

連続体解析に用いる一つの平衡モデルとその応用[†]FORMULATION OF AN EQUILIBRATING FINITE ELEMENT AND ITS
APPLICATION TO SOLID CONTINUUM ANALYSIS

豊島 史郎*・中西 宏**・波田 凱夫***

By Shiro TOYOSHIMA, Hiroshi NAKANISHI and Yoshio NAMITA

1. 緒 言

有限要素法においては、その離散化の定式過程に応じて、変位の適合条件（変位の連続性）を基準とする変位モデル、力の平衡条件（つり合いの微分方程式と表面力の連続性）を基準とする平衡モデル、両条件を平均的に満たそうとする混合モデル、あるいは要素境界上の変位の連続性やつり合い条件を平均的に満たそうとするハイブリッドモデルなど種々の要素族が存在している。変位モデルと平衡モデルの特徴は、ひずみエネルギーを尺度にとるとき、前者ではこれを過小に、後者では過大に評価することでいい表わせるが、混合モデルやハイブリッドモデルではその基礎となる変分原理¹⁾の性格から、ひずみエネルギーがどのように評価されるかは一義的には述べられない。また、弾塑性解析によって構造物の崩壊荷重を求めるときには、変位モデルが上界、平衡モデルが下界の解を与えるのは周知のことである。実際の力学的現象の解はもちろんこれら両モデルによる解の中間に存在するから、これら両モデルを定式化しておくことの必要性については言をまたない。

しかしながら、一般に、適合条件を満たすモデルの定式化は容易であるが、平衡条件を満たすものを定式化するのはかなり困難であり、そのため平衡モデルに関する研究はそれほど多くないようである。

平衡モデルに関する研究としては Fraeijns de Veubeke²⁾ による低次の Equilibrating element があるが、その要素を用いて構造系を組み立てると系は一般に正則とはならず、数値解析が困難となるため広く用いられる

には至っていない。また、種々の高次応力場に対しても検討が加えられ³⁾、数値解が示されているが、そこでのひずみエネルギーは過小に評価されるという結果になっており、平衡モデルというよりはむしろ適合モデルと同様の傾向を示している（なお、Kelly¹¹⁾ は 4 節点アイソパラメトリック要素に Reduced integration を適用した結果と、上記の低次の Equilibrating element との関係について若干の検討を加えている）。

また、近藤¹⁾ は、辺の midpoint に自由度を有する非適合要素（本質的には Fraeijns de Veubeke の低次の Equilibrating element と同じである）によって形成される複合要素を組み立て、それが正則となるよう個々の要素の剛体回転成分を等しくすることにより、二次元平衡モデルを与えている。しかし、ここでは剛体回転成分に関する拘束条件が導入されているため、要素の構成が相当に複雑となっている。

本研究では、二次元および三次元連続体の解析に用いる一つの平衡モデルを提案する。このモデルは、複数個の一定応力場の subelement から成る複合要素で、物体力を考慮しない限り要素境界も一定応力場となって要素の表面力の連続性が保たれる。これを用いて弾性解析を行うとひずみエネルギーの上界が求まり、また、弾塑性解析を行うと下界としての極限荷重が求められる。要素定式化の出発点としてはハイブリッド型コンプリメンタリエネルギー原理を用いており、境界変位としては剛体変位場³⁾を採用している。このような定式過程により要素の構成は非常に簡単になり、結果的には一定ひずみ要素のひずみ-変位行列を変数変換するだけで容易に平衡モデルが誘導されることになる。

若干の弾性および弾塑性解析の数値計算例により、このモデルがひずみエネルギーの上界と、下界としての極限荷重を与えることが示されている。また、平衡モデルでは力の伝達が正確に行われており、変位の連続性が強制されていないため、すべりなどの非線形性の強い不連

* 正会員 工修（株）神戸製鋼所構造研究所研究員

** 正会員 工博（株）神戸製鋼所構造研究所研究員

*** 正会員 工博（株）神戸製鋼所構造研究所次席研究員

† 本文は日本鋼構造協会第 15 回研究集会¹²⁾（1981.7.）および土木学会第 36 回年次学術講演会¹³⁾（1981.10.）において発表した内容を発展させ、とりまとめたものである。

続な現象が卓越する場合にも有効であると思われる。そのような現象の具体例として、落し戸つき容器に充填された粒状体の崩落現象、および層すべり現象が現われる緩やかな斜面の支持力の解析を取り上げた。

2. 平衡条件と変分原理

図一1 は三次元連続体の内部から取り出された2つの四面体要素を示す。微小変位理論における平衡条件（物体力を無視する）は応力成分のつり合い方程式と表面力の連続性によって示される。すなわち

$$\partial\sigma_{ij}/\partial X_j=0 \dots\dots\dots(1)$$

$$T_i^I+T_i^II=0\dots\dots\dots(2)$$

ここに各記号はテンソル表示されており、 σ_{ij} ($\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$) は応力成分、 X_j は座標、 T_i^I と T_i^II は要素IとIIの境界面におけるそれぞれの要素の表面力成分を示す。これらの表面力 T_i は境界面の外法線単位ベクトルの成分 n_j を用いて

$$T_i=\sigma_{ijn_j} \dots\dots\dots(3)$$

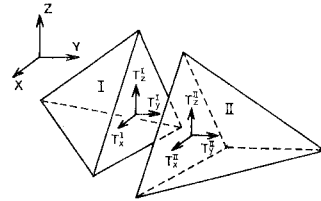
と書き表わされる。

一般に有限要素の定式化において、式(2)で表わされる表面力の連続条件を完全に満足させることは困難である。そこで、ここでは Lagrange の未定乗数を含むハイブリッド型コンプリメンタリエネルギー原理の汎関数

$$\begin{aligned} \Pi_{CH} = & \sum \iiint_V B(\sigma_{ij})dV \\ & - \sum \int_{S_{I\ II}} \mu_i(T_i^I+T_i^II)dS \\ & - \int \int_{S_u} T_i \bar{u}_i dS \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

