

## はりの横倒れ座屈挙動に関する一簡易算定法

SIMPLIFIED FORMULAS FOR THE ULTIMATE LOAD BEHAVIOR  
OF LATERALLY UNSUPPORTED BEAMS

西田 進\*・福本 哲士\*\*

By Susumu NISHIDA and Yuhshi FUKUMOTO

### 1. まえがき

横倒れ不安定現象に関する研究は古くから数多くの研究者によって理論的にも、実験的にも行われてきた。これらの研究を総括したものに、Prandtl および Michell の研究(1899年)から 1959 年までの横倒れ座屈に関する文献調査を行った Lee<sup>1)</sup> の研究がある。一方、Massonet<sup>2)</sup> は 1955 年の ECCS (ヨーロッパ鋼構造連合) の創設から 1977 年の Budapest Colloquium までの ECCS の発展に沿って、はりの耐荷力をも含めた鋼構造物の安定問題一般について総括を行っている。この中で、彼ははりの耐荷力解析において固有値問題としての座屈解析ではなく、初期不整をも考慮した耐荷力解析の、また確定論的ではなく、確率論的考察の必要性を説いている。今後の研究課題については、Bjorhovde<sup>3)</sup> が柱およびはりを中心に鋼構造物の安定性問題全般について明示している。

厳密な理論解析をさらに発展させて、実際の設計に利用可能な規定(ここでは基本強度式を意味する)とする必要がある。この規定化は実外力による部材の挙動を再現することを理想とするが、その間に多くの不確実性が存在しており、各設計法における基本強度式も、その歴史的発展の中で、さまざまな仮定を一つずつ取り除きながら現在に至っている。なお、設計基本強度式の誘導にあたっては、現象にできるだけ忠実であると同時に、設計全体との関連性、経済性も考慮し、複雑な解析を要する部分や経験に基づいた事項は構造規定として補いつつ、複雑さを避け、できるだけ簡便な形式であることが必要であろう。

このようしたことから、はりの基本強度式として、等曲げを受ける両端単純支持ばりの座屈強度式を基本とし、

作用荷重や端部拘束の影響を荷重係数および有効長さ係数として考慮している<sup>4)~6)</sup>。この係数値を求める方法として、Clark および Hill<sup>7)</sup> はエネルギー法を用いて一般的な場合の弾性座屈強度式を求めるとともに、この各係数値を与える式を示した。なお、Djalary<sup>8)</sup> が実際にこの係数値の計算を実行している。また、Nethercot および Trahair<sup>9)</sup> は、拘束ばりの座屈モードの変曲点に注目し、有効長さの精度のよい簡易計算法を示している。

本研究では、まず、曲率半径の大きな曲がりばり<sup>10)</sup>と直ばり<sup>11)</sup>の 3 点曲げ試験結果をもとに、柱の耐荷力モデル<sup>12)</sup>を参照しながら、2 軸対象 I 形断面ばりの耐荷力と座屈強度および最大強度に関する簡単な解析モデルを提案する。なお、座屈強度とは Galambos の成書<sup>13)</sup>で定義されている接線剛性係数理論による非弾性座屈強度を指し、最大強度は座屈した後に、はりが支え得る強度の最大値であり、後座屈強度を指している。また、初期変形を有する場合のはりの最大強度を耐荷力と定義する(図-1 参照)。次に、提案する解析モデルを用いて耐荷挙動と座屈挙動を計算し、座屈強度、最大強度および耐荷力の間における相互の関連性について検討を加えるとともに強度値の相互比較を行う。最後に、解析モデルか

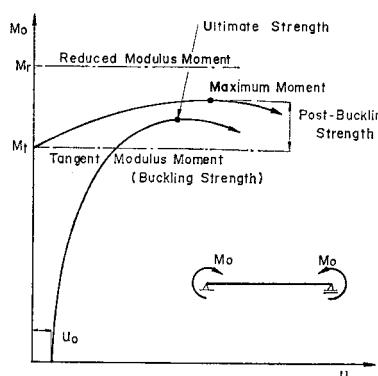


Fig. 1 Definition of Buckling, Maximum and Ultimate Strength.

