

円頂せき上の開水路急変流の力学

DYNAMICS OF RAPIDLY VARIED OPEN-CHANNEL FLOW
OVER A ROUND CRESTED WEIR

福岡 捷 二*・福岡 祐 介**

By Shoji FUKUOKA and Yusuke FUKUSHIMA

1. 序 論

流路床勾配が急激に変化する流れは、ダムを越流する流れ、水理構造物付近の流れなどで観察される。このような流れは、常流から射流に遷移し、その途中で支配断面を生ずることが多い。支配断面は、これより上流および下流の水面形を決める境界条件を与える断面であり、支配断面の位置およびその位置の水深を知り、水面形状を決定することは水工学上きわめて重要である。支配断面を含む流れの水面形に関して、圧力分布が静水圧とみなし得るような漸変流では系統的に研究されてきた^{1)~3)}。しかし、圧力分布が静水圧とみなし得ない急変流では、圧力は水深だけでは表現できない。このため、流速分布と圧力分布の算定がきわめて困難となり、急変流で支配断面を含む流れの水理は十分に明らかにされていない。本研究は、流線の曲率を無視し得ない円頂せき上の急変流の支配断面付近の流れを理論的に考察し、実験によって検討するものである。

開水路の急変流はダムの越流およびせきによる流量測定法と関連し、水理学の重要課題として古くから研究が行われてきた。一般的には、円頂せきを越える流れの流線が同心円状をなすと仮定し、粘性を無視して、遠心力による流速分布の変形と圧力分布の静水圧からのずれを考慮する解析が行われた。荒木⁴⁾は、流線が同心円状であるとして求めた流速分布をもとに水面での条件を考慮して、急変開水路流の水面形方程式を求めた。井田^{5),6)}は、同様の仮定に基づいてアーチダムを越流する流れおよび任意形状をもつ急変開水路流を解析した。岩崎⁷⁾は、標準越流頂および放物線形状をもつ越流頂形状に対して流量係数を解析的に求め、実測値と比較検討した。

さらに、全エネルギーを一定として水面形と底面圧力を求め、実測値と比較している⁸⁾。以上の解析では、流線を同心円状としているため、底面と直交方向の流速成分は無視されている。しかし、急変流は底面と直交方向の流速を無視し得ない流れであり、主流による遠心力だけを考慮する解析では不十分であると考えられる。

開水路流の支配断面に関しては、岩佐^{9),10)}がその数学的・水理学的意義を明確にしており、急変流の支配断面の算定においては運動量補正係数と圧力分布補正係数の適切な見積りが必要であることを示した。しかし、急変流の支配断面をどのように決定するかについては、明確にされていない。

急変流は開水路流に限定されず、自然界に広くみられる現象である。たとえば、貯水池流入端で下層に潜り込む密度流¹¹⁾、濁水時に河口部でみられる塩水くさび上の流れ¹²⁾も急変流である。

本研究の目的は、流線の曲がり大きい円頂せき上の開水路流れについて主流と直交方向の流速成分を無視することなく流速分布、圧力分布を解析的に求め、これを用い急変流の支配断面の位置、限界水深、フルード数、水面形を求めることにある。さらに、理論的に求めた流速分布、圧力分布を実験によって詳細に調べ、急変流の水面形方程式およびフルード数などの算定式の妥当性を検討する。最後に、射流域において固定境界形状の変化が流線形状の変化を引き起こし、これに伴う圧力分布の変形が上流側の水面形状にまで影響を及ぼすことを明らかにする。

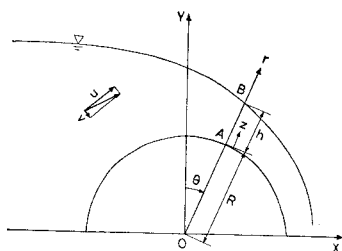
2. 開水路の急変流解析

(1) 基礎方程式

開水路流れの支配断面の位置とそこでの水深、および水面形状に対して、流線の曲率がどのように影響してい

* 正会員 Ph.D. 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 長岡技術科学大学助教授 工学部建設系



図一 円頂せき上の流れの模式図

れは射流となる。円頂せきの近くでは底面形状が急激に変化するため、この上の流れもまた大きな曲率をもつ流れとなる。この結果、圧力分布は静水圧分布から著しくはずれ、この領域の流れは漸変流として取り扱うことができない。

円頂せき上の流れを円筒座標系で表わす。図一に示すように、円頂せきの半径を R 、曲率中心を O とし、 O を原点とする円筒座標系を (r, θ) とする。 θ はせき頂で O になるものとし、時計回りに正とする。 z は底面上の点 A を原点とし、 r 方向を正とする局所座標であり、 z 座標でとった水深 (AB 間の距離) を h とする。 (X, Y) は O を原点とし、水平軸 X 、鉛直軸 Y とする直交座標 (デカルト座標) である。

流れは十分発達した二次元・定常乱流と考え、レイノルズ応力に比べて粘性応力は十分小さいと考え無視する。流速の θ 方向成分を v 、 r 方向成分 (あるいは z 方向成分) を w とする。このとき、連続式と運動方程式は次のように表わされる。

連続式

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r}(vr) = 0 \quad (1)$$

運動方程式

$$\frac{\partial u^2}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r}(uvr) + uv = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho} + \varrho \right) - \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \overline{u'^2} + \frac{\partial}{\partial r} \overline{u'v'r} + \overline{u'v'} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} uv + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} v^2 r - \frac{u^2}{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} + \varrho \right) - \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \overline{u'v'} + \frac{\partial}{\partial r} \overline{u'v'r} - \overline{u'^2} \right\} \quad (3)$$

ここで、 ρ は水の密度、 p は圧力、 u' 、 v' はそれぞれ u 、 v の変動流速成分であり、 ϱ は重力のポテンシャル、

$$\varrho = gY = gr \cos \theta \quad (4)$$

である。

(2) 流速分布と圧力分布

流速 u 、 v および圧力 p は原理的には式 (1)~(3) から求めればよいが、運動方程式の非線形性のためこのまま解くことは困難である。ここでは、次のように考え

るかを明らかにするため、図一に示す流れを考える。水平床水路におかれた円頂せきのせき頂付近で支配断面を生じ、これより上流で流れは常流、下流で流

る。せきを越える流れは急縮流であり、壁面 ($r=R$) からの境界層の発達 は小さく、粘性の影響は壁面のごく近傍に限られる。以下の取扱いでは、境界層の厚さが十分に小さいとして無視し、流れが全域にわたり非粘性流で近似されると考え、粘性の影響は壁面せん断力で考慮する。このとき、流速分布形、圧力分布形が解析的に求まる。いま、運動方程式 (2)、(3) においてレイノルズ応力の項を省略し、その後 $p/\rho + \varrho$ を消去すると、渦度 ω に関する式として

$$\frac{u}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + v \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

を得る。ここで、渦度 ω は、

$$\omega = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} ur \right) \quad (6)$$

である。支配断面付近の流れは水深が急激に減少する急縮流であり、壁面のごく近傍を除いて、重力項と圧力項が卓越している。このような流れは、近似的に渦なしとみなすことができる。渦なしの条件は、式 (6) から、

