

鉛直振動流中での球形粒子の沈降速度

SETTLING VELOCITY OF A SPHERE PARTICLE IN VERTICALLY OSCILLATING FLUIDS

久保田 稔*・足立 昭平**

By Minoru KUBOTA and Shohei ADACHI

1. 緒論

通常、浮遊砂輸送に関する研究では、流水中での砂粒子の沈降速度は静水中での終局沈降速度に等しい、と仮定されている。流水中でも、砂粒子はその重さに見合う速度で沈降するから、砂粒子が浮遊状態にあるには、砂粒子の沈降速度よりも大きい速度で砂粒子が水面方向へ輸送される必要がある。砂粒子の浮遊に影響する因子は、重力の加速度、速度分布および渦の大きさや強さの鉛直成分であると考えられる。

そこで、著者らは、砂粒子の沈降速度がこの鉛直成分によってどの程度影響を受けるかという素朴な疑問に答えるために、まず鉛直振動流中の粒子の沈降特性を調べることとした。

今回著者らは、抗力係数は静水中と振動流中とでは異なると考え、Houghton¹⁾ (1968) の解析手法を踏襲し解析した。その解析結果に Baird ら²⁾ (1967) の実験データを適用し、鉛直振動流中の粒子の沈降速度に検討を加え、鉛直速度および振動数が増加すると、沈降速度がある程度減少することを示している。なお、円柱での実験結果より、沈降速度と振動数との関係を簡単なモデルで考察したのでここに報告する。

2. 鉛直振動流中の粒子の運動方程式の解

直径 d の球形粒子が流体中を浮遊している場合の力のつり合いは、簡単のために、Basset 項を省略できるものとして、

$$\frac{1}{6}(\rho_p + \chi\rho_f)\pi d^3 \frac{du_p}{dt} = \frac{1}{6}(\rho_f - \rho_p)\pi d^3 g$$

* 正会員 工修 大同工業大学講師 建設工学科

** 正会員 工博 豊橋技術科学大学教授 建設工学科
(昭和56年10月に逝去されました.)

$$-\frac{1}{8}C_D\pi d^2\rho_f(u_p - u_f)|u_p - u_f| \\ + \frac{1}{6}(1+\chi)\rho_f\pi d^3 \frac{du_f}{dt} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

と記述される。ここに ρ_p, ρ_f はそれぞれ粒子および流体の密度、 u_p, u_f はそれぞれ粒子および流体速度、 χ は仮想質量係数、 C_D は抗力係数であり、著者らは、 C_D を鉛直振動流の時間平均値と考えた。

相対速度 $u_r = u_p - u_f$ を式(1)に代入、整理すると

$$\frac{du_r}{dt} = -\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p + \chi\rho_f}g - \frac{3}{4}\frac{C_D}{d}\frac{\rho_f}{\rho_p + \chi\rho_f}u_r|u_r| \\ - \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p + \chi\rho_f} \frac{du_f}{dt} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

と表わされる。

流体速度 u_f を $u_f = Aw \sin \omega t$ と置くと、 $du_f/dt = Aw^2 \cos \omega t$ と与えられる。ここに A は振幅、 w は角周波数である。相対速度 u_r を静止流体中での終局速度 u_s で、 $v_r = u_r/u_s$ と無次元化し、および $\omega t = 2\tau$ と無次元化すると、式(2)は

$$\frac{dv_r}{d\tau} = -2\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p + \chi\rho_f} \frac{g}{w u_s} \\ - 2\frac{C_D}{C_{D_0}} \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p + \chi\rho_f} \frac{g}{w u_s} v_r |v_r| \\ - 2\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p + \chi\rho_f} \frac{Aw}{u_s} \cos 2\tau \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

と整理される。ここに C_{D_0} は静止流体中での粒子の抗力係数である。

$$a^{1/2} = 2\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p + \chi\rho_f} \frac{g}{w u_s}, \quad \frac{Aw^2}{g} = \frac{2b}{a} \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

と置くと、式(3)は

$$\frac{dv_r}{d\tau} = -a^{1/2} - \frac{C_D}{C_{D_0}} a^{1/2} v_r |v_r| \\ - 2\frac{b}{a^{1/2}} \cos 2\tau \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

と与えられる。式(5)は無次元 Langevin 方程式であり、変数変換を行うことにより Mathieu 方程式に変換

される。式(5)で粒子が常に下方に沈降すると仮定し、

$$v_r = \frac{C_{D_0}}{C_D} \frac{1}{a^{1/2} \phi} \frac{d\phi}{d\tau} \quad \dots \dots \dots (6)$$