\* 正会員 工博 金沢工業大学教授 土木工学科

\*\* 正会員 Ph.D. 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科

ら導かれる強度式と現行の各基本強度式および福本・久保<sup>14)</sup>によって収集されたはりの耐荷力の実験値とを比較検討し、はりの耐荷力と座屈強度に関する簡単な推定式を提案する。

## 2. 耐荷力解析

### (1) 初期不整を有するはりの荷重・変形挙動

等曲げが作用する両端単純支持ばりの荷重・変形挙動を考える。いま、はりの面外初期変形  $u_0$  および初期ねじれ角  $\varphi_0$  が次に示すように  $\sin$  の半波長に近似できるものとする。

$$u_0(z) = U_0 \sin \frac{\pi z}{L}, \quad \varphi_0(z) = \phi_0 \sin \frac{\pi z}{L} \quad \dots \dots (1)$$

ここに  $L$  ははりの部材長を、 $U_0$  および  $\phi_0$  は部材中央部における横方向初期変位量および初期ねじれ角を示す。はりの初期不整量の実測値として、福本らによる圧延 I 形ばかり<sup>11)</sup>および溶接 I 形ばかり<sup>15)</sup>に関するものがあり、はりの初期不整として  $\sin$  の半波長に近似できる実測例がきわめて多いことを報告している。

さて、初期変形  $u_0, \varphi_0$  を有するはりの基礎微分方程式は坂井<sup>16)</sup>によって与えられており、等曲げ  $M_0$  が作用する 2 軸対称 I 形ばかりの場合、式(1)を代入すると

$$EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} + M_0 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = M_0 \phi_0 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi z}{L} \quad \dots \dots (2 \cdot a)$$

$$EI_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - GK_T \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + M_0 \frac{d^2 u}{dz^2} = M_0 U_0 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi z}{L} \quad \dots \dots (2 \cdot b)$$

となる。ここに  $u$  および  $\varphi$  は荷重によるはりの面外変位およびねじり角を示し、 $EI_y$ 、 $EI_\omega$  および  $GK_T$  は横方向曲げ剛性、そり剛性および St. Venant のねじり剛性を表わす。

はりの両端が単純支持の場合、式(2)の解として

$$u(z) = U \sin \frac{\pi z}{L}, \quad \varphi(z) = \phi \sin \frac{\pi z}{L} \quad \dots \dots (3 \cdot a)$$

$$U = \frac{U_0 + \frac{r_0^2 P_{zE}}{M_0} \phi_0}{\left( \frac{M_E}{M_0} \right)^2 - 1}, \quad \phi = \frac{\phi_0 + \frac{P_{yE}}{M_0} U_0}{\left( \frac{M_E}{M_0} \right)^2 - 1} \quad \dots \dots (3 \cdot b)$$

を得る。ここに  $P_{yE}$ 、 $P_{zE}$  および  $M_E$  は

$$P_{yE} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2}, \quad P_{zE} = \frac{1}{r_0^2} \left\{ GK_T + \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} \right\} \quad \dots \dots (4 \cdot a, b)$$

$$M_E = \sqrt{\frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \left( GK_T + \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} \right)} \quad \dots \dots (4 \cdot c)$$

であり、それぞれ柱のオイラー座屈荷重、柱のねじれ座屈荷重および横倒れ座屈荷重を表わす。また、 $r_0$  は断面極 2 次半径を示す。なお、Nylander<sup>17)</sup>もほぼ同様な解析を行っているが彼の場合、 $u_0 = k_1 u$ 、 $\varphi_0 = k_2 \varphi$  とし、最大変位 ( $f_0 = u_0 + 1/2 d\varphi_0$ ) を一定値として解析するため、式(3)の  $u$  および  $\varphi$  は複雑な表示となる。

### (2) 耐荷力解析モデル

著者らは曲げねじりに対するはりの単純支持の条件を満足させる支承<sup>11)</sup>および面外変形進行中も常に鉛直方向の載荷を保証する Gravity-Load Simulator<sup>11)</sup>を用いて比較的大きな曲率半径を有する曲がりばかりの耐荷力実験<sup>10)</sup>を行った。図-2 および 3 は直ばかりに近い程度の初期曲がりをもつ曲がりばかり（部材長  $L=2.8$  m、曲率パラメーター  $L/8 R=1/1000$ ）の実験結果を示す。図-2

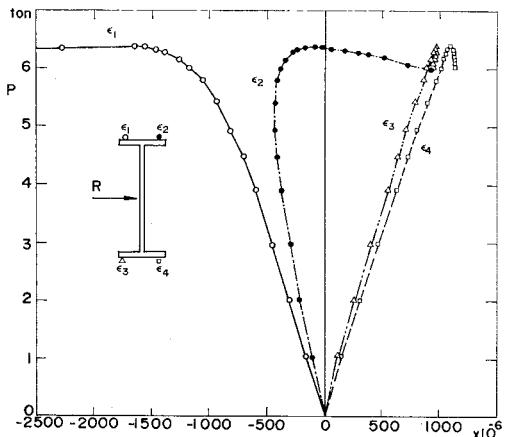


Fig. 2 Load-Strains at Flange Tips Relation of Curved Beam (Ref. 10).