を用いる。式(2)はこの Lagrange の未定乗数の停留条件からただちに導かれる。ただし、式(4)において、 $B(\sigma_{ij})$ はコンプリメンタリエネルギー、 μ_i は Lagrange 乗数（物理的には境界変位を意味する）、 \bar{u}_i は境界条件として課せられる変位、 V は要素の体積、 $S_{I\ II}$ は I と II の境界面、 S_u は幾何学的境界条件が課せられる表面を示し、第1項の \sum は各要素についての総和を、第2項の \sum は各要素境界についての総和を意味する。

Pian⁹⁾ らは式(4)の汎関数を用いてハイブリッドストレスモデルを構成しているが、そこでは Lagrange 乗数である境界変位場に区分的多項式を用いて境界変位の連続性を導入しているため、各境界変位は互いに独立ではない。このため、表面力の連続性は厳密には満たされておらず、エネルギー的な意味で平均的に満たされているに止まっている。これに対して、以下に提案するモデルでは要素内で一定の応力場を仮定し、これに伴って要素境界も一定応力場となり、表面応力成分が要素間で連



図一1 表面力の連続性

続となるように境界変位場の離散化を行おうとするものである。

3. 平衡モデルの組み立て

(1) 基本要素

平衡モデルを定式化するために、まず式(4)を要素単位で表わす。すなわち、

$$\Pi_{CH}^E = \iiint_V B(\sigma_{ij})dV - \int \int_{\partial V} T_j \cdot U_j dS \dots\dots\dots(5)$$

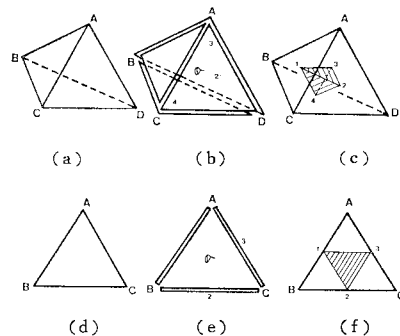
ここに T_j および U_j はそれぞれ要素境界の表面力ベクトルと変位ベクトルを、 V および ∂V はそれぞれ要素体積と要素表面を示す。

いま 図一2(a) に示すような四面体要素を考え、要素内応力場として式(1)を満たす最も単純な定応力場を、Lagrange 乗数で表わされている境界変位場としては、4つの境界面の変位が互いに独立となり、かつ定応力場に適合するような剛体変位場 (U, V, W) を与える。すなわち、図一2(b) のような定応力場 (σ) の四面体 ABCD を取り囲む剛体板 1, 2, 3, 4 を想定する。

未知の応力を σ 、境界変位を U 、各境界面の単位外法線ベクトルを n_j 、 n_j より成る方向余弦行列を L_j とし、応力-ひずみ行列を D と書いて式(5)を積分すると

$$\Pi_{CH}^E = \frac{1}{2} \sigma^T D^{-1} \sigma \cdot V - \sigma^T G U \dots\dots\dots(6)$$

となる。ここに



図一2 基本要素

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \{\sigma_X \ \sigma_Y \ \sigma_Z \ \tau_{XY} \ \tau_{YZ} \ \tau_{ZX}\}^T \\ U &= \{U_1 \ V_1 \ W_1 \dots U_4 \ V_4 \ W_4\}^T \\ n_j &= \{l_j \ m_j \ n_j\}^T \\ L_j &= \begin{bmatrix} l_j & 0 & 0 & m_j & 0 & n_j \\ 0 & m_j & 0 & l_j & n_j & 0 \\ 0 & 0 & n_j & 0 & m_j & l_j \end{bmatrix} \\ G &= \iint [L_1 \dots L_4] dS \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

であり、 V は四面体 $ABCD$ の体積を、添字 T および -1 はそれぞれ転置および逆行列を示す。

式 (6) における σ に対する停留条件より

$$\sigma = D \cdot (G/V) \cdot U \dots\dots\dots (8)$$

を得る。いま、ひずみ-変位行列 B を

$$B = G/V \dots\dots\dots (9)$$

と定義すれば、ひずみ成分 ϵ は通常の四面体定ひずみ要素と同様に

$$\epsilon = BU, \ \sigma = D\epsilon$$

と表現され、要素剛性行列は

$$K = B^T D B \cdot V \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。式 (9) の B 行列は、図-2(c) に斜線を施して示した定ひずみ四面体要素 1234 のそれと同じである。ただし、点 1, 2, 3, 4 は四面体 $ABCD$ の各面における重心である。

すなわち、上記のようにして得られた、平衡条件を満足する要素は四面体の各面の重心点に自由度をもつ線形変位非適合要素と等価になる。

図-2(d)~(f) は平面問題の場合を示す。この場合は三辺上に剛体棒があるものと考えられ、この要素は各辺の midpoint に自由度をもつ線形変位場非適合要素⁷⁾ と等価になる。

(2) 正則性と従属関係

一般に、構造系の内力、自由度および剛体モードの総数をそれぞれ NF , ND , NR とすれば、構造系が正則となるためには

$$ND - NR \leq NF \dots\dots\dots (11)$$

でなければならない。

式 (10) で示される要素を用いて構造系を組み立てると、一般には式 (11) は満足されない。すなわち、境界変位 (または表面力) に従属関係が存在している。たとえば、最も簡単な場合として 図-3(a) の二要素系 (要素 I, II) を考えてみる。 $NF=6$ (応力成分) $\times 2$ (要素) $=12$, $ND=3$ (自由度) $\times 7$ (面) $=21$, $NR=6$ (剛体モード) となり、 $ND - NF - NR = 3$ 個の零エネルギーモードが存在することになる。これらの零エネルギーモードは 図-3(b) で示されるように、要素 I, II の境界面の