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} ur = 0 \quad (7)$$

であり、このとき流れの全領域で次のベルヌイの式が成立する。

$$\frac{1}{2g} (u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho g} + \frac{\varrho}{g} = E_0 \quad (8)$$

ここで、 E_0 は基準面を $Y=0$ としたときの全エネルギーである。

以上の準備をもとに流速分布式を導く。従来 の解析^{1), 5), 7)}では、せきを越える流れの流線が同心円状をなすと考えて、式 (7) で $v=0$ とおき、

$$\frac{\partial}{\partial r} ur = 0$$

を積分して、流速 u を求めている。すなわち、

$$ur = u(R+z) = \text{const.} \quad (9)$$

である。しかし、せきを越える流れは水深変化の大きい急変流であり、 θ 方向の流速 u とともに r 方向の流速 v も無視できない。ここでは、 $v=0$ の仮定をせずに、連続式 (1)、渦なしの式 (7) から流速分布を求め、さらに式 (8) から圧力分布を求める。式 (1)、(7) から v を消去すると、 u に関する 2 階線形偏微分方程式、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 3r \frac{\partial u}{\partial r} + u = 0 \quad (10)$$

を得る。この方程式の解として変数分離形を仮定し、

$$u = A(\theta)B(r)$$

を式 (10) に代入して解くと u が次のように求められる。

$$u = (a \sin \lambda \theta + b \cos \lambda \theta) \{ (R+z)^{-1+\lambda^2} + c(R+z)^{-1-\lambda^2} \} \quad (11)$$

同様の方法によって v は、

$$v = (-a \cos \lambda \theta + b \sin \lambda \theta) \{ (R+z)^{-1+\lambda^2} - c(R+z)^{-1-\lambda^2} \} \quad (12)$$

となる。ここで、式 (11), (12) 中の係数 a, b, c , 固有値 λ は境界条件から決定されるべきものである。

u, v に対する境界条件は、壁面 ($x=0$) および水面 ($z=h$) で次のように与えられる。すなわち、

$$z=0 \text{ で } v=0 \dots\dots\dots(13)$$

$$z=h \text{ で } \frac{u_1}{R+h} \frac{dh}{d\theta} - v_1=0 \dots\dots\dots(14)$$

$$\frac{1}{2g} (u_1^2 + v_1^2) + (R+h)\cos\theta = E_0 \dots\dots\dots(15)$$

式 (13) は底面での不浸透の条件、式 (14) は水面における運動学的条件、式 (15) は水面における力学的条件 ($p=0$) である。円頂せきの上・下流の境界条件には、後述するように種々の問題点があるが、ここでは、まず、図-2 に示すような境界形状と水面形状が異なる2つの理想な場合を考え、下流端の境界形状の違いによって、異なる流速分布が得られることを示す。いずれの場合も、無限遠上流 ($\theta = -\pi/2$) では、水深は十分大きく、流速は一樣である。Case A は、下流端 ($\theta = \pi/2$) で水が自由落下し、底面と直交する流速成分が零となる場合である。Case B は、円頂せきの下流が水平床で無限遠下流で X 方向に一樣流となる場合である。このとき、上流の境界条件は2つの場合について同一であり、

$$\theta = -\pi/2, z = \infty \text{ で } u=0, v=\text{一定} \dots\dots\dots(16)$$

下流の境界条件は、Case A の場合、

$$\theta = \pi/2 \text{ で } v=0 \dots\dots\dots(17)$$

Case B の場合

$$\theta = \pi/2, z = \infty \text{ で } u=0, v=\text{一定} \dots\dots\dots(18)$$

となる。

まず、Case A について係数 a, b, c , 固有値 λ を求める。式 (12) に式 (13) を代入し、 c を求めると次式を得る。

$$c=R^{2\lambda} \dots\dots\dots(19)$$

次に、式 (11), (12) に式 (16), (17) を適用すると、

$$a \sin\left(-\frac{\pi}{2}\lambda\right) + b \cos\left(-\frac{\pi}{2}\lambda\right) = 0 \dots\dots\dots(20)$$

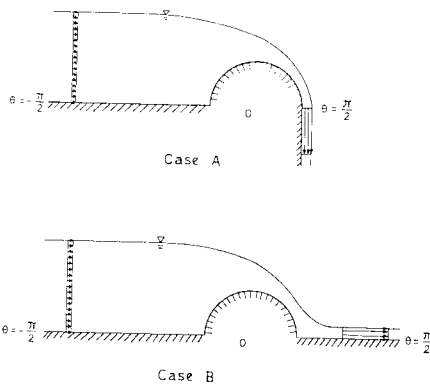


図-2 上流・下流の境界条件

$$-a \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) + b \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) = 0 \dots\dots\dots(21)$$

式 (20), (21) の a, b が自明でない解をもつ条件は、 a, b の係数行列式が零となることである。この条件から固有値 λ が求まり、

$$\lambda_k = \frac{1}{2} (2k-1) \quad k=1, 2, 3, \dots, \infty \dots\dots\dots(22)$$

となる。式 (21) から λ_k に対応する係数 b を求めると、

$$b = \frac{\cos \frac{\pi}{2} \lambda_k}{\sin \frac{\pi}{2} \lambda_k} a \dots\dots\dots(23)$$

を得る。式 (19), (23) の関係を式 (11), (12) に代入すると固有関数が求まり、これらの線形和として流速 u, v の一般解が求まる。

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \lambda_k \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \left\{ \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1+\lambda_k} + \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1-\lambda_k} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \lambda_k \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \left\{ \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1+\lambda_k} - \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1-\lambda_k} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

Case B の場合には、下流の境界条件として式 (18) を用いる。式 (11) に式 (18) を適用すると Case A の式 (21) の代わりに次式を得る。

$$a \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) + b \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) = 0 \dots\dots\dots(26)$$

Case A の場合と同様に式 (20) と (26) の a, b の係数行列式が零になる条件から固有値 λ が求まり

$$\lambda_k = k \quad k=1, 2, 3, \dots, \infty \dots\dots\dots(27)$$

となる。式 (27) の関係を用いて式 (26) より a, b を求めると、

$$\left. \begin{aligned} k=2m-1 \text{ のとき } a=0 \\ k=2m \text{ のとき } b=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

を得る。ただし、 m は正の整数である。式 (19), (28) の関係を用いると、Case B に対する流速 u, v の一般解は次のようになる。

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1} \cos \lambda_{2m-1} \theta \left\{ \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1+\lambda_{2m-1}} + \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1-\lambda_{2m-1}} \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m} \sin \lambda_{2m} \theta \left\{ \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1+\lambda_{2m}} + \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1-\lambda_{2m}} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1} \sin \lambda_{2m-1} \theta \left\{ \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1+\lambda_{2m-1}} - \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1-\lambda_{2m-1}} \right\}$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty} a_{2m} \cos \lambda_{2m} \theta \left\{ \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1+\lambda_{2m}} - \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1-\lambda_{2m}} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