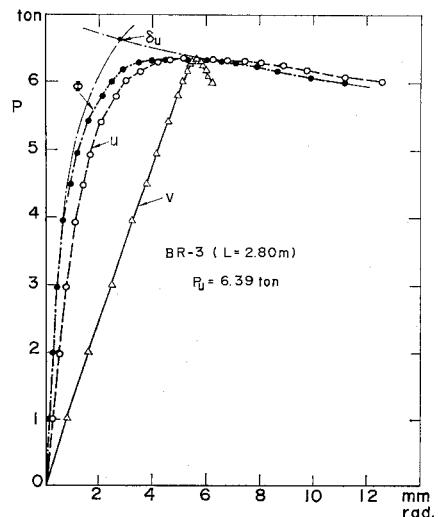


Fig. 3 Load-Displacements Relation of Curved Beam (Ref. 10).

の縦軸は作用荷重を表わし、図中の白丸および黒丸ははり中央部における圧縮フランジ両端のひずみを、三角および四角は引張りフランジ両端のひずみを表わす。図-3は作用荷重とはり中央部における鉛直変位  $v$ 、水平変位  $u$  およびねじり角  $\phi$  の関係を表わす。

図-2 の荷重・ひずみ関係および図-3 の荷重・ねじり角関係から、図-4 に示す耐荷力解析モデルを考える。すなわち、図-2 より引張りフランジのひずみは常に弾性範囲内にあり（図-2 の  $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ ）、圧縮フランジのひずみは小さな荷重に対する圧縮弾性ひずみ ④ から荷重の増加とともに面外曲がりの凹部（図-2 の  $\varepsilon_1$ ）が降伏ひずみ ③ に達し、その後凸部（図-2 の  $\varepsilon_2$ ）に引張りひずみ ⑤ が生じ、最終的には圧縮および引張りの完全塑性状態 ⑥ に達するものと考えられる（図-4 の ④～⑥）。上記挙動を厳密に解析するには困難が多く、ここでは ④ の弾性挙動と ⑥ の圧縮フランジの完全塑性状態での挙動のみを取り出し、両曲線の交点の値（図-4 の  $\delta_u$ ）をもって耐荷力を定義する。この  $\delta_u$  は真の最高荷重よりやや大きめの値を与えるが ⑥ の曲線が緩やかなため、その差は小さいものと思われる（図-3 のねじり角  $\phi$  の挙動を細い一点鎖線に近似することによる誤差を意味する）。

さて、領域 ⑥ の圧縮フランジの応力状態に対して完全塑性を用い、また引張りフランジの弾性応力状態に対する変形  $u$  および  $\phi$  の値として弾性解（式(3)）を用いると、フランジ面内の曲げに対する、次の弾性曲げモーメントおよび軸方向力による低減を考慮した全塑性モーメントを得る。

$$M_{LF} = -EI_F \frac{d^2 u_{LF}}{dz^2} = EI_F \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left[ U - \frac{d}{2} \phi \right] \quad (5 \cdot a)$$

$$M_{UF} = M_{pc} = M_p \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_y} \right)^2 \right]$$

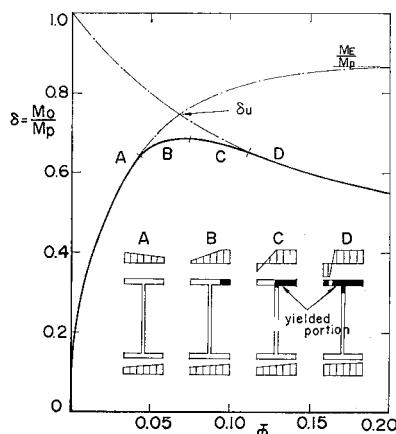


Fig. 4 Simplified Model for Ultimate Load Behavior.

$$= \frac{\sigma_y t b^2}{4} \left[ 1 - \left( \frac{M_0}{\sigma_y b t d} \right)^2 \right] \quad (5 \cdot b)$$

次に、はり断面の弱軸に関する曲げモーメントの関係  $M_y = M_{UF} + M_{LF} = M_0 \varphi$  を用いるとはり中央部のねじり角  $\phi$  は次式にて与えられる。

$$\phi = \frac{M_{UF} + M_{LF}}{M_0} \quad (6 \cdot a)$$

式(5)を式(6a)に代入すると

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\sigma_y t b^2}{6 M_0} \left[ \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left( \frac{M_0}{\sigma_y b t d} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 - \frac{P_y E d}{2 M_0} \right) \frac{\pi^2 E b}{2 \sigma_y L^2} \frac{U_0}{(M_E/M_0)^2 - 1} \right] \end{aligned} \quad (6 \cdot b)$$