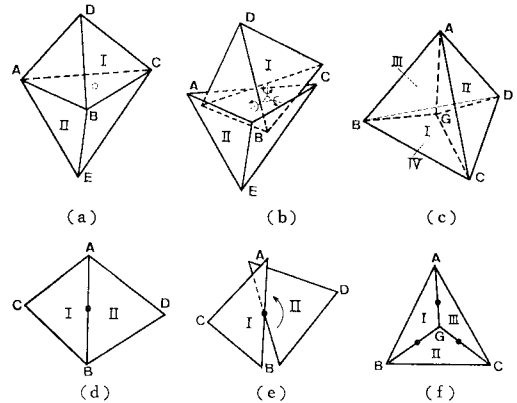


図-3 零エネルギーモードをもつ系ともたない系

自由度点まわりに互いに独立に回転するモードである。また、図-3(c) に示すような 4 個の四面体から成る複合四面体では、 $NF=6 \times 4=24$, $ND=3 \times 10=30$, $NR=6$ であり、系としては正則であるが、この複合四面体を一つの要素とみた場合の二要素系では 図-3(b) と同じ結果になる。

平面問題の場合も同様であり、 図-3(d) に示す二要素系では、 $NF=3 \times 2=6$, $ND=2 \times 5=10$, $NR=3$ となり、 $ND - NF - NR = 1$ 個の 図-3(e) に示される零エネルギーモードが存在する。また、 図-3(f) は 3 個の三角形から成る複合三角形であり、この場合も系としては正則であるが、この複合三角形を一つの要素とみなして 2 個の要素を接続すると 図-3(e) と同じ結果になる。

このように、この基本要素をそのまま用いる限り、要素を一つでも追加すると系が不安定となる。これは、要素境界面を通じてモーメントが伝達されないような機構となっているためである。そこで以下においては、式 (10) で示される要素が集まったときに、上記のような表面力の従属関係が現われるのを防ぎ、要素境界面を通してモーメントが伝達されるよう工夫をする。

そのために、 図-4(a) に示すように、直線 $\overline{OO'}$ のま

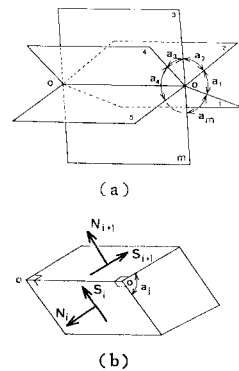


図-4 モーメントのつり合い

わりに m 個の要素が集まっている場合の表面力の従属関係について調べる。図において第 i 面と第 $i+1$ 面との間の角を a_i とし、図-4(b) のように第 i 面の $\overline{OO'}$ に垂直な表面力を各面の局所座標系で (S_i, N_i) とすれば、 $\overline{OO'}$ まわりのモーメントのつり合い式が m 個導かれる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} R_1 &\equiv N_1 \cdot \cos a_1 - S_1 \cdot \sin a_1 = N_2 \cdot \cos a_1 + S_2 \cdot \sin a_1 \\ R_2 &\equiv N_2 \cdot \cos a_2 - S_2 \cdot \sin a_2 = N_3 \cdot \cos a_2 + S_3 \cdot \sin a_2 \\ &\vdots \\ R_i &\equiv N_i \cdot \cos a_i - S_i \cdot \sin a_i = N_{i+1} \cdot \cos a_i + S_{i+1} \cdot \sin a_i \\ R_{i+1} &\equiv N_{i+1} \cdot \cos a_{i+1} - S_{i+1} \cdot \sin a_{i+1} = N_{i+2} \cdot \cos a_{i+1} + S_{i+2} \cdot \sin a_{i+1} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \dots(12)$$

ルギーモードをもつ（平面問題の場合は、図-5(b) に示すように複合三角形 ABCG を構成している 3 個の三角形をそれぞれ二分割する。この

これより相接する要素間には

$$N_{i+1} \cdot \sin(a_i + a_{i+1}) = R_i \cdot \sin a_{i+1} + R_{i+1} \cdot \sin a_i \dots\dots\dots(13)$$

の関係があり、特に

$$a_i + a_{i+1} = \pi \dots\dots\dots(14)$$

の場合には

$$(N_i - N_{i+2}) \cdot \cos a_i = (S_i - S_{i+2}) \cdot \sin a_i \dots\dots(15)$$

なる従属関係が存在する。平面問題の場合も同様の式が導かれる。

(3) 複合要素としての平衡モデル

前節の図-3(c) で示したように、三次元の基本四面体要素を 4 個接続した要素系（複合四面体）はそれ自身では安定であるが、この複合要素の表面においてはモーメントが隣接要素へ伝達されない。この不都合を解消するため以下の操作を施す。

図-3(c) の複合四面体 ABCDG を再び取り上げ、これを構成する 4 個の基本四面体要素 ABCG, ACDG, ADBG, BDCG をそれぞれさらに図-5(a) のように

3 個の四面体に分割する。ここでは錯雑さを避けるため、四面体 ABCG のみを ABOG, BCOG, CAOG に分割した状態を示している。ただし、点 O は面 ABC 上で任意にとった点である。ところで ABCG は 3 個の四面体から成っているため、 $NF=6 \times 3=18$, $ND=3 \times 9=27$, $NR=6$ であり、 $ND-NF-NR=3$ 個の零エネルギー

ときたとえば三角形 ABG は 1 個の零エネルギーモードをもつ。

図-6(a) は図-5(a) より四面体 ABCG のみを取り出した状態を示す。基準座標系を XYZ とし、四面体 CAGO, ABGO, BCGO に $[i]$ ($i=1, 2, 3$) なる番号をつける。面 ABC の外法線方向に z 軸を、面 ABC 上に x, y 軸をもつ右手系局所座標を設定し、 xy に対する OA, OB, OC の方向余弦ベクトルを $\bar{n}_j = (\bar{l}_j, \bar{m}_j)$, ($j=1, 2, 3$) とする。また、面 OCA, OAB, OBC を ①面 ($i=1, 2, 3$) とし、①面の面積を A_i , ①面の表面力を局所座標系で (S_x^i, S_y^i, N^i) , ①面の重心点 O_i の座標を (x_i, y_i, z_i) , 面 ABC の面積を A_0 , 面 ABC の重心点 O_0 の座標を (x_0, y_0, z_0) とする。また、面 OAG, OBG, OCG のそれぞれが面 ABC となす角を \bar{a}_i ($i=1, 2, 3$) とする。