以上のように下流の境界条件が Case A あるいは Case B で与えられる場合について流速分布が級数解で求められる。しかし、式 (24), (25) には a_k が、式 (29), (30) には b_{2m-1}, a_{2m} が未定係数として残されている。これらを決定するためには、まだ用いていない境界条件、式 (14), (15) を満たすことが必要である。一方、水深 h もまた未知数なため、これらを決定する式は高次の連立非線形方程式となり、容易に解くことはできない。また、実際の流れでは、跳水が生じるなど上・下流の境界形状と水面形状が 図-2 の Case A, Case B のような理想的な形をとることは考えられず、したがって式 (16)~(18) の境界条件が不明確である。さらに、式 (16), (18) のように無限遠点で与えられるのでは、もはや摩擦の影響を無視できず、非粘性の仮定そのものが破綻し、この点からも境界条件が曖昧となる。以上の理由により、級数解で求められた流速 u, v をそのまま水面形の解析に用いることはできない。以下では、 u, v に対し z の関数形が級数解と同じである近似解を導入し、流速の実測結果を用いて λ の値を定めることにより、実際の流れの境界条件の影響を λ の値に含めて考慮することを考えた。式 (24), (25) あるいは式 (29), (30) の u, v がそれぞれ z については関数形が同じであることからそれぞれの第 1 項をとり、 u, v を次のように近似する。

$$u = a(\theta) \{ (1+z^*)^{-1+\lambda} + (1+z^*)^{-1-\lambda} \} \dots\dots (31)$$

$$v = b(\theta) \{ (1+z^*)^{-1+\lambda} - (1+z^*)^{-1-\lambda} \} \dots\dots (32)$$

ここで、 $z^* = z/R$ であり、 $a(\theta), b(\theta)$ は θ の関数であることを示す。式 (31) を積分し、単位幅流量を求めると、

$$q = \int_0^h u dz = a(\theta) \frac{R}{\lambda} \{ (1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda} \} \dots\dots\dots (33)$$

ここで、 $h^* (=h/R)$ は無次元水深である。次に、式 (31), (32) を水面での境界条件、式 (14) に代入すると、

$$b(\theta) = \frac{a(\theta)}{1+h^*} \frac{(1+h^*)^\lambda + (1+h^*)^{-\lambda}}{(1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda}} \frac{dh^*}{d\theta} \dots\dots\dots (34)$$

を得る。式 (33), (34) から $a(\theta), b(\theta)$ を求め、式 (31), (32) に代入すると、流速 u, v の分布形が次のように決定される。

$$u = \frac{q}{R} \lambda \frac{(1+z^*)^{-1+\lambda} + (1+z^*)^{-1-\lambda}}{(1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda}} \dots\dots (35)$$

$$v = \frac{q}{R} \frac{dh^*}{d\theta} \lambda \frac{(1+h^*)^{-1+\lambda} - (1+h^*)^{-1-\lambda}}{\{ (1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda} \}^2} \times \{ (1+z^*)^{-1+\lambda} - (1+z^*)^{-1-\lambda} \} \dots\dots\dots (36)$$

次に圧力分布を求める。圧力 p を静水圧 p_0 と静水圧からの差圧 p' の和で表わす。静水圧 p_0 は式 (3) で流速 u, v を零にしたときの圧力と等しく

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_0}{\rho} + \varrho \right) = 0$$

を満たす。上式を積分し、水面で $p_0 = 0$ となることを考慮すると、静水圧として

$$p_0 = \rho g (h - z) \cos \theta \dots\dots\dots (37)$$

が得られる。式 (37) をベルヌイの式 (8) に代入し、水面で $p' = 0$ の条件を考慮すると、静水圧からの差圧 p' は、

$$p' = \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + v_1^2) - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \dots\dots\dots (38)$$

により求まる。ここで、 u_1, v_1 は水面での流速である。式 (38) に式 (35), (36) を代入すると、

$$p' = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{q}{R} \lambda \right)^2 \frac{1}{\{ (1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda} \}^2} \cdot [\{ (1+h^*)^{-1+\lambda} + (1+h^*)^{-1-\lambda} \}^2 - \{ (1+z^*)^{-1+\lambda} + (1+z^*)^{-1-\lambda} \}^2] + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{q}{R} \lambda \frac{dh^*}{d\theta} \right)^2 \cdot \frac{\{ (1-h^*)^{-1+\lambda} + (1+h^*)^{-1-\lambda} \}^2}{\{ (1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda} \}^4} \cdot [\{ (1+h^*)^{-1+\lambda} - (1+h^*)^{-1-\lambda} \}^2 - \{ (1+z^*)^{-1+\lambda} - (1+z^*)^{-1-\lambda} \}^2] \dots\dots (39)$$

となる。

流速分布、圧力分布形が求まったので、これらの性質を調べる。 θ 方向の流速 u は水深 h と底面の曲率半径 R の比 $h/R (=h^*)$ と指数 λ によって変化する。式 (35) の流速分布形に対して λ がどのように影響するかを調べるため、 $h/R = 1$ の条件に対し、 $\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ として流速分布を求めたのが 図-3 である。流速は断面平均流速 $\bar{u} (=q/h)$ で無次元化されている。 $\lambda = 0$ とした解は、 $v = 0$ の仮定から求めた式 (9) と等しい。流速分布は λ によって大きく変化する。 $\lambda = L/2$ では、 z 方向に単調に減少し、 $\lambda = 0$ の分布形にきわめて近い分布形となる。 λ が大きくなるに従って、流速の z 方向への減少割合が小さくなり、 $\lambda = 2$ では逆に水面に近づ

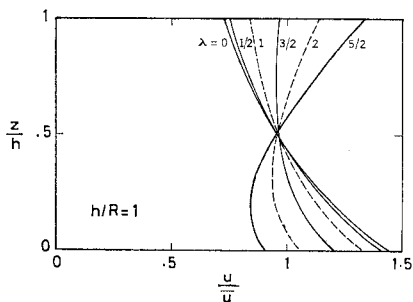


図-3 理論による流速分布

くに従って増加する分布形となる。

(3) 水面形方程式

せきを越える流れは、急縮流であり、乱れの影響は壁面のごく近傍に限られる。さらに、壁面近傍では境界層近似が成り立つものとする、式(2)の乱れに関する項のうち、 $\partial \bar{u}'^2 / \partial \theta$, $\bar{u}' \bar{v}'$ は $\partial \bar{u}' \bar{v}' / r \partial r$ に比べて無視できる。境界条件として式(13), (14), (15)を用い、式(2)を底面 ($z=0$) から水面 ($z=h$) まで積分すると次式を得る。

$$\frac{d}{d\theta} \int_0^h \left(u^2 + \frac{p'}{\rho} \right) dz + \int_0^h uv dz = gh(R+h) \sin \theta - g \cos \theta h \frac{dh}{d\theta} - \frac{T_0}{\rho} R \quad (40)$$