と変数変換すると、式(5)は、

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \left(-\frac{C_D}{C_{D_0}} a - 2 \frac{C_D}{C_{D_0}} b \cos 2\tau \right) \phi = 0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

と Mathieu 方程式になる。一般に Mathieu 方程式は

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + (a_1 - 2q_1 \cos 2\tau) \phi = 0 \quad \dots \dots \dots (8)$$

と記述され、一般解は、

$$\phi = A_1 e^{\mu \tau} \phi(\tau) + B_1 e^{-\mu \tau} \phi(-\tau) \quad \dots \dots \dots (9)$$

と表わされる。ここに A_1 および B_1 は初期条件に依存する定数であり、 $\phi(\tau)$ は周期 π の周期関数である。 μ はパラメーター a_1 および q_1 に依存する変数であり、一般に特性指数とよばれる。

式(7)以降、Houghton と同様な解析手法に従い、式(6)の変数変換関係より、無次元相対速度 v_r は

$$v_r = \frac{C_{D_0}}{C_D} \frac{1}{a^{1/2}} \times \left[\frac{2 \sum_{r=1}^{\infty} \rho_{2r} \cdot r \cdot \sin(2r\tau + \xi_{2r})}{\mu + \sum_{r=1}^{\infty} \rho_{2r} \cos(2r\tau + \xi_{2r})} \right] \dots \dots \dots (10)$$

と与えられる。ここに ρ_{2r} および ξ_{2r} は周期関数 $\phi(\tau)$ の振幅 C_{2r} を、 $C_{2r} = \rho_{2r} e^{\xi_{2r} i}$ と表わしたものである。

式(10)の右辺第2項の周期成分は、第1項に比べて小さいと考えられるので、 v_r の第1近似として、

$$v_r = \frac{C_{D_0}}{C_D} \frac{1}{a^{1/2} \mu} = -\sqrt{\frac{C_{D_0}}{C_D}} \left[1 - \frac{C+1}{2(C+1)^2 - D^2} \frac{D^2}{C} + \frac{7-5C}{32(C+1)^3(C+4)} \frac{D^4}{C} - 0(D^6) \right]^{1/2} \quad \dots \dots \dots (11)$$

を得る。ここに、

$$C = \frac{C_D}{C_{D_0}} a = 4 \left(\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p + \chi \rho_f} \right)^2 \frac{C_D}{C_{D_0}} \left(\frac{g}{w u_s} \right)^2$$

$$D = \frac{C_D}{C_{D_0}} b = \frac{1}{2} \frac{C_D}{C_{D_0}} \frac{A w^2}{g} a \text{ である。}$$

3. 振動流中での沈降速度

Fig. 1 は、10 フィート × 4 インチのパイレックス円筒柱内で、鉛直振動流中でのプラスチック球形粒子の沈降速度に関する Baird らの実験装置である。Table 1 は彼らの実験条件である。彼らの実験での最大振幅は振動数 $f=2.37 \text{ c/s}$ で $A=1.1 \text{ インチ}$ であり $f=0.88 \text{ c/s}$ で $A=4 \text{ インチ}$ である。振幅は円柱内での空気量を変えて調節され、3 フィートの区間での落下時間より、円

Table 1 Properties of plastic sheres.

Sphere diameter (inch)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Material	Nylon	Nylon	Acrylic resin
Density (g/ml)	1.18	1.18	1.20
Terminal velocity in calm water (ft/s)	0.32	0.535	0.88
Reynolds number in calm water	285	1050	3130

柱中央部を落下する

粒子の平均沈降速度を求めた。

彼らの実験データから沈降速度を読み取り、式(11)を用いて、 C_D/C_{D_0} を求めた。ここに仮想質量係数 $z=0.5$ とした。

振動流中での粒子の抗力係数 C_D と静止流体中での粒子の抗力係数 C_{D_0} との比を、

$$\frac{C_D}{C_{D_0}} = f_1 \left(\frac{f \cdot d}{u_s}, \frac{A}{d} \right) \dots \dots \dots (12)$$