第 ①面において \bar{n}_j および \bar{n}_k 方向に垂直な表面せん断応力をそれぞれ S_j^i, S_k^i とすると、これらは S_x^i と S_y^i によって

$$\left\{ \begin{matrix} S_j^i \\ S_k^i \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} -\bar{m}_j & \bar{l}_j \\ -\bar{m}_k & \bar{l}_k \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} S_x^i \\ S_y^i \end{matrix} \right\} \quad (i, j, k=1, 2, 3) \dots\dots\dots(16)$$

と書き表わされる。なお一般に

$$\bar{l}_j \bar{m}_k - \bar{l}_k \bar{m}_j \neq 0 \quad (j \neq k) \dots\dots\dots(17)$$

である。

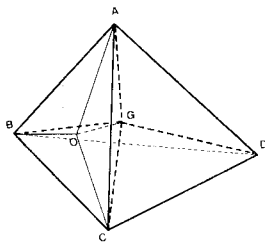
さて、前節で述べた表面力の従属関係より、面 ABC 上の 9 個の表面力 $(S_3^1, S_1^1, N^1), (S_1^2, S_2^2, N^2), (S_2^3, S_3^3, N^3)$ の間には

$$\left. \begin{aligned} (N^1 - N^2) \cdot \cos \bar{a}_1 &= (S_1^1 - S_1^2) \cdot \sin \bar{a}_1 \\ (N^2 - N^3) \cdot \cos \bar{a}_2 &= (S_2^2 - S_2^3) \cdot \sin \bar{a}_2 \\ (N^3 - N^1) \cdot \cos \bar{a}_3 &= (S_3^3 - S_3^1) \cdot \sin \bar{a}_3 \end{aligned} \right\} \dots(18)$$

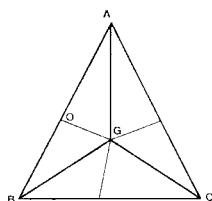
なる関係がある。したがって独立な表面力を 6 個選べばよいわけであるが、以後の定式過程の簡便さを考えて、独立な 6 個の表面力として

$$\bar{T} = \{\bar{S}_x \ \bar{S}_y \ \bar{N} \ M_x \ M_y \ M_z\}$$

を用いる。ここに

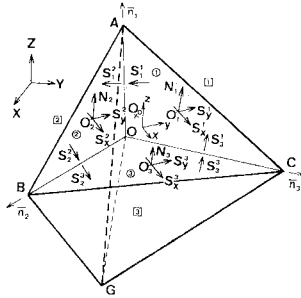


(a) 三次元複合要素

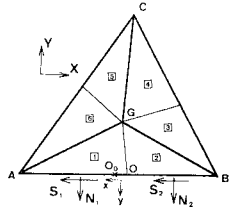


(b) 二次元複合要素

図-5 複合要素



(a) 三次元複合要素



(b) 二次元複合要素

図-6 複合要素の表面力

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_x &= \sum_{i=1}^3 S_x^i \cdot A_i / A_0, & \bar{S}_y &= \sum_{i=1}^3 S_y^i \cdot A_i / A_0, \\ \bar{N} &= \sum_{i=1}^3 N^i \cdot A_i / A_0 \\ M_x &= \sum_{i=1}^3 \{(y_i - y_0)N_i - (z_i - z_0)S_y^i\} \cdot A_i / A_0 \\ M_y &= \sum_{i=1}^3 \{-(x_i - x_0)N_i + (z_i - z_0)S_x^i\} \cdot A_i / A_0 \\ M_z &= \sum_{i=1}^3 \{(x_i - x_0)S_y^i - (y_i - y_0)S_x^i\} \cdot A_i / A_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

であり、 $\bar{S}_x, \bar{S}_y, \bar{N}$ は面 ABC 上の平均的な表面力を、 M_x, M_y, M_z はモーメントを意味する。なお、表面せん断応力 $S_n = \{S_1^1 S_1^2 S_1^3 S_2^1 S_2^2 S_2^3 S_3^1 S_3^2 S_3^3\}$ と $S_x = \{S_x^1 S_x^2 S_x^3 S_y^1 S_y^2 S_y^3 S_z^1 S_z^2 S_z^3\}$ との間には、式 (16) と (17) の一意的関係があるので、式 (19) を定義するにあたっては S_x の成分を用いている。

式 (19) を行列表示すれば

$$\left\{ \bar{S}_x \bar{S}_y \bar{N} M_x M_y M_z \right\} = \sum_{i=1}^3 \{ S_x^i S_y^i N^i \} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_i - z_0 & -(y_i - y_0) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_i - z_0) & 0 & x_i - x_0 \\ 0 & 0 & 1 & y_i - y_0 & -(x_i - x_0) & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{A_i}{A_0} \dots\dots\dots (20)$$

となる。

隣接する要素間で、このように定義された表面力が連続性を保つためには、式 (4) の汎関数に含まれる Lagrange の未定乗数として $\{u_0 \theta_0\} = \{u_0 v_0 w_0; \theta_0^x \theta_0^y \theta_0^z\}$ を用いればよい。ただし、 u_0 は面 ABC の x, y, z 方向の剛体並進成分、 θ_0 は x, y, z 軸まわりの剛体

回転成分である。

式 (20) の表面力を用いて、式 (5) の第 2 項のうち、面 ABC における積分を行うと

$$\iint \{ \bar{T} \cdot u_0 dA_0 = \sum_{i=1}^3 \{ S_x^i S_y^i N^i \} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_i - z_0 & -(y_i - y_0) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_i - z_0) & 0 & x_i - x_0 \\ 0 & 0 & 1 & y_i - y_0 & -(x_i - x_0) & 0 \end{bmatrix} \cdot A_i \begin{Bmatrix} u_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

となる。

ところで、回転を含む剛体変位場 $u = \{u, v, w\}^T$ は

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z - z_0 & -(y - y_0) \\ 0 & 1 & 0 & -(z - z_0) & 0 & x - x_0 \\ 0 & 0 & 1 & y - y_0 & -(x - x_0) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} \equiv [I] h_x \begin{Bmatrix} u_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