ただし、 $T_0 (= -\rho \bar{u}' \bar{v}'|_{z=0})$ は、底面せん断力である。

式(40)に流速分布(35), (36)と圧力分布(39)を用い積分を実行する。演算においては、流速 u, v が連続式(1)、渦なし条件式(7)、水面での境界条件式(14)を満たすことに留意する。積分の後、水深の変化率 $dh^*/d\theta$ について整理すると、

$$dh^*/d\theta = f_1/f_2 \quad (41)$$

を得る。ここで、 f_1, f_2 は次式で表わされる。

$$f_1 = (1+h^*) \sin \theta - i_f \quad (42)$$

$$f_2 = \cos \theta - G\phi(h^*) \quad (43)$$

$$\phi(h^*) = 4\lambda^3 \frac{(1+h^*)^4 + (1+h^*)^{-4}}{(1+h^*)^3 \{ (1+h^*)^2 - (1+h^*)^{-2} \}^3} \quad (44)$$

$$G = q^2/gR^3 \quad (45)$$

$$i_f = \tau_0/\rho gh = \frac{1}{2} f' \alpha_\omega G h^{*3} \quad (46)$$

ここで、 f' は摩擦抵抗係数、 α_ω は底面流速 u_b と平均流速 \bar{u} の比の2乗 ($= (u_b/\bar{u})^2$) であり、式(35)より求められる。 G は、単位幅流量 q と底面の半径 R より決まる無次元数であり、水面形状の決定に最も重要な役割を果たしている。さらに、流速分布の指数 λ 、摩擦抵抗係数 f' が与えられると水面形状は一義的に決定される。

(4) 支配断面の位置と限界水深

支配断面の位置 θ_c および限界水深 h_c^* は、水面形方程式(41)の分母・分子がともに零になる条件より求まる。すなわち、

$$(1+h_c^*) \sin \theta_c - \frac{f'}{2} \alpha_\omega G h_c^{*3} = 0 \quad (47)$$

$$\cos \theta_c - G\phi(h_c^*) = 0 \quad (48)$$

の連立方程式から求めることができる。また、支配断面での水深変化率 $(dh^*/d\theta)_c$ は、次の極限操作

$$\left(\frac{dh^*}{d\theta} \right)_c = \lim_{\theta \rightarrow \theta_c} \frac{df_1/d\theta}{df_2/d\theta} \quad (49)$$

を行い求めることができるが、上式の解は相当複雑なので、ここでは省略する。

式(47), (48), (49)により、支配断面の位置 θ_c 、限界水深 h_c^* 、水深変化率 $(dh^*/d\theta)_c$ が求められるので、この位置を境界条件として上・下流の水深を式(41)から計算できる。

(5) 急変流のフルード数と微小擾乱の波速

フルード数 F_0 は、圧力分布が静水圧とみなし得る漸変流では断面平均流速 \bar{u} と微小擾乱の波速 c_0 の比

$$F_0 = \bar{u}/c_0 \quad (50)$$

で定義される。ここで、微小擾乱の波速 c_0 は、

$$c_0 = \sqrt{gh \cos \theta} \quad (51)$$

で表わされる。添字0は漸変流であることを示す。したがって、漸変流のフルード数 F_0 は

$$F_0 = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh \cos \theta}} = \left(\frac{q^2}{gh^3 \cos \theta} \right)^{1/2} \quad (52)$$

となる。漸変流では、支配断面は $F_0=1$ で定義され、水面形方程式の分母=0の条件と一致する。しかし、流線の曲がりが無視できない急変流では、微小擾乱の波速 c は式(51)では表わし得ない。そこで新たに急変流の波速とフルード数を定義する必要がある。いま、急変流の諸量に対し、添字 r をつける。水面形方程式の分母=0、すなわち、式(48)が成立するとき $F_r=1$ となるように急変流のフルード数 F_r と微小擾乱の波速 c_r を定義する。これらをそれぞれ漸変流のフルード数 F_0 、波速 c_0 との比で表わせば、

$$\frac{F_r}{F_0} = \left(\frac{c_r}{c_0} \right)^{-1} = \left[4\lambda^3 h^{*3} \frac{(1+h^*)^4 + (1+h^*)^{-4}}{(1+h^*)^3 \{ (1+h^*)^2 - (1+h^*)^{-2} \}^3} \right]^{1/2} \quad (53)$$

となる。

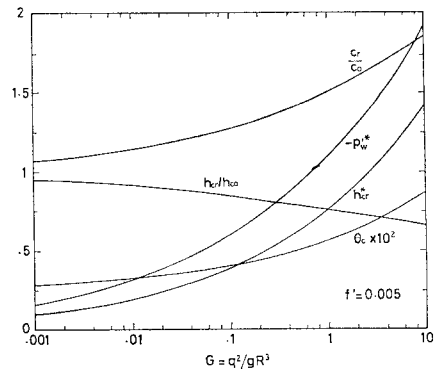


図-4 $\theta_c, h_{cr}^*, c_r/c_0, h_{cr}/h_{c0}$ の G に対する変化

図-4 は、パラメーター G を変化させ $\lambda=0.42$ (後述する) として、支配断面の位置 θ_c 、限界水深 h_{c*} 、底面での差圧 p_w' を無次元化した底面での無次元差圧 $p_w'^*$ ($=p_w'/\frac{1}{2}\rho u_0^2$) の支配断面での値、微小擾乱の波速 c_r/c_0 、急変流の限界水深と漸変流の限界水深の比 h_{cr}/h_{c0} を計算したものである。ただし、 u_0 はせき頂の平均流速であり、摩擦抵抗係数を $f'=0.005$ としている。 G が大きくなると限界水深 h_{c*} ($=h_{cr}/R$) が増加するため、相対的に底面の曲率 ($=1/R$) が大きくなり、底面での差圧 $p_w'^*$ が大きく減少する。これに伴って c_r/c_0 が 1 より大きくなり、 θ_c が増加し、 h_{cr}/h_{c0} が 1 より小さくなる。つまり、 G が大きくなるに従って、支配断面の位置が下流に移動し、限界水深は漸変流理論

から求めた値より小さくなるのがわかる。

(6) 圧力補正係数と運動量補正係数

流線の曲がりに伴う圧力分布と流速分布の変化をさらに検討するため、圧力補正係数 α と運動量補正係数 β を求める。これらは次のように定義される。

$$\alpha = \frac{\int_0^h p dz}{\frac{1}{2} \rho g h^2 \cos \theta} = 1 + \frac{\int_0^h p' dz}{\frac{1}{2} \rho g h^2 \cos \theta} \dots\dots (54)$$

$$\beta = \frac{1}{h} \int_0^h \left(\frac{u}{\bar{u}}\right)^2 dz \dots\dots (55)$$