と表わす。式(12)の右辺第1項 $f \cdot d/u_s$ はストローハル数と類似の変数であり、粒子後方の渦の状態を示している。式(12)を指數関係で表わし、Baird らの実験データを使用して、係数を最小二乗法で決定すると

$$\frac{C_D}{C_{D_0}} = \exp \left[117.17 \left\{ \left(\frac{f \cdot d}{u_s} \right) \left(\frac{A}{d} \right)^{1/3} \right\}^{2.74} \right] \dots \dots \dots (13)$$

が与えられる。

Fig. 2 は Baird らのデータからの C_D/C_{D_0} と式(13)との相関を示している。式(13)を式(11)に代入して、鉛直振動速度 $v' = Aw/\sqrt{2}$ と振動数 f をパラメーターとした結果が **Fig. 3** である。同図より、振動数 f が増加するにつれ、 v_r が減少する傾向がみられる。

同図より、0.1 mm 程度の粒子の沈降速度には、鉛直振動速度 v' と振動数 f とがある程度影響すると推察される。

振動流中での球の終局沈降速度が減少するのは、振幅および振動数の影響で、後流渦の形状が静水中での場合と異なるためであると思われる。

球の後流状態の観察は大層困難であるが、円柱後方流れの観察は比較的容易であり、球後流状況を理解する有効な方法であると思われる。

そこで著者らは、まず、円柱後流形状と振動数との関係を考察し、その結果より、球の沈降特性を推察するこ

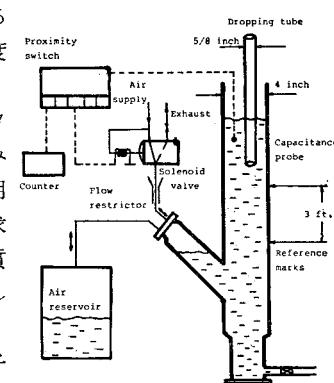


Fig. 1 Self-triggered pulsed column for spere velocity measurements.

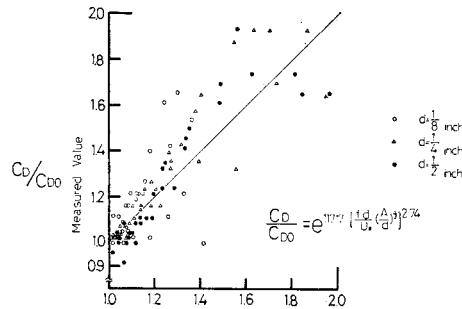


Fig. 2 Correlation between calculated value and measured value with regression Eq. 13

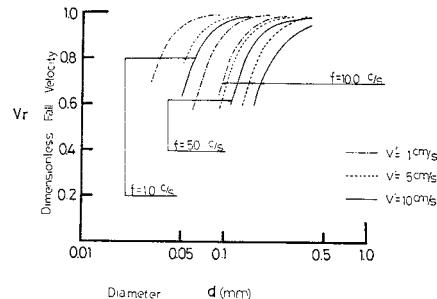


Fig. 3 Fall velocity reduction under various conditions.

とした。

4. 円柱後流の実験結果および考察

幅 50 cm の実験水路上の移動測定台に、外壁側を十分滑らかにした塩化ビニール管とメモーション 8 mm カメラとを設置した。円柱後部からの渦の発生時間間隔 T を 8 mm フィルムから読み取り、円柱速度と自由表面流速とから相対速度 Δu を求めた。レイノルズ数 $R_e = \Delta u \cdot d / \nu$ とストローハル数 $S_t = d / T \Delta u$ との関係は Fig. 4 である。同図は、当然、円柱を固定座標で観察した場合と同一であり、同図中には従来の実験データからの実験式が示してある。

(1) 一定速度での実験

30 cm 程度の水深でゆっくり一定速度で水を流し、相対速度 Δu の範囲を広げるために、測定台を一定速度で水路上流側および下流側に移動させた。円柱後方からの渦の発生時間間隔 T を 8 mm フィルムから読み取り、円柱速度と自由表面流速とから相対速度 Δu を求めた。レイノルズ数 $R_e = \Delta u \cdot d / \nu$ とストローハル数 $S_t = d / T \Delta u$ との関係は Fig. 4 である。同図は、当然、円柱を固定座標で観察した場合と同一であり、同図中には従来の実験データからの実験式が示してある。

したがって、円柱が一定方向に移動しており、まわりの流体速度が変化しても、 $R_e > 200$ の領域では規則的にカルマン渦が発生し、円柱の抗力

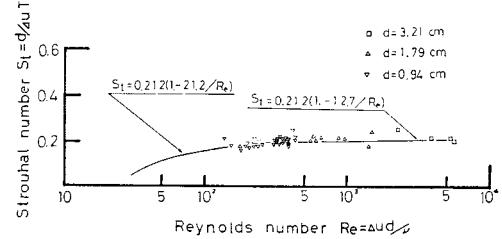


Fig. 4 Relationship between Strouhal number and Reynolds number.

