 \\ + (0.927258 \bar{A}_1 + 0.447042 \bar{A}_3 - 0.280340 \bar{A}_5) \lambda + (0.298028 \bar{A}_2 - 0.224272 \bar{A}_4) \lambda^2 \\ + (0.1490141 \bar{A}_1 - 0.1682040 \bar{A}_3) \lambda^3 - 0.1121360 \bar{A}_2 \lambda^4 - 0.0560680 \bar{A}_1 \lambda^5 + 0(1/\lambda) \\ \frac{P}{8\pi D} \left[ \int_{\zeta=\lambda}^{\zeta} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right] = \frac{P}{8\pi D} \times 0.581736 ia(\lambda + 0.0425194 \lambda^3 - 0.01121360 \lambda^5)$$

公式 (44) の右辺の積分を実行し式 (44) の両辺の  $\zeta^n$  の項を比較して、係数  $A_n$  を定めれば、  
0.581736  $Pa/8\pi D = \Re$  とおいて、

$$A_1 = 0.5318205 i \Re, \quad A_3 = -0.0441563 i \Re, \quad A_5 = 0.01860451 i \Re, \quad A_0 = A_2 = A_4 = 0$$

したがつて  $\varphi(\zeta)$  は  $\zeta$  の偶函数なることが知れた。荷重状態、形状の対称性から考えて当然の帰結である。結局

$\varphi(\zeta)$  は次のようにかける。

$$\varphi(\zeta) = \frac{P}{8\pi D} \times 0.581736 ia(0.5318205 \zeta - 0.0441563 \zeta^2 + 0.01860451 \zeta^3)$$

式 (45) の計算に移る。

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(1/\lambda) \left[ \int \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right]_{\zeta=\lambda} &= -0.581736 ia \left( 1/\lambda + 0.127558/\lambda^3 - 0.0560680/\lambda^5 \right) \\ &\times 0.581736 ia (\lambda + 0.0425194 \lambda^3 - 0.01121360 \lambda^5) \\ &= 0.338417 a^2 (1.006052 + 0.0410890 \lambda^2 - 0.01121360 \lambda^4 + 0.1251743/\lambda^2 - 0.0560680/\lambda^4) \end{aligned}$$

この式の共軛数をとつて

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) \left[ \int \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right]_{\bar{\zeta}=1/\lambda} &= 0.338417 a^2 (1.006052 + 0.1251743 \lambda^2 - 0.0560680 \lambda^4) + 0(1/\lambda) \\ \bar{\omega}(1/\lambda) \varphi(\lambda) &= -0.581736 ia (1/\lambda + 0.127558/\lambda^3 - 0.0560680/\lambda^5) \times \frac{P}{8\pi D} \\ &\times 0.581736 ia (0.5318205 \lambda - 0.0441563 \lambda^3 + 0.01860451 \lambda^5) \\ &= -\frac{P}{8\pi D} \times 0.338417 a^2 (0.526188 - 0.0417831 \lambda^2 + 0.0186045 \lambda^4) + 0(1/\lambda) \end{aligned}$$

この式の共軛数をとれば、

$$\omega(\lambda) \bar{\varphi}(1/\lambda) = \frac{P}{8\pi D} \times 0.338417 a^2 (0.526188 + 0.0703139 \lambda^2 - 0.0298181 \lambda^4) + 0(1/\lambda)$$

よつて中央の最大タワミは

$$w_{\max} = R \{ \bar{\omega}(\bar{\zeta}) \varphi(\zeta) + \chi(\zeta) \}_{\zeta=0} \quad \text{は}$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \chi(0) = \frac{P}{8\pi D} \times 0.338417 a^2 \times (1.006052 - 0.526188)$$

よつて

$$w_{\max} = 0.1470399 \times 0.479864 Pa^2/Eh^3 = 0.0705592 Pa^2/Eh^3 \quad (0.0706 Pa^2/Eh^3)$$

古典的方法によつて 4 桁まで正確に出そうとすれば、7 元連立方程式を解かねばならない。

単純支持の場合には  $\varphi \equiv 0$  であつて

$$w_{\max} = 0.1470399 \times 1.006052 Pa^2/Eh^3 = 0.147930 Pa^2/Eh^3 \quad (0.1478 Pa^2/Eh^3)$$

#### 例 4 集中荷重 $P$ を受ける平行四辺形板

例 2 で例示した平行四辺形板を再び考える。

写像函数  $\omega(\zeta)$  としては

$$\begin{aligned} z = \omega(\zeta) &= (0.0542097 + 0.532583 i) \times \\ &a \{ \zeta + (0.0145133 + 0.0418490 i) \zeta^3 + (-0.101007 + 0.00218652 i) \zeta^5 \} \end{aligned}$$

を採用する。

これより例 3 と同じ計算過程をへて

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{Pa}{8\pi D} \{ (0.0286311 + 0.265888 i) \zeta \\ &+ (0.0054499 + 0.0006531 i) \zeta^3 + (0.00183262 + 0.0160974 i) \zeta^5 \} \end{aligned}$$

次に式 (45) より  $\chi(\zeta)$  を求め、それを用いて  $w_{\max}$  を計算すれば、周辺固定の場合には

$$\begin{aligned} w_{\max} &= R \{ \bar{\omega}(\bar{\zeta}) \varphi(\zeta) + \chi(\zeta) \}_{\zeta=0} = \frac{P}{8\pi D} \times 0.286584 a^2 \\ &\times 1.0026954 - \frac{Pa^2}{8\pi D} \times 0.142161 = 0.0057674 \frac{Pa^2}{D} = 0.062980 \frac{Pa^2}{Eh^3} \end{aligned}$$

単純支持の場合には、第 2 項がなくて

$$w_{\max} = \frac{Pa^2}{8\pi D} \times 0.287356 = 0.011434 \frac{Pa^2}{D} = 0.12485 \frac{Pa^2}{Eh^3}$$

単純支持の場合についてみるに、等分布荷重によるタワミは集中荷重によるタワミの約 3 分の 1 であることが知れる。

#### 8. 結 言

単位円を平行四辺形に等角写像する函数を 2 重級数の形式で与え、これを利用して平行四辺形の曲げの問題の解を求めた。今後の問題として、平行四辺形板の曲げモーメントの分布状態が矩形板のそれと如何なる相違があ

るか、板の形状、寸法比によつてどのような変化が認められるか等について考察の余地がある。本文でえられた基礎的研究の成果が、このような具体的問題への踏台となれば幸である。

本研究に関して御懇切なる御指導を賜つた 京都大学教授小西博士、貴重な御助言を下さいました同成岡博士に対して心から感謝する次第である。

#### 参 考 文 献

- 1) H. Favre : Schweizerische Bauzeitung, 60 Jahrg., 1942
  - 2) P. Lardy : Schweizerische Bauzeitung, 67 Jahrg., 1949
  - 3) J.Krettner : Ingenieur-Archiv, Bd. 22, Heft I, 1954
  - 4) P. Rongved : Diss. T.H. Berlin, 1945
  - 5) W. Fuchssteiner : Bauingenieur, 28 Jahrg., Heft 7, 1953
  - 6) N. Muschelišvili : ZAMM, Bd. 13, 1933
  - 7) S. Timoshenko : Theory of plates and shells, p. 133, p. 158, p. 231, 1940  
(昭. 30.10.10)
-