が得られる。ここに  $\sigma_y$  は降伏応力を表わす。また、部材の初期不整として曲がり  $U_0$  のみを考慮し、断面の全塑性モーメントの計算にあたってはウエブの影響を無視し、 $d-t=d$  と近似する ( $M_p = \sigma_y b t d$ )。

式(3b)と式(6b)の  $\phi$  を等置すると

$$\begin{aligned} \left( \frac{M_u}{M_p} \right)^4 - \left\{ 1 + 4 \frac{P_y E d U_0}{\sigma_y b t^2} + \left( \frac{M_E}{M_p} \right)^2 - \frac{\pi^2 E b U_0}{3 \sigma_y L^2} \right\} \\ \cdot \left( \frac{M_u}{M_p} \right)^2 - \frac{\pi^2 E b d P_y E d U_0}{6 \sigma_y M_p L^2} \left( \frac{M_u}{M_p} \right) + \left( \frac{M_E}{M_p} \right)^2 \\ = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。上式は  $M_u/M_p$  の4次式であり、直接解析を求ることは困難であるので、簡略化のために次の仮定を導入する。まず、St. Venant のねじり項による効果が無視できるような短いはりを対象とすると、 $M_E$  は次のように近似できる。

$$\begin{aligned} M_E &= \sqrt{\frac{\pi^2 E I_y}{L^2}} \left( G K_T + \frac{\pi^2 E I_w}{L^2} \right) \approx \frac{\pi^2 E}{L^2} \sqrt{I_y I_w} \\ &\approx \frac{\pi^2 E b^3 d t}{12 L^2} \end{aligned} \quad (8)$$

次に、 $M_u/M_p$  の1次項を消去する。すなわち、式(7)の第3項においてのみ  $M_u \approx M_E$  とおけばこの消去は満足される。すると式(7)は次式のように簡略化される。

$$\begin{aligned} \left( \frac{M_u}{M_p} \right)^4 - \left\{ 1 + \left( \frac{M_E}{M_p} \right)^2 + \frac{2 \pi^2 E b}{3 \sigma_y L} \frac{U_0}{L} \right\} \\ \cdot \left( \frac{M_u}{M_p} \right)^2 + \left( \frac{M_E}{M_p} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

を得る。ここで正規化した細長比  $\bar{\lambda}$  および次の無次元量

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{M_p}{M_E}} \approx \frac{2}{\pi} \sqrt{3} \frac{L}{b} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \quad (10 \cdot a)$$

$$\delta_u = \frac{M_u}{M_p}, \quad \alpha_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} \frac{U_0}{L} \quad (10 \cdot b, c)$$

を導入すると式(9)は次式となる。

$$\delta_u^4 - \left\{ 1 + \frac{1}{\bar{\lambda}^4} + \frac{\alpha_1}{\bar{\lambda}} \right\} \delta_u^2 + \frac{1}{\bar{\lambda}^4} = 0 \quad (11)$$

これより耐荷力  $\delta_u$  は式(12)として与えられる。

$$\delta_u = \frac{1}{\sqrt{2} \lambda^2} \sqrt{(1 + \bar{\lambda}^4 + \alpha_1 \bar{\lambda}^3) - \sqrt{(1 + \bar{\lambda}^4 + \alpha_1 \bar{\lambda}^3)^2 - 4 \bar{\lambda}^4}} \quad \dots \dots \dots (12)$$

なお、 $\delta$  および  $\lambda$  の計算にあたって、全塑性モーメント ( $M_p = \sigma_y b t d$ ) および弾性座屈モーメント ( $M_E = \pi^2 E b^3 d t / (12 L^2)$ ) の近似値を用いた場合には、 $\bar{\delta}$  および  $\bar{\lambda}$  と表示し、近似を行わない場合と区別する。

### 3. 横倒れ座屈強度解析

#### (1) 弾性座屈強度解析モデル

初期面外変形およびねじれ変形のないはりに断面の強軸まわりの曲げが作用する場合、作用荷重の大きさがある値に達するとはりには面外変形が急激に生じる。図-5 は福本ら<sup>11)</sup>によってとらえられた横倒れ座屈現象を表わす。図は前節で述べたように曲げおよびねじりに対し単純支持の条件を満足する支承を用いた H-200×100 × 5.5×8 mm、スパン長  $L=2.60$  m ( $\lambda=1.055$ ) のはり中央部上フランジに載荷した集中荷重  $P$  と部材中央部における鉛直変位 (●印)、上フランジの面外変位 (▲印) および下フランジの面外変位 (△印) の関係を表わす。図より、横倒れ座屈荷重に達するまではりの面外変形はほとんど生じることなく、この値に達すると圧縮フランジの面外変形のみが急速に生じることがわかる。図-5 の圧縮フランジの挙動を一点鎖線のように近似する。す