はその R_e 数での値となり、速度変化の影響をあまり受けないとと思われる。流体の速度変化が抗力に多少とも影響を及ぼすと考えられる領域は $20 < R_e < 200$ の領域、すなわち渦の発生周期が流れの状況で変化する領域であると考えられる。

一定加速度で静止状態から動き始める非定常流れの場合には³⁾、円柱後部よどみ点が剝離する時間 t_s は、加速度を α とすると、ボテンシャル理論より $t_s = 0.721 \sqrt{d/\alpha}$ であり、瞬間での R_e 数がたとえ同じでも、円柱の後流状態は同一ではなく、 R_e 数で後流の状態を比較することはもはや不可能である。

以上より、 R_e 数をもとにして比較できる程度のゆっくりした速度変化は、あまり円柱の抗力に影響しないものと思われる。

(2) 一定加速度での実験

重力の作用を利用し、水路上の移動測定台を一定加速度で移動させ、毎秒 72 コマの 8 mm カメラで円柱後流状況を撮影した。

Photo 1~4 は、一定加速度で移動する円柱後方での渦の発達過程を無次元時間 $t_* = t \sqrt{\alpha/d}$ で示している。

Fig. 5 は、円柱の直径 d が 1.79 cm, 3.21 cm および 4.81 cm で、加速度 α をいろいろに変化させたときの渦の発達程度 l/d と $t_* = t \sqrt{\alpha/d}$ との関係であり、ここに l は後流渦の長さである。 t_* が大きくなると、Photo 4 からもわかるように、渦が不安定になるため、

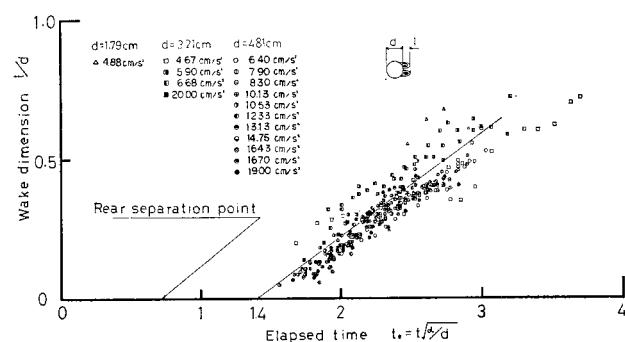
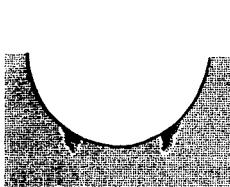


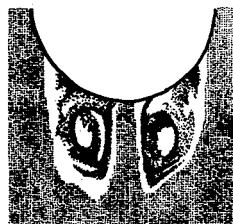
Fig. 5 Relationship between wake dimension and elapsed time under constant acceleration condition.



$t_* = t \sqrt{\alpha/d} = 1.650$

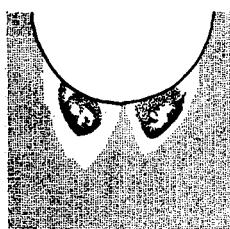
Photo 1

Wake pattern around a circular cylinder with elapsed time.



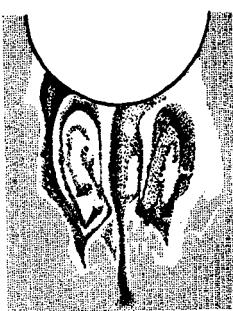
$t_* = t \sqrt{\alpha/d} = 2.595$

Photo 3



$t_* = t \sqrt{\alpha/d} = 2.018$

Photo 2



$t_* = t \sqrt{\alpha/d} = 3.104$

Photo 4

ばらつきが増加しているが、同図より、円柱後方での渦の発達過程は $t \sqrt{\alpha/d}$ によってよく表わされると考えられる。なお、同図中の直線は $t_* = t \sqrt{\alpha/d} = 1.4$ 付近で $l/d = 0$ となり、ポテンシャル理論での剝離点 106 度（前方よどみ点からの角度）に対応する値 $t_* \sqrt{\alpha/d} = 1.36$ とよく一致している。