と表わすことができるので、この変位場を用いて式 (5) の第 2 項のうち、面 ABC (面 ①, ②, ③) における積分を行うと

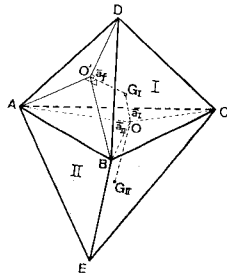
$$\sum_{i=1}^3 \iint \{ S_x^i S_y^i N^i \} \cdot [I] h_x \begin{Bmatrix} u_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} dA_i = \sum_{i=1}^3 \{ S_x^i S_y^i N^i \} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_i - z_0 & -(y_i - y_0) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_i - z_0) & 0 & x_i - x_0 \\ 0 & 0 & 1 & y_i - y_0 & -(x_i - x_0) & 0 \end{bmatrix} \cdot A_i \begin{Bmatrix} u_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

となり、式 (21) と同じ結果を得る。

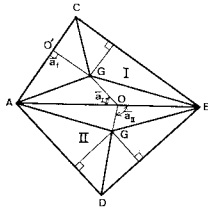
すなわち、式 (22) で示される剛体変位場を Lagrange の未定乗数である境界変位場として採用すれば、自動的に式 (18) の表面力の従属関係を取り除いたことになる。また、この変位場は回転を含んでいるため、境界面 ABC を通じてモーメントが伝達される。

他の領域 ACDG, ADBG, BDCG についてもそれぞれ面 ACD, ADB, BDC の境界変位場として式 (22) を用い同様の定式化をすればよい。このようにして 図-5 (a) の複合要素 ABCD を作成すると、そこでは $NF = 6$ (応力成分) $\times 12$ (要素) $= 72$, $ND = 6$ (面 ABC 等の外面での自由度) $\times 4$ (外面) $+ 3$ (面 AOG 等の内面での自由度) $\times 18$ (内面) $= 78$, $NR = 6$ となり、この要素が平衡条件を満たす正則な要素であることが確認される。

以上の所論においては、図-6 (a) で面 ABC 上にとった点 O の位置については何の制約も加えていない。しかし、図-7 (a) のように 2 個の複合四面体要素 I, II が面 ABC を介して隣接する場合には点 O の位置を次のように定める必要がある。



(a) 三次元複合要素



(b) 二次元複合要素

図-7 隣接複合要素の境界面における分割

図-7(a)の要素Iにおいて、面ABCが面AOG_I、BOG_I、COG_Iとなす角を $\bar{a}_1 = \{\bar{a}_1^1, \bar{a}_2^1, \bar{a}_3^1\}$ とし、同様に要素IIにおいて角 $\bar{a}_1 = \{\bar{a}_1^2, \bar{a}_2^2, \bar{a}_3^2\}$ を定義する。要素I, IIのそれぞれについて面ABC上での表面力の間には式(18)の関係が成立する。これらの表面力がIとIIの隣接面上で連続となるようにするには $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ であればよい。すなわち、面ABC上の点Oが複合要素I, IIの内点G_IとG_{II}を結ぶ直線上にあれば面ABCでの表面力の連続性が保たれる。

また、他の要素と隣接しない面(たとえば図-7(a)の面ABD)で点O'をとるとき、上と同様に定義される角 $\bar{a}' = \{\bar{a}_1', \bar{a}_2', \bar{a}_3'\}$ を $\bar{a}_i' = \pi/2$ ($i=1, 2, 3$) ならしめると、式(18)より面ABDの表面力について $S_1^1 = S_1^2, S_2^2 = S_2^3, S_3^3 = S_3^1$ が成り立ち、さらに N^1, N^2, N^3 は任意の値をとり得るから、これらの表面力に境界条件として任意の応力成分を与えることができる。したがって、隣接要素をもたない面では、複合要素の内点(G_I)からその面に垂線を下ろし、その足を点Oとすればよい。

平面問題の場合には、図-6(b)のように複合要素の外側(辺ABなど)における表面力を定義し、図-7(b)のように隣接境界面の分割を行えば、三次元の場合と同様に平衡条件を満足する複合要素が作成される。

(4) 複合要素の剛性行列

前記のように組み立てられた複合要素の剛性行列を基準座標系によって表現する。

複合四面体要素を形成する12個の基本要素(サブ要素)の応力テンソルを局所座標系で σ^l 、基準座標系で

σ^g 、応力ベクトルを基準座標系で σ と書く。局所座標の x, y, z 軸の基本座標軸に対する方向余弦ベクトルを $n_i = (l_i, m_i, n_i)$ ($i=1, 2, 3$)、これより成る座標変換行列を R とする。

座標系の変換において問題となるのは回転を含む境界変位をもつ面であるから、以下式(23)について検討する。なお、局所座標系の z 軸は四面体の表面に垂直であるから、局所座標軸に対する表面の方向余弦ベクトルは $n = (0, 0, 1)$ である。

局所座標における表面力を T^l 、基準座標における変位を U_0 、回転を θ_0 、式(22)の h_x の各成分を基準座標で表わしたものを H_X と表わすと、それらの間には

$$\left. \begin{aligned} \sigma^l &= R^T \sigma^g R, \quad T^l = \sigma^l \cdot n, \quad u_0 = R^T U_0, \quad \theta_0 = R^T \theta_0 \\ R &= \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}, \quad R^T R = I, \quad n = (0 \ 0 \ 1)^T \\ H_X &= R^T h_x R \\ &= \begin{bmatrix} 0 & Z-Z_0 & -(Y-Y_0) \\ -(Z-Z_0) & 0 & X-X_0 \\ Y-Y_0 & -(X-X_0) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

なる関係がある。これより式(23)の積分は

$$\left. \begin{aligned} &\iint \{S_x^i S_y^j N^k\} \cdot [I; h_x] \begin{Bmatrix} u_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} dA \\ &= \iint n^T \sigma^l [I; h_x] \begin{Bmatrix} u_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} dA \\ &= \iint \sigma^T L [I; H_X] \begin{Bmatrix} u_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} dA \\ &= \sigma^T G [I; H_G] \begin{Bmatrix} u_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