式 (54) に式 (39) を、式 (55) に式 (35) を代入すると、 α, β が次のように求まる。

$$\alpha = 1 + F_0^2 \alpha^* \dots\dots (56)$$

$$\beta = \frac{\lambda^2 h^*}{\{(1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda}\}} \left[\frac{4-8\lambda^2}{1-4\lambda^2} - \frac{1}{1+h^*} \left\{ \frac{(1+h^*)^{2\lambda}}{1-2\lambda} + 2 + \frac{(1+h^*)^{-2\lambda}}{1+2\lambda} \right\} \right] \dots\dots (57)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \alpha^* = & \frac{1}{h^*} \left\{ \frac{\lambda h^*}{(1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda}} \right\}^2 \left\{ \left(\frac{h^*}{1+h^*} + \frac{1}{1-2\lambda} \right) (1+h^*)^{-1+2\lambda} + 2 \left(\frac{h^*}{1+h^*} + 1 \right) (1+h^*)^{-1} \right. \\ & + \left. \left(\frac{h^*}{1+h^*} + \frac{1}{1+2\lambda} \right) (1+h^*)^{-1-2\lambda} - \frac{4-8\lambda^2}{1-4\lambda^2} \right\} + \frac{1}{h^*} \left[\lambda h^* \frac{dh^*}{d\theta} \frac{(1+h^*)^{-1+\lambda} + (1+h^*)^{-1-\lambda}}{\{(1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda}\}^2} \right]^2 \\ & \cdot \left\{ \left(\frac{h^*}{1+h^*} + \frac{1}{1-2\lambda} \right) (1+h^*)^{-1+2\lambda} - 2 \left(\frac{h^*}{1+h^*} + 1 \right) (1+h^*)^{-1} + \left(\frac{h^*}{1+h^*} + \frac{1}{1+2\lambda} \right) (1+h^*)^{-1-2\lambda} \right. \\ & \left. - \frac{8\lambda^2}{1-4\lambda^2} \right\} \dots\dots (58) \end{aligned}$$

圧力補正係数中の係数 α^* は、 θ 方向の流速差に起因する第 1 項と r 方向の流速差に起因する第 2 項からなる。第 2 項は従来、同心円の流れを仮定し、無視してきた水深変化の影響を示す項である。

図-5 は、式 (47)~(49) から支配断面の位置 θ_c 、限界水深 h_{c*} 、水深変化率 $(dh^*/d\theta)_{cr}$ を求め、この位置 ($\theta=\theta_c$) での α, α^*, β を計算し、 G に対して示したものである。図には底面での無次元差圧 $p_w'^*$ も示されている。運動量補正係数 β は G の広い範囲でほとんど変化せず 1.0 にきわめて近い値になるのに対し、圧力補正係数 α と α に関連する α^* の変化は大きい。 α は $G >$

1.5 の範囲で負となり、この条件ではせき頂付近から下流で負圧を生ずることがわかる。水面形に関する従来理論では、流速分布が一様分布からはずれる影響を漸変流理論に準じて運動量補正係数あるいはエネルギー補正係数で考慮することが多かった。しかし、圧力分布については解析的取扱いの便宜上静水圧分布の仮定が行われている。図-5 をみると、流線の曲がりの影響が比較的小さい $G=0.001$ (この条件は $q=1000 \text{ cm}^2/\text{s}$ とすると $R=100.7 \text{ cm}$ に対応する) でも $\alpha=0.9$ であり、静水圧の 1 割程度圧力が減少する。このことは、急変流においては解析上の複雑さを犠牲にしてもなお、流線の曲がりによる静水圧からの差圧を的確に考慮する必要があることを示している。

3. 実験

(1) 実験の概要

前節まで展開された理論の適合性を検討するため、室内実験を行った。実験装置の概要を図-6 に示す。番号 1~15 で示す測線の底面には底面圧力測定用の圧力タップが取り付けられている。水面の位置はポイントゲージにより (X, Y) 座標系で測定した後、 (θ, r) 座標に換算した。流速分布・圧力分布測定は番号 4~12 の測線

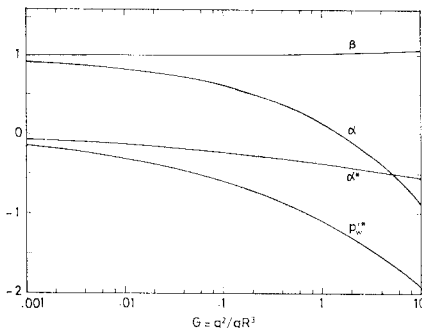


図-5 支配断面位置での圧力補正係数と運動量補正係数

表-1 実験条件

底面の曲率半径 R (cm)	25.1
水路幅 B (cm)	40.0
流量 Q (l/s)	35.7
水温 T (°C)	12.2
レイノルズ数 Re	7.20×10^4
G	0.0514

上で行った。流速測定にはピトー管を用いたが、流線の曲がり大きい流れであるので静圧の測定には注意を要する。静圧管は 図-7 に示すような厚さ 0.5 mm の塩化ビニル製の案内板と外径 3 mmφ の黄銅管より成る。黄銅管は流れをなるべく乱さないようにくさび状に取り付けてあり、案内板を流線と平行に設置することにより、案内板に開けられた 0.5 mmφ の穴で静圧を測定する。流れは 2 次元とみなすことができるので横方向に約 5 cm 離れた同じ高さの点で総圧を測定し、総圧と静圧から流速を求める。総圧の測定には市販のピトー管を用いた。実験条件を 表-1 に示す。ここで G は式 (45) で定義した無次元パラメーターである。得られた実験結果を総括して 表-2 に示す。

(2) 流速分布と圧力分布

せきを越える流れは急縮流であり、ポテンシャル流でよく近似できる^{(11),(12)}。ここでは、実験で得られた水面形状を境界条件としてリラクゼーション法⁽¹³⁾によって流関数 ψ を計算し、先に得られた理論の検証に用いた。

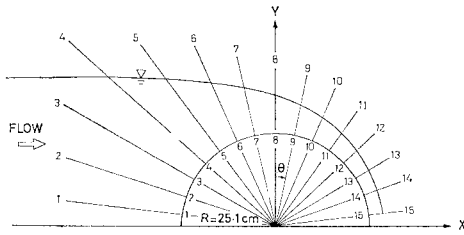


図-6 実験装置(せきA)

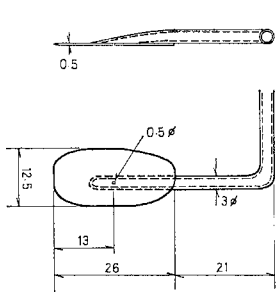


図-7 静圧管

表-2 実験結果

測点番号 No.	測点位置 θ (rad)	水深 ¹⁾ h (cm)	水深変化率 $dh/d\theta$ (cm)	壁面圧力 p_{w0}/γ (cm)	壁面の圧差 p_w'/γ (cm)	$h^* = \frac{h}{R}$	$p_{w0}' = \frac{p_{w0}'}{\gamma} - \frac{1}{2} \rho u_0^2$
1	-1.451	288.4	-2400	34.84	0.37	11.49	0.067
2	-1.254	95.2	-290.3	30.02	0.37	3.79	0.067
3	-1.047	49.8	-86.2	24.89	-0.02	1.98	-0.003
4	-0.840	30.9	-34.4	20.26	-0.36	1.23	-0.065
5	-0.635	20.2	-29.4	16.00	-1.04	8.05	-0.191
6	-0.419	15.0	-24.4	12.02	-1.68	0.598	-0.308
7	-0.221	11.2	-14.6	8.67	-2.26	0.446	-0.414
8	-0.009	8.6	-9.0	5.74	-2.88	0.343	-0.527
9	0.202	6.9	-6.0	3.24	-3.52	0.275	-0.644
10	0.403	5.7	-4.6	0.82	-4.40	0.227	-0.805
11	0.609	4.8	-3.2	-1.26	-5.23	0.191	-0.956
12	0.814	4.2	-2.8	-3.71	-6.62	0.167	-1.210
13	1.023	3.8	-1.8	-4.21	-6.19	0.151	-1.131
14	1.222	3.6	0	1.26	0.03	0.143	0.006
15	1.447	5.2	—	21.14	20.5	0.207	3.747