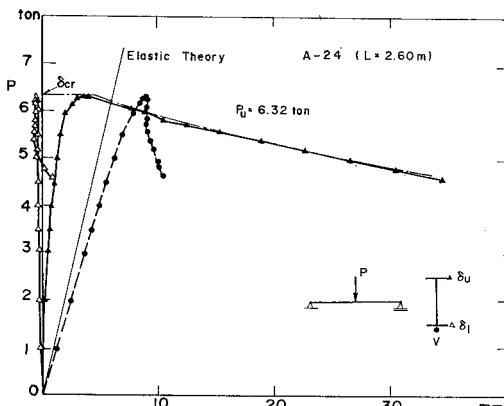


Fig. 5 Load-Displacements Relation of Straight Beam.

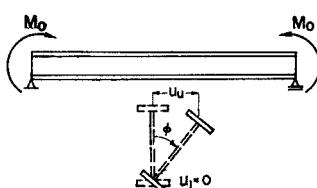


Fig. 6 Simplified Model for Lateral Buckling.

なわち、図-6 および 7 に示す座屈解析モデルを考える。モデルでは、座屈時に引張りフランジの面外変形は生ずることなく、圧縮フランジのみ座屈変形するものとする (図-

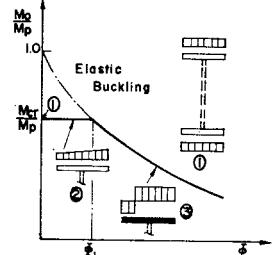


Fig. 7 Stress Distributions at Elastic Lateral Buckling.

6 参照)。なお、弾性座屈時の圧縮フランジの応力分布は図-7 に示すように固有値解析で求めた弾性座屈モーメント  $M_{cr}/M_p$  (図中の ①) は  $\phi$  に無関係に一定値 (図中の ②) を示しており、変形の増加とともにフランジ内に降伏域が広がり、その結果圧縮および引張りの完全塑性状態 (図中の ③) に達するものとする。

図-6 に示す座屈変形時のモードを  $\sin$  の半波長に仮定し、弱軸に関する曲げモーメントの関係より次式を得る。

$$M_y = M_{cr} \phi = -EI_F \frac{d^2 u_{UF}}{dz^2} = \frac{\pi^2 E b^3 d}{12 L^2} \phi \quad \dots \dots \dots (13)$$

ただし  $u_{UF} = \phi d \sin \pi z / L$

上式より、式(8)とまったく同じ座屈モーメントの式が求まる。

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 E b^3 d}{12 L^2} = M_E \quad \dots \dots \dots (14)$$

ただし  $\phi$  : 不定

また、圧縮フランジが完全塑性状態とした場合の  $\phi$  の値は式(5-b)を用いて

$$M_{pc} = M_0 \phi = \frac{\sigma_y t b^2}{4} \left[ 1 - \left( \frac{M_0}{\sigma_y b t d} \right)^2 \right] \quad \dots \dots \dots (15)$$

$$\therefore \phi = \frac{1 - \bar{\delta}^2}{\bar{\delta}} \frac{b}{4 d}$$

となる。なお、無次元化した作用モーメント  $\bar{\delta}$  が横倒れ座屈強度  $\bar{\delta}_{cr}$  より低下し始める場合のねじり角  $\phi_1$  (図-7 参照) は

$$\phi_1 = \frac{\bar{\lambda}^4 - 1}{\bar{\lambda}^2} \frac{b}{4 d} \quad \dots \dots \dots (16)$$

となり、図-5 の実験値の場合、 $M_{cr} = M_p$  なることより  $\phi_1$  はほぼ 0 となる。

#### (2) 非弾性座屈強度解析モデル

図-8 は福本ら<sup>11)</sup>によるスパン長  $L=1.5$  m ( $\lambda=0.741$ ) および 2.0 m ( $\lambda=0.914$ ) の圧延ばりの横倒れ座屈に対する荷重・変形挙動を示す。図-5 のモデル化した弾性座屈の例では圧縮フランジの面外変形がいったん生じると、面外変形の増加とともに作用荷重は緩やかに減少し

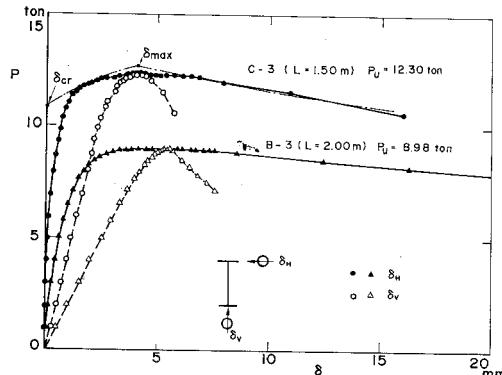


Fig. 8 Post-Buckling Behavior of Straight Beams (Ref. 11).