加速度 α が周期 T で変化する場合、 $t \sqrt{\alpha/d}$ のために、加速度 α が最大になる時間 $T/2$ よりも $t \sqrt{\alpha/d}$ が最大になる時間 T_1 の方が長い。すなわち減速時間よりも渦が発達する時間の方が長い。

振動流中を落下する場合の物体の後流は、静水中を落下する場合の後流と振動流の影響で発生する後流との和であると考える。すなわち平均後流形状 \bar{l}/d は

$$\frac{\bar{l}}{d} = \left(\frac{\bar{l}}{d} \right)_{\text{静水}} + \left(\frac{\bar{l}}{d} \right)_{\text{振動水}} \quad (14)$$

と考える。

加速時での後流の平均形状を l_1/d 、減速時での平均形状を l_2/d とすると、加速時では、

$$\begin{aligned} \frac{l_1}{d} &= \frac{T}{T_1} \int_0^{T_1 \sqrt{\alpha(T_1)/d}} f(t \sqrt{\alpha/d}) \cdot d(t \sqrt{\alpha/d}) \\ &= \frac{T}{T_1} \int_0^{t_*} f(t_*) dt_* \end{aligned} \quad (15)$$

減速時では

$$\begin{aligned} \frac{l_2}{d} &= \frac{T}{T-T_1} \int_{T_1 \sqrt{\alpha(T_1)/d}}^0 f(t \sqrt{\alpha/d}) \cdot d(t \sqrt{\alpha/d}) \\ &= \frac{-T}{T-T_1} \int_0^{t_*} f(t_*) dt_* \end{aligned} \quad (16)$$

である。ここに Fig. 5 より、 $\frac{l(t)}{d} = f(t \sqrt{\alpha(t)/d})$ で

あり、 $t_* = T_1 \sqrt{\alpha(T_1)/d}$ である。 $t_* > 3.5$ の場合、円柱後方でカルマン渦が離脱し始めるが、この領域では加速時と減速時の抗力の変化過程は同じであると考える。

したがって、1 周期での平均後流形状 $\left(\frac{\bar{l}}{d} \right)_{\text{振動水}}$ は、式 (15) と (16) より、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{l}}{d} \right)_{\text{振動水}} &= \frac{T(T-2T_1)}{T_1(T-T_1)} \int_0^{t_*} f(t_*) dt_* \\ &= \frac{1-2\frac{T_1}{T}}{\frac{T_1}{T}\left(1-\frac{T_1}{T}\right)} \int_0^{t_*} f(t_*) dt_* \end{aligned} \quad (17)$$

と与えられ、 $T/2 < T_1$ であるから、振動流の影響で発生する後流形状は常に負となる。したがって、静水中を落下する場合よりも、振動流中を落下する場合の方が後流形状は小さくなる。

円柱後流の実験結果を球後流現象に直接関連づけるのは困難ではあるが、種田⁴⁾ (1956) は優れた可視化技術によって、レイノルズ数が約 24 以下では球の後方に安定な渦は発生せず、 R_e 数が増加するに従い渦は大きく成長し、 R_e 数が 200 以上から渦は不安定となり、球から周期的に渦が離脱することを示している。円柱後方に発生するカルマン渦は二次元であり、球後方に発生する渦と同一ではないが、現象的にはよく似ていると思われる。

以上、前述のモデルからの推察より、振動流中を落下する粒子に発生する渦形状は静水中の場合よりも小さくその結果、振動流中での粒子は振動数が大きいほど、緩やかに沈降するものと思われる。

5. 結 論

Baird らの実験データでの検討および円柱による実験結果より、振動流中を落下する粒子は、鉛直速度成分が大きくなり振動数が大きくなるほど、静水時の場合よりも緩やかに沈降するものと思われる。

参 考 文 献

- 1) Houghton, G. : Particle retardation in vertically oscillating fluids, Can. Jour. Chem. Eng., Vol. 46, pp. 79~81, Apr., 1968.
- 2) Baird, H.I.M., M.G. Senior and R.J. Thompson : Terminal velocities of spherical particles in a vertically oscillating liquid, Chem. Eng. Sci., Vol. 22, pp. 551~557, 1967.
- 3) Schlichting, H. : Boundary-Layer Theory, McGraw-Hill Co., pp. 411~415, New York, 1968.
- 4) Taneda, S. : Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds numbers, Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Vol. 4, No. 16, pp. 99~105, Oct., 1956.

(1981.10.5・受付)