- 水深 h の測定法は 図-6 に示されている。
- $p_{w0}'/\gamma = p_{w0}/\gamma - p_{w00}/\gamma$ (p_{w00} は壁面の静水圧)
- u_0 はせき頂での平均流速 $u_0 = q/h|_{\theta=0}$

上・下流の境界条件としては、せきの上流 ($X^* = X/R = -5$) で一様流、せきの下流端 ($\theta = \pi/2$) で流線が同心円(図-2, Case A)になるとして与えた。

図-8 はリラクゼーション法によって求めた流関数を用い、流線を描いたものである。流線は円頂せきの前からせき頂にかけて、下に凸から上に凸へと急激に変化し、流線の曲がりの効果が大きいことが理解される。せきの前面では流線の曲がりによる遠心力が下向きに作用するため、圧力は静水圧に比べて大きくなり、下流では遠心力が上向きに作用するため、圧力は静水圧より小さくなる。

図-9 はせき頂の平均流速 $u_0 (=q/h_0, h_0 = h|_{\theta=0})$ で無次元化した No. 4~12 の測線上の流速分布を測定したものである。ピトー管では、その原理上流速ベクトルの絶対値 $w (= \sqrt{u^2 + v^2})$ を測定することになる。 $w^* (= w/u_0)$ の実測値を○印、理論値を実線で示す。点線と破線はそれぞれ $u^*, v^* (= u/u_0, v/u_0)$ の理論値である。理論値の計算では、水深 h , 水深変化率 $dh/d\theta$ の実測値を与え、式 (35), (36) に含まれる指数 λ を変化させて、せき頂付近 (No. 7, 8, 9) での実測流速分布と最もよく一致するような λ の値を求め、 $\lambda = 0.42$ を得た。本実験に用いた円頂せきの境界形状は、図-2 の Case B と同じである。しかし、実験では円頂せきの約 1 m 下流で跳水を生じており、Case B の水面形とは下流側の形状がまったく異なっている。したがって、実験で得た $\lambda = 0.42$ と数学的に求めた式 (27) の固有値との関連を議論することは難しい。 $\lambda = 0.42$

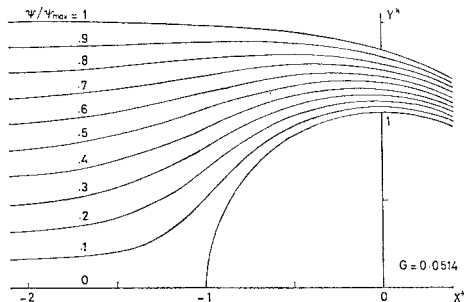


図-8 円頂せきを越える流れの流線 (ポテンシャル流れの数値解)

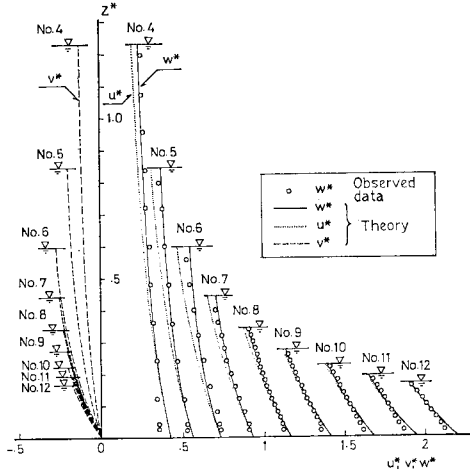


図-9 無次元流速分布

は、こうした複雑な境界条件（水面形状）を反映した値と考えるのが妥当であろう。図-9 および以下の議論ではすべてこの値を用い、理論値を計算した。静流管の大きさの制約から壁面から 6 mm までの測定しか行っていないが、測定の範囲では粘性の影響は顕著にはみられず、流速は壁面のごく近傍で最大値をもつ。せき頂から離れるに従って理論値は実験値からややはずれる傾向にあるが、これは主として流速分布を式 (24), (25) あるいは式 (29), (30) の無限級数解の第 1 項の関数形だけで近似し λ を一定としたためであると考えられる。本解析で考慮した ν の効果は、水深変化率の大きいせきの上流側 (No. 4~7) で大きく、せき頂 (No. 8) でも水面の値は $v^* = 0.23$ であり無視し得る量ではない。せきの下流にいくと水面勾配が小さくなり、相対的に v^* が小さくなる。

次に、静圧管で測定した圧力 p より静水圧を差し引き、差圧 p' と理論値と比較した。静水圧 p_0 は式 (37)

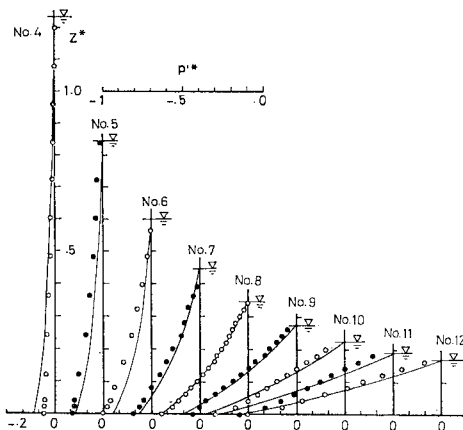


図-10 無次元差圧分布

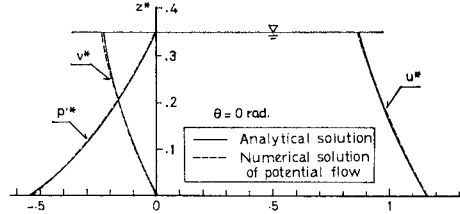


図-11 せき頂 ($\theta=0$) での流速分布・圧力分布の解析解と数値解の比較

から計算する。図-10 は測定した差圧をせき頂の平均流速 u_0 で無次元化し ($p'^* = p' / \frac{1}{2} \rho u_0^2$), $\lambda = 0.42$ として式 (39) より計算した理論値と比較したものである。圧力は静圧管と底面 ($z^* = 0$) に取り付けられた圧力管で測定した。両者の測定値はいずれの測線でも連続的に変化しており、ここで用いた静圧管が十分な精度で測定可能であることを示す。せきの両側で理論値は実測値とややずれるが、理論値は差圧の実測値をよく説明する。

図-11 は、理論とリラクゼーション法による数値解 (以下で数値解とよぶ) より求めた流速分布と圧力分布をせき頂 ($\theta=0$) で比較したものである。流速 u^* , v^* と差圧 p'^* に対して、両者の差異はわずかである。

図-12 は、底面での無次元差圧 $p_w'^*$ の実測値を本理論 (実線), 数値解 (破線), 流線が同心円状であると仮定した岩崎⁷⁾ の理論 (一点鎖線) と比較したものである。本理論はせきの上流 ($\theta < -\pi/6$) で数値解と若干ずれているが, $\theta > -\pi/6$ では数値解とほぼ一致し, また実測値をよく説明する。岩崎の理論では ν 成分を考慮していないために全般的に差圧を少なく見積っており, またこの理由により, せき上流側 ($\theta < -\pi/3$) で差圧が正になることを説明できない。本理論では r 方向の流速成分の影響を合理的に取り込んでおり, せきの上流側で差圧が正になる点を説明できる。せきの上流で理論値と数値解とに若干の差が現われるのは, 理論では流速分布の指数 λ をせき頂付近の実測値に適合させていることから, せきの上流になるほど流速分布の精度が若干悪くなるためと考えられる。