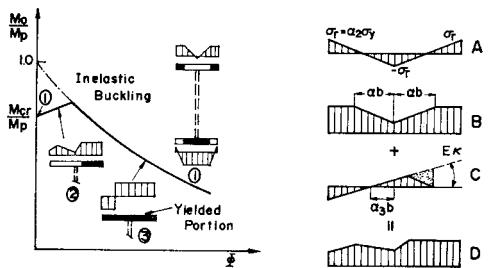


Fig. 9 Simplified Model for Post-Buckling Behavior.

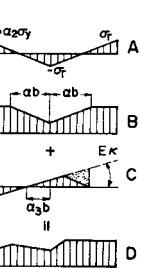


Fig. 10 Stress Distributions at Post-Buckling Behavior.

てゆく、一方、明らかに非弾性座屈する図-8 ケース C-3 の例では、荷重・変形挙動を図中的一点鎖線のようにモデル化できる。すなわち、面外変形が小さい範囲で、図-1 に後座屈強度として定義されているように変形の増加とともに作用荷重は滑らかに増加し、最大強度に達した後、圧縮フランジの面外変形の進行とともに作用荷重は緩やかに減少してゆく。図-8 に示す一点鎖線へのモデル化より、図-9 および 10 に示す後座屈挙動解析モデルを考える。すなわち、残留応力の影響により座屈強度が低下する場合、面内曲げによる応力と面外曲げによる応力とが互いに干渉して接線剛性係数による座屈強度(図-9 の ①)から等価剛性係数による座屈強度に向かうところの後座屈挙動を生ぜしめるものと仮定する(図-9 の ②)。

さて、圧縮フランジの残留応力の分布形状として図-10 ④ に示す圧延タイプの分布形を仮定する。この残留応力を有するはりに面内曲げが作用して図-9 の ① に示す応力状態に達したときははりは座屈するものとする。ここで、面外変形がまさに生じる瞬間には、断面内の降伏域が曲げに対して抵抗できないので、座屈に際しては、圧縮フランジの弾性核のみが有效地働く。式(13)の誘導と同様にして、非弾性横倒れ座屈強度

$$\frac{M_{cr}}{M_p} = (1 - 4\alpha^2\alpha_2) = \frac{M_{Ee}}{M_p} = \frac{(2\alpha)^3}{\bar{\lambda}^2} \quad (17)$$

を得る。ここに  $2\alpha$  は図-10 ③ に示すように弾性核の幅とフランジ全幅  $b$  の比を表わす。上式を  $2\alpha$  について解けば非弾性横倒れ座屈強度  $M_{Ee}$  が求まるが、ここでは計算を簡単にするため、 $\alpha=1/2$  の場合、弾性核の断面 2 次モーメントを表わす係数  $(2\alpha)^3$  が 1 なることを考慮して  $(2\alpha)^3$  を  $(2\alpha)^2$  に近似する。この近似を行うと無次元化した非弾性座屈強度  $\delta_{cr}$  は次式にて与えられる。

$$(2\alpha)^2 = \frac{\bar{\lambda}^2}{1 + \alpha_2\bar{\lambda}^2} \quad \therefore \delta_{cr} = \frac{(2\alpha)^2}{\bar{\lambda}^2} = \frac{1}{1 + \alpha_2\bar{\lambda}^2} \quad (18)$$

さて、圧縮フランジに面外変形が生じると座屈時の面内応力(図-10 ③)に面外曲げによる応力(図-10 ④)が加わって、図-10 ⑤ の応力分布になる。ここで、I 形断面ばかりの応力・ひずみ関係として完全弾塑性体のものを用い、除荷は弾性的に生じるものとする。なお、図-10 ⑤ の薄く塗りつぶした部分は最大応力が降伏応力を超えないことより除外しなくてはならないが、ここでは計算の便宜上除外しないものとする。

後座屈時の弱軸に関する曲げモーメント  $M_y$  は図-10 ⑥ による曲げモーメントに等しいことより

$$M_y = M_0\phi = \frac{\pi^2 E b^3 t d}{6 L^2} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \alpha_3 \right)^2 (1 + \alpha_3) + (\alpha + \alpha_3)(2\alpha - \alpha_3) \right\} \phi \quad (19)$$