となる。ここに

$$G = \iint L dA, \quad L = \begin{bmatrix} l_3 & 0 & 0 & m_3 & 0 & n_3 \\ 0 & m_3 & 0 & l_3 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & m_3 & l_3 \end{bmatrix}^T$$

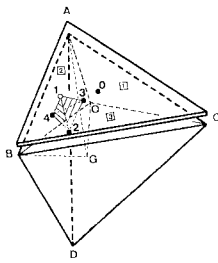
であり、また、 H_G は式(24)の H_X の (X, Y, Z) に、サブ要素表面の三角形(たとえば図-6(a)のABO)の重心位置の座標を代入したものである。

すなわち、式(23)を基準座標において評価するに際しても、単に境界変位場を剛体変位場(複合要素の内面では並進のみ、外面では回転を含む)とするだけでよいことがわかる。このことは実際に要素剛性行列を作成する場合に便利な性質であり、3.(3)で示したようなサブ要素分割を行った後、個々のサブ要素の境界変位のうち、外面となる境界の変位 U_i を

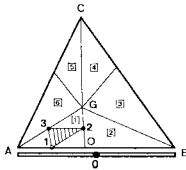
$$U_i = [I; H_i] \begin{Bmatrix} U_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(26)$$

によって変数変換するだけでよいことになる。

具体的には、図-8(a)におけるサブ要素ABOGのひずみ-変位行列 B と剛性行列 K とは



(a) 三次元複合要素



(b) 二次元複合要素

図-8 サブ要素と境界面の自由度点

$$\left. \begin{aligned} B &= [B_1 \ B_2 \ H_1 \ B_3 \ B_4] \\ U &= \{U_0^T \ \theta_0^T \ U_2^T \ U_3^T \ U_4^T\}^T \dots\dots\dots(27) \\ K &= B^T DB \cdot V_{1234} \cdot 27 \end{aligned} \right\}$$

と書き表わされる。ここに点 0, 1, 2, 3, 4 はそれぞれ面 ABC, ABO, BGO, AGO, AGB の重心点であり、 V_{1234} は四面体 1234 の体積である。なお、剛性行列を計算する場合の積分域は四面体 ABOG であり、この体積は $27 V_{1234}$ となる。 B_i は変位法による定ひずみ四面体要素⁹⁾ 1234 のひずみ-変位行列の成分であり

$$\left. \begin{aligned} B_i &= \frac{1}{6 V_{1234}} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 & c_i & 0 & d_i \\ 0 & c_i & 0 & b_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i & 0 & c_i & b_i \end{bmatrix}^T \\ b_i &= - \begin{vmatrix} 1 & Y_j & Z_j \\ 1 & Y_k & Z_k \\ 1 & Y_l & Z_l \end{vmatrix}, & c_i &= - \begin{vmatrix} X_j & 1 & Z_j \\ X_k & 1 & Z_k \\ X_l & 1 & Z_l \end{vmatrix} \\ d_i &= - \begin{vmatrix} X_j & Y_j & 1 \\ X_k & Y_k & 1 \\ X_l & Y_l & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

で与えられる。 X_j, Y_j, \dots は節点の座標を表わし、 i, j, k, l は節点の番号を循環的にとる。

平面問題の場合は 図-8(b) のサブ要素 AOG ① の B 行列が

$$B = \frac{1}{2 A_{123}} \begin{bmatrix} Y_{23} & 0 & -Y_{23}Y_{10} & Y_{31} & 0 & Y_{12} & 0 \\ 0 & X_{32} & X_{32}X_{10} & 0 & X_{13} & 0 & X_{21} \\ X_{32} & Y_{23} & X_{10}Y_{23} - X_{32}Y_{10} & X_{13} & Y_{31} & X_{21} & Y_{12} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(29)$$

で与えられる。ここに $X_{ij} = X_i - X_j, X_{ij} = Y_i - Y_j$ である。剛性行列および変位ベクトルは

$$K = B^T DB A_{123} \cdot 4, U = \{U_0^T \ \theta_0^T \ U_2^T \ U_3^T\}^T$$

となる。 A_{123} は三角形 123 の面積である。なお、 K を

計算するときの積分域は三角形 AOG であり、この面積は $4 A_{123}$ となる。

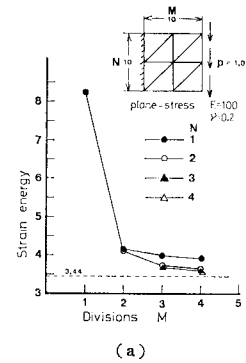
なお、複合要素としての自由度の総数は、三次元の場合 78 (内面の自由度を縮約すると 24) であり、平面の場合は 21 (内面を縮約すると 9) となる。

4. 数値計算例

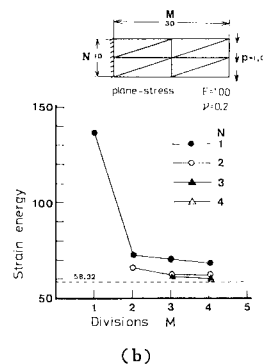
(1) 収束性

本文で提案している複合要素は、要素境界面の重心、あるいは要素境界辺の中点に自由度をもつ一定ひずみ非適合要素で表わされるサブ要素によって構成されている。それゆえ、要素のひずみエネルギーに関する収束性を議論するには、基本となる非適合要素の性質に準拠すればよい。この非適合要素では要素境界面における要素内変位差が線形分布をなし、重心点では零であり、かつ表面力が連続であるため、変位差によるエネルギー積分は常に零となる¹⁾。したがってこの要素のひずみエネルギーの収束性は要素分割パターンに影響されることがなく、常に保証されている。

よって、ここで提案している複合要素においてもひずみエネルギーの収束性は保証される。



(a)



(b)

図-9 片持ばりのひずみエネルギー

(2) 片持ばりの弾性解析

図-9 は端部に等分布荷重を受ける平面応力状態の片持ばりのひずみエネルギーについて計算した結果を示す。せん断変形を考慮したはり理論による解を破線で、要素分割数 M (軸方向) および N (高さ方向) を変化させたときの計算値を実線で示す。図-9(a) は短い片持ばりを、(b) は細長いばりを示しているが、いずれの場合も図から明らかなように、分割数を増すことによってひずみエネルギーが上方から収束しており、平衡モデルの特徴を示している。