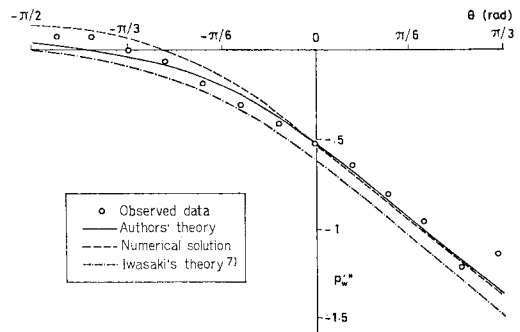


図-12 壁面での無次元差圧分布

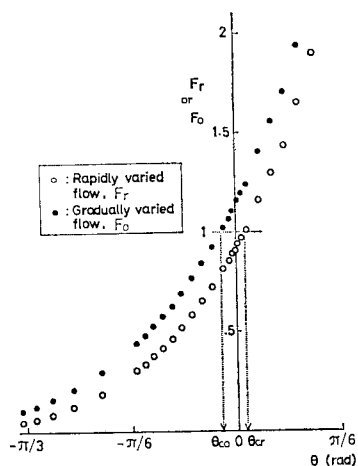


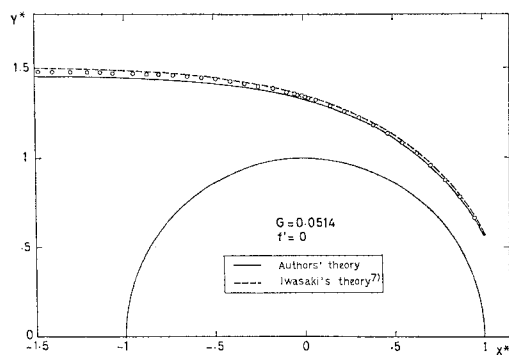
図-13 急変流のフルード数 F_r と漸変流のフルード数 F_o の比較

(3) 支配断面の位置と水面形状

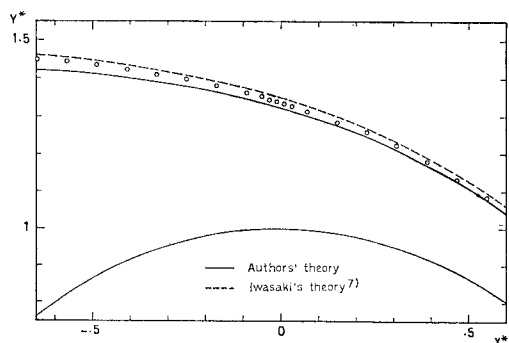
流れの支配断面がせき上のどこで生じているかを精度よく直接測定することはできない。ここでは 2. (5) で新しく定義したフルード数 F_r の流下方向の応布より支配断面の位置を推定する。図-13 は式 (53) で急変流のフルード数 F_r を求め、漸変流のフルード数 F_o (式 (52)) と比較したものである。 F_r が 1 となる位置を急変流の支配断面と定義する。漸変流のフルード数 F_o はせき頂 ($\theta=0$ rad) より上流で 1 を越え、 $\theta_{c0} = -0.08$ rad 付近で支配断面を生ずることになる。支配断面の物理的意味を考えると、これは正しくないことが明らかである。流量一定のもとでは、常流から射流に遷移する流れは、流路の途中で流路床勾配が緩勾配から急勾配に変化したために生ずる。また、射流領域では水深は下流の状態に影響されない。このことを考えると、支配断面の現われる位置は、流路床勾配が急勾配になっている位置、すなわち、せき頂もしくはこれよりも下流でなければならない注1)。一方、急変流として定義したフルード数はせき頂より下流で 1 を越え、支配断面がせきの下流に現われることを示している。以上のように、流線の曲がりが無視できない流れでは静水圧分布を仮定した漸変流のフルード数を用いると、支配断面の位置を正しく推定することができない。この場合には流線の曲がりを考慮したフルード数式 (53) を用いる必要がある。

次に、円頂せき上の水面形状について考察する。式 (41) により水面形状を計算するためには、底面摩擦抵抗係数 f' を与える必要がある。しかし、急変流の条件下での底面せん断力についてはこれまで十分な研究がな

注1) 流路床勾配が急勾配か緩勾配かは限界勾配との大きさで決まる。2次元水路の限界勾配 i_c は、 $i_c = f'/2\alpha$ (α : エネルギー補正係数) で与えられる。



(a)



(b) 拡大図

図-14 水面形状の計算値と実測値の比較

く、 f' の値については不明な点が多い。ここでは、 $f'=0$ として水面形を計算し、他の研究者の方法および実験値と比較する。

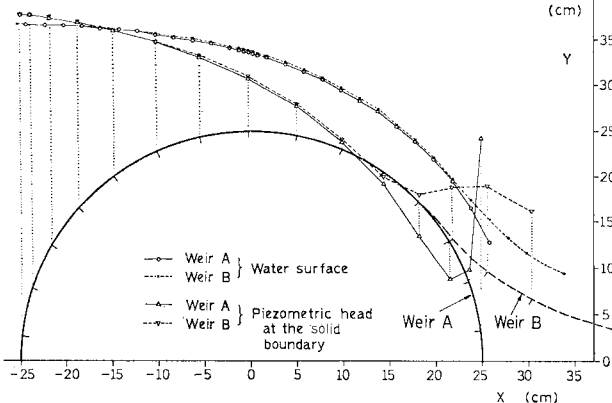
図-14(a) は式 (41) により計算した水面形状を実験値と比較したものである。図-14(b) は、図-14(a) のせき頂付近を拡大したものである。これらの図中には、流線が同心円状になるとし、エネルギー一定の条件から水面形を計算する岩崎の理論値⁷⁾を併記した。岩崎と同じ流速分布式 (9) を用いて水面形方程式を求めた荒木の方法⁹⁾は $f'=0$ の条件では岩崎の理論曲線と一致する。実験値は、せきの上流で本理論と従来理論の中間に位置し、せきの下流で本理論の曲線に近づく傾向がある。しかし、これらの図からは本理論が従来理論に比べより有用であるかは明らかでない。次に水面形に及ぼす摩擦の効果について論じ、本理論と従来理論の違いを示す。理論計算に用いた $f'=0$ の条件では、式 (47) より支配断面はせき頂 ($\theta_c=0$ rad) で生ずることになる。しかし、現実の流れでは底面摩擦が存在するので、図-13 で検討したように支配断面の位置はせき頂よりわずかに下流となる。一方、支配断面の位置がせき頂から少しずれても、式 (48) において $\cos \theta_c \approx 1$ であるので限界水深 h_c の大きさはほとんど変化しない。図-14 に示すように本理論で計算される限界水深は、せき