を得る。上式より、フランジ中心からの中立軸のずれ  $\alpha_3$  が求まる。一方、面内曲げモーメント  $M_0$  は図-10 ③ および ⑥ による曲げモーメントの和に等しいことより

$$M_0 = P_U F d = \sigma_y b t d (1 - 4\alpha^2\alpha_2) + \frac{\pi^2 E b^3 t d^2}{2 L^2} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \alpha_3 \right)^2 + (\alpha + \alpha_3)^2 \right\} \phi \quad (20)$$

を得る。上式に式(19)から求まる  $\alpha_3$  と式(18)の 2  $\alpha$  を代入して整理すると

$$\phi = \frac{6(\bar{\delta} - \bar{\delta}_{cr})(1 - \bar{\delta}_{cr}\bar{\lambda}^2)^2}{\{1 - 3\bar{\delta}_{cr}\bar{\lambda}^2 - 2(\bar{\delta}_{cr}\bar{\lambda}^2)^{1.5} + 4\bar{\delta}\bar{\lambda}^2\}^2 + \{2 + 3\sqrt{\bar{\delta}_{cr}\bar{\lambda}} - (\bar{\delta}_{cr}\bar{\lambda})^{1.5} - 4\bar{\delta}\bar{\lambda}\}^2} \cdot \frac{\bar{\lambda}^2 b}{d} \quad (21)$$

を得る。式(21)は後座屈領域における  $\bar{\delta}-\bar{\lambda}-\phi$  曲線を示し、この  $\phi$  と式(15)の圧縮フランジが完全に降伏した状態での  $\phi$  との交点の  $\bar{\delta}$  値を最大強度  $\delta_{max}$  と定義する。式(21)の分母は複雑なので  $\bar{\delta}_{cr}\bar{\lambda}^2 = 1$  とおけば、次式のように簡単化される。

$$\phi = \frac{(\bar{\delta} - \bar{\delta}_{cr})\bar{\lambda}^2 b}{5d} \left\{ \frac{1 - \bar{\delta}_{cr}\bar{\lambda}^2}{1 - \bar{\delta}\bar{\lambda}^2} \right\}^2 \quad (22)$$

#### 4. 数値計算例と考察

##### (1) モデル解析値と実験値との比較

図-11は $\bar{\lambda}=1.0$ の単純ばかりに作用する等曲げモーメントとはり中央部のねじり角の関係を示し、実線は耐荷挙動を、点線は後座屈挙動を表わす。なお、残留応力の大きさを示す $\alpha_2$ の値として、平均値的な0.3と最大値および最小値に相当する0.5および0.1を用い、初期面外変位の大きさ $U_0/L$ として、圧延ばかりの実測値をまるめた $1 \times 10^{-4}$ (文献11)より)と製作許容誤差 $1 \times 10^{-3}$ および両者の平均値を用いた。図より、 $\bar{\lambda}=1.0$ のときに、フランジ内の圧縮残留応力により弹性座屈強度 $\delta_E$ より $\delta_{cr}$ に低下する場合には、後座屈強度を期待でき、その強度増加は $\alpha_2 = \sigma_r/\sigma_y$ が大きいほど大きいことがわかる。また、平均的な残留応力( $\alpha_2=0.3$ )を有するはりの最大強度( $\delta_{max}=0.873$ )は、実測平均値の初期面外変形を有するはりの耐荷力( $\delta_u=0.944$ )より小さく、許容製作誤差を有するはりの耐荷力( $\delta_u=0.827$ )より大きな値となる。

図-12は、断面の全塑性モーメント $M_p$ および弾性座屈モーメント $M_E$ を簡略化した $\delta-\bar{\lambda}$ 曲線と両者の簡略化を行わない厳密解としての $\delta-\lambda$ 曲線の関係を、縦軸に $\delta$ あるいは $\delta_u$ を、横軸に $\bar{\lambda}$ あるいは $\lambda$ をとって示したものである。図中の太い実線は式(12)の $\delta_u-\bar{\lambda}$ 曲線( $U_0/L=1/1000$ )を表わし、細い実線は図中に示す圧延タイプの残留応力を有する直ばかりに近い曲がりばかり<sup>10)</sup>( $U_0/L=L/8 R=1/1000$ )の耐荷力曲線を表わす。また、二点鎖線は、等分布荷重 $q$ と両端に作用する等