(3) V ノッチ板の弾塑性解析⁹⁾

図-10 は両端に等分布荷重を受ける V ノッチ板 (ノッチ開き角 90°) の弾塑性解析の結果であり、要素分割と荷重変位曲線を示している。なお、降伏条件としては von Mises の式を用いている。荷重変位曲線に示した破線は通常の極限解析による終局耐力であり、本解析の値はその下側から収束しており、下界の解を与えていることがわかる。

(4) 落し戸における粒状体の初期崩落現象の解析

地下掘削の際、地盤の一部が沈下すると、その影響が周囲にどのように及ぶか、といった問題を論ずるのに、落し戸つき容器による実験が行われることが多い。

図-11(a) は底面に落し戸をもつ容器に土のような物質が満たされている状態を示す。この落し戸を徐々に降下させたときの崩落現象を解析する。計算に際しては内容物の自重による初期条件として、 $\sigma_y = -\gamma h$, $\sigma_x = K\sigma_y$, $\tau_{xy} = 0$, $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ なる初期応力を与えている (γ : 比重, h : 自由表面からの深さ, K : 静止土圧係数, ν : ポアソン比)。また、内容物の降伏条件としては関連流れ則に基づく Drucker-Prager の式を用いている。

図-11(b) は落し戸に作用している土圧と鉛直変位を示したものである。この解析の 35 ステップ付近で落し戸上方に張力が発生したため、それを破線で示している。なお、そのときの落し戸の反力 (ゆるみ土圧) は

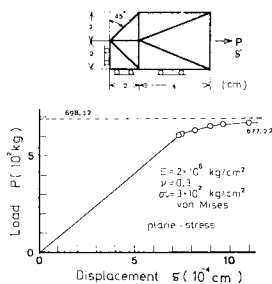


図-10 V ノッチ板の弾塑性解析

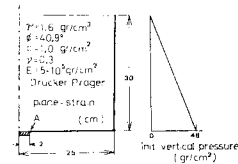
3.5 g/cm^2 (343 Pa) である。図-11(c),(d) はそれぞれ 20 ステップでの塑性域の分布図と落し戸近傍の主応力線図である。主応力線上の破線は主応力線より求めたすべり線であり、主応力線は鉛直方向に対し $10^\circ \sim 17^\circ$ 傾いている。また、主応力線図から、落し戸上方にアーチが形成されていることがわかる。

村山・松岡¹⁴⁾は落し戸による崩落現象について実験的考察を行っている。上記の計算結果をこれと比較すると、本解析によって初期の崩落現象は大局的に把握されていると考えられる。このような解析は、粉・粒状体を貯蔵するサイロなどから内容物を排出するときの問題となる閉塞現象を論じたりするのに応用可能と思われる。

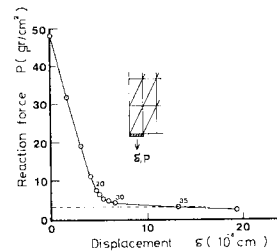
節点に自由度を有する通常の要素では、落し戸と底面の共通節点 (図-11(a) の点 A) の拘束条件の処理が問題となり、薄い要素を挿入するなどの特別な配慮が必要と思われるが、本文のモデルの自由度は辺の midpoint に存在しているため角点の処理が容易で、そのような問題は生じない。

(5) 斜面の支持力解析

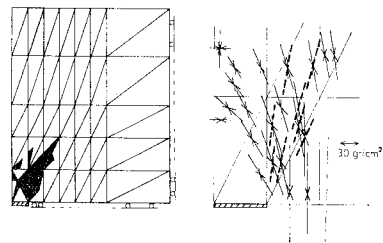
文献 10) および 15) から判断すると、表面に帯荷重を受ける緩やかな斜面の支持力を解析するのに有限要素法を適用しても、層すべり現象を表現することはかなり