頂の水深の実測値よりわずかに小さいので、摩擦を考慮した解析を行い支配断面の位置を下流に移動させるとさらに実測値に近づくことになる。これに対して、従来の理論で計算される限界水深はせき頂の水深の実測値より大きいので、支配断面がせき頂より下流になると、計算値は実測の水面形状に比べさらに過大な水深を与えることになる。従来の理論で限界水深が大きく見積られるのは、 v の効果を見逃したことから圧力の予測精度が劣るためである。

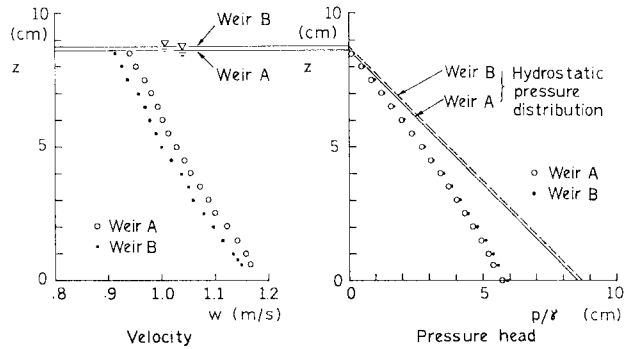
(4) 射流域での圧力変化の上流への伝播

一般に射流領域では水面の微小擾乱の波速は流速より小さく、その結果、水面形状は下流の状態の影響を受けないといわれている。ここでは、射流においても下流の固定境界形状（底面形状）に起因する流線の曲がり方がそれより上流の水面形に影響することを示し、それが圧力波の伝播によることを明らかにする。

図一15 は、せきの下流の境界形状だけが 図一6 の装置、せき A と異なる、せき B で測定した水面形状と底面でのピエゾ水頭 ($=p/\gamma + Y_0$) をせき A で得られた測定結果と比較したものである。実験条件は 表一1 と同じである。 $X \leq 18 \text{ cm}$ では 2 つのせきは同じ境界形状であるが、この範囲でも水深はせき B の方がやや大きくなっている。せき B では、下流の境界形状が上に凸から下に凸へと変化しているため、底面での差圧は、負から正に急激に変化する。圧力の変化は、射流領域でも上流に伝播することができる。この場合には下流で差圧が大きくなった影響はせき頂付近にまで及び、この位置でせき B のピエゾ水頭はせき A のピエゾ水頭より 2 mm 程度大きくなっている。つまり、射流域においても下流の境界形状の変化によって圧力分布が変化し、この影響が上流に及び水深の変化をもたらしている。せき A でも下流



図一15 下流の境界形状の異なる 2 つのせき上の水面形状とピエゾ水頭



図一16 せき A とせき B のせき頂での流速分布と圧力分布

端に近い測点では、ピエゾ水頭がさらに急激に大きくなっている。せき A の下流端は、図一2 の Case B のようによどみ点となっており、このため、圧力水頭が急増していると考えられる。この圧力の増加が上流にまで伝播し、下流側の 2, 3 の測点のピエゾ水頭を上昇させている。

図一16 は、2 つの実験におけるせき頂（測線 No. 8）での流速分布と圧力分布を比較したものである。ただし、圧力分布は水頭 (head) で表わし、それぞれの静水圧分布を実線（せき A）と破線（せき B）で記している。図からわかるように、下流の境界形状の異なる影響は、せき頂でも顕著であり、せき A の圧力水頭は各高さでせき B の圧力水頭に比べ小さくなっている。この圧力水頭の減少は速度水頭の増加をもたらす、せき A の流速はせき B の流速に比べて大きくなる。本論の解析では、下流の境界形状の影響は流速分布を決定する係数 λ に取り入れられていると解釈される。したがって、潜りぜきなどのように下流端の流れが本実験の流れと著しく異なった場合には、 λ の値が変化する可能性がある。

以上のように、射流領域においても下流の境界形状の変化は、圧力の変化となってかなり上流にまで影響を与え、その結果、流速分布・水面形状を変化させることになる。特に、高さが低い水利構造物を越える流れでは、この点を考慮する必要がある。

4. 結 論

常流から射流に遷移する急変流を円頂せき上の流れを実例として理論的に解析し、次の結論を得た。

(1) 連続式と渦なしの条件から主流とこれに直交する流速分布の級数解を導いた。水面形の解析を行うため、底面と直交する方向の関数形が級数解と等しい近似解を導入し、実験値を用いて、流速分布と圧力分布に対する近似解の有効性を確

認した。

(2) 上述の流速分布・圧力分布を考慮して、急変流の水面形方程式を導いた。水面形方程式から急変流のフルード数、微小擾乱の波速を新たに定義し、これらが急変流の支配断面の位置を知るうえで有用であることを示した。

(3) 水面形方程式は、円頂ぜき上の水面形を適切に表現できる。

(4) 運動量補正係数、圧力補正係数が流線の曲率の増大に伴ってどのように変化するか検討し、従来の解析でしばしば無視されてきた圧力補正係数の重要性を示した。

(5) 射流域では、水面の微小擾乱は上流には伝わらないが、下流の流線の急激な変化に伴う圧力の急変は上流に伝播し、これによって水面形状もまた影響を受けることを示した。このことから、急変流においては下流側の固定境界形状が射流域の水面形状に対しても重要な役割を果たすことを明らかにした。

以上、本論文において円頂ぜき上の流れに対し、鉛直方向の流速成分を考慮した支配断面の位置および水面形を求めることができた。このような急変流解析を任意の境界形状をもつ流れに対して適用すること、流速分布の厳密解(級数解)を用いた解析などについては今後の課

題としたい。

参考文献

- 1) 本間 仁：水理学，丸善，pp. 130～147，1967.
- 2) 岩佐義朗：水理学，朝倉，pp. 121～129，1967.
- 3) 本間 仁・安芸皎・編：物部水理学，岩波，pp. 224～225，1962.
- 4) 荒木正夫：弯曲底面開水路を流れる底面に垂直方向の速度成分を無視できない定常流れ，土木学会論文集，第24号，pp. 58～67，1955.
- 5) 井田至春：ダムを越流する流れの解析的研究，土木学会論文集，第32号，pp. 1～9，1956.
- 6) 井田至春：鉛直曲率を有する任意断面形開水路流れ，土木学会論文集，第39号，pp. 22～33，1956.
- 7) 岩崎敏夫：越流頂余水吐きの流量係数について，土木学会論文集，第43号，pp. 29～37，1957.
- 8) 本間 仁・石原藤次郎編：応用水理学中巻（I），丸善，p. 129.
- 9) 岩佐義朗：開水路における定常流の一般理論について，土木学会論文集，第69号，pp. 9～16，1960.
- 10) 岩佐義朗：開水路流れの基礎理論，水工学シリーズ64-01，土木学会水理委員会，pp. 1～55，1964.
- 11) 福岡捷二・福岡祐介・中村健一：2次元貯水池の潜り込み水深と界面形状，土木学会論文報告集，第302号，pp. 55～65，1980.
- 12) 福岡捷二・福岡祐介・守屋祥一・新庄高久：河口密度流の流動機構と塩水くさびの支配断面，土木学会論文報告集，第327号，pp. 61～71，1982.
- 13) 土木学会水理委員会：水理公式集，土木学会，pp. 12～13，1971.

(1982.1.22・受付)