(a) モデル

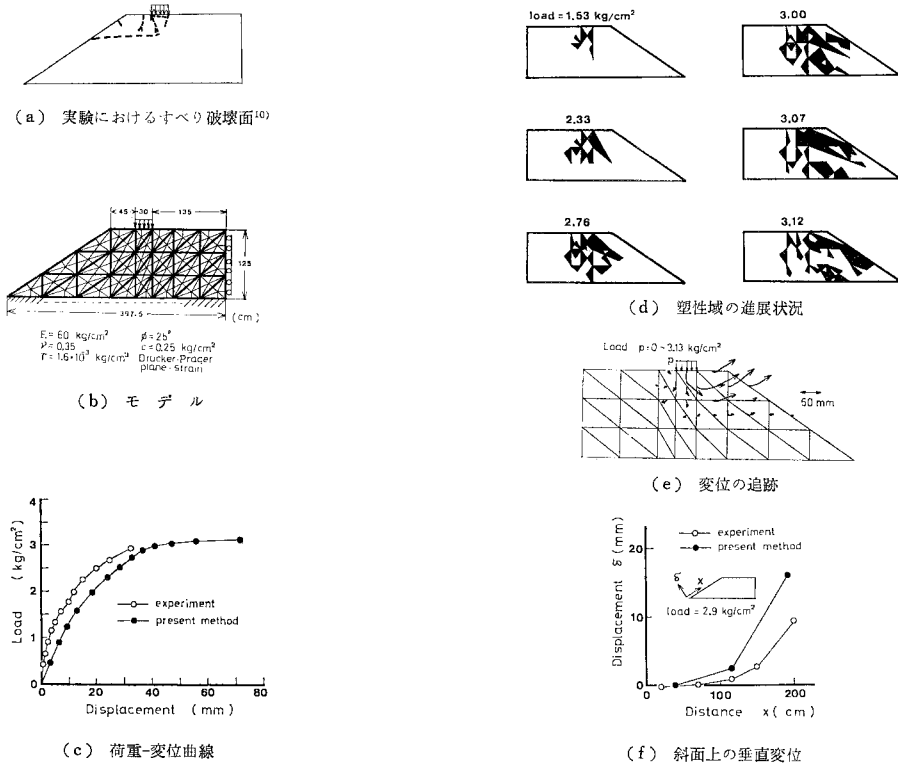


(b) 落し戸の反力-変位曲線



(c) 塑性域分布 (d) 主応力とすべり線

図-11 落し戸による粒状体の初期崩落解析



図一12 緩やかな斜面の支持力解析

困難なようである。ここでは本文の平衡モデルによってこのような層すべり現象がどの程度表現できるかを調べる。

解析に際しては、地盤の自重を与えた場合に得られる応力を初期条件として与え、また、地盤の降伏条件には Drucker-Prager の式を用いる。

図一12(a) は文献 10) に示されている実験によるすべり破壊面の図である。図 (b) は本解析における要素分割図であり、太線が複合要素を、細線がサブ要素を示す。なお、寸法や材料定数は文献 10) と同じ値とする。

図 (c)~(f) はそれぞれ荷重-変位曲線、塑性域の進展状況、変位の追跡、および斜面上の垂直変位 (荷重 2.9 kg/cm², 0.2842 MPa) を示す。これらの数値計算結果より

- (i) 図 (d) の塑性域の進展状況は図 (a) の層すべり破壊面を大局的に示している。
 - (ii) 図 (e) および (f) に示した変位の傾向は実験のそれと類似している。
 - (iii) 図 (c) の荷重-変位曲線より極限支持力は 3.13 kg/cm² (0.3067 MPa) となるが、実験では 3.11 kg/cm² (0.3048 MPa) と報告されており、両者はよく一致している。
- ということが出来る。

このように、本文で提案した平衡モデルは斜面におけ

る層すべり現象をかなりよく説明するようであるが、平衡モデルでは要素間の力の伝達が正確に行われており、かつ、変位の連続性が強制されていないことがその理由と考えられる。

一般に、すべりのような非線形性の強い現象に対しては本文の平衡モデルが有効であると思われる。

5. 結 論

従来の変位型有限要素法では、特別な場合を除き、一般に平衡条件は満たされていない。本研究では、平衡条件を完全に満たす二次元・三次元固体要素を提案した。そこでは、ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギー原理に基づいて定式化を行い、特に要素間の平衡条件を満たすため、要素に特殊な重心分割を施し、各分割域では一定応力場にある複合要素としてまとめている。また、その定式過程で明らかなように、この要素は辺の中点や面の重心点に自由度を有する一定ひずみ非適合要素と等価であるため、実用的なプログラム化が容易である。

この要素を用いると、

- 1) 平衡条件と力学的条件が厳密に満たされる、
 - 2) 弾性域ではひずみエネルギーの上界を与える、
 - 3) 塑性域では下界としての極限荷重を与える、
- などの特徴ある解が得られる。

謝 辞：本研究は、東京大学生産技術研究所教授・川井忠彦博士の提案された剛体ばねモデルについて、同教授の指導のもと種々の検討を進めていた過程において想を得たものであり、内容の全般にわたって同教授からご懇篤なご指導をいただいた。

また、広島大学・近藤一夫博士からは種々有益なご討議、ご助言を受けた。

ここに付記して深甚の謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 鷺津久一郎：弾性学の変分原理（コンピュータによる構造工学講座II-3-A），培風館 p. 82, 昭 48.
- 2) Fraeij de Veubeke, B.M. : Displacement and equilibrium models in the finite element method, Chapter 9 of "Stress Analysis", (eds. O.C. Zienkiewicz and G. S. Holister), Wiley, 1965.
- 3) Fraeij de Veubeke, B.M. : Discretization of stress fields in the finite element method, Journal of the Franklin Institute, Vol. 302, Nos. 5 & 6, pp. 389~412, Nov./Dec., 1976.
- 4) 近藤一夫：平面応力問題に対する一離散化手法，日本鋼構造協会第 13 回大会マトリックス解析法研究発表論文集，pp. 191~196, 昭 54.
- 5) 川井忠彦：新しい要素モデルによる固体力学諸問題の解析，生研セミナー・テキスト，生産技術研究奨励会，昭 52.
- 6) Pian, T.H.H. : Formulations of finite element methods for solid continua, "Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design", (eds. R.H. Gallagher, Y. Yamamoto and J.T. Oden), Univ. of Alabama Press, 1971.
- 7) Strang, G. and G.J. Fix : An Analysis of the Finite Element Method (三好・藤井訳「有限要素法の理論」，培風館，p. 197, 昭 51)
- 8) Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method, 3rd ed. McGraw-Hill, p. 136, 1977.
- 9) Yamada, Y., N. Yoshimura and T. Sakurai : Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problem by finite element method, Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, 1968.
- 10) 竹内則雄・波田光敬・川井忠彦：新離散化モデルによる地盤基礎の極限解析（その7）—斜面の支持力（2），生産研究，Vol. 33, No. 7, pp. 13~16, 1981.
- 11) Kelly, D.W. : Bounds on discretization error by special reduced integration of the Lagrange family of finite elements, Int. J. num. Meth. Engng., Vol. 15, pp. 1489~1506, 1980.
- 12) 豊島史郎・中西 宏・波田凱夫：平衡条件を満足する一つの離散化手法について，日本鋼構造協会第 15 回大会研究集会，マトリックス解析法研究発表論文集，pp. 107~112, 昭 56.
- 13) 豊島史郎・中西 宏・波田凱夫：平衡条件を満たす一つの離散化モデルによる支持力解析，土木学会第 36 回年次学術講演会III-293, pp. 584~585, 昭 56.
- 14) 村山朔郎・松岡 元：粒状土地盤の局部沈下現象について，土木学会論文報告集，第 172 号，pp. 31~41, 1969.
- 15) 後藤哲雄・香川和夫・中井照夫：帯荷重による斜面の応力・変形とその解析（第3報），土木学会第 31 回年次学術講演会，III-109, pp. 213~214, 昭 51.

(1981.12.18・受付)