曲げモーメント $M_0=ql^2/16$ が偏心載荷( $e/L=1/1000$ )する場合のLindner<sup>18)</sup>による耐荷力曲線を表わす。文献10)および18)の厳密解( $\delta_u-\lambda$ 曲線)と本研究による近似解( $\delta_u-\bar{\lambda}$ 曲線)がよく対応することより、初期不整を有するはりの耐荷力 $\delta_u$ の推定にあたっては式(12)の $\delta_u$ を $\delta_u$ に、 $\bar{\lambda}$ を $\lambda$ に読み換えて以後、用いるものとする。

図-12の太い点線は式(18)の $\delta_{cr}-\bar{\lambda}$ 曲線( $\sigma_r/\sigma_y=0.3$ )を表わし、細い点線および一点鎖線は、図中に示す圧延タイプの残留応力を有するはりの接線剛性係数理論による横倒れ座屈強度曲線を表わす。細い点線は横倒れ座屈強度を断面の降伏モーメント $M_y$ で無次元化した場合を、一点鎖線は全塑性モーメント $M_p$ で無次元化した場合を示す。なお、面内曲げと残留応力によりはりの圧縮フランジが完全に降伏した場合、断面の弾性域はT形となり、座屈解析ではこの場合断面のそり剛性を

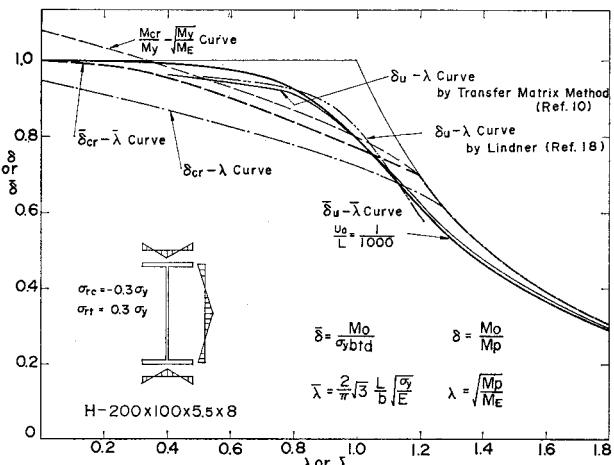


Fig. 12 Comparison between  $\delta-\lambda$  Curve and  $\bar{\delta}-\bar{\lambda}$  Curve.

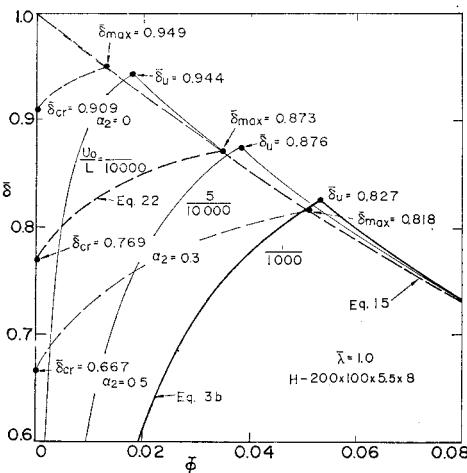


Fig. 11 Effect of Residual Stresses and Initial Imperfection.

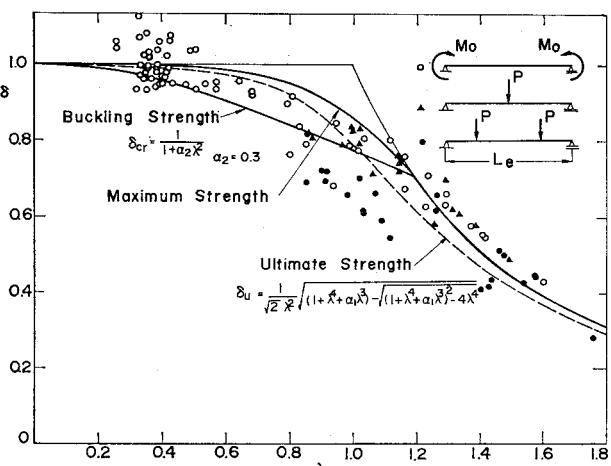


Fig. 13 Buckling, Maximum and Ultimate Strength of Beam.

零とするため、 $\lambda=0$  で  $\delta_{cr}$  は  $\delta_{cr}=1.0$  とはならない。残留応力を有するはりの非弾性座屈強度  $\delta_{cr}$  を求める際、I形ばかりの全塑性モーメントの近似値  $M_p = \sigma_y b t d$  を用いて  $\delta_{cr}-\bar{\lambda}$  曲線を導いたが、 $\sigma_y b t d$  なる値は、I形断面の場合、全塑性モーメント  $M_p$  よりもむしろ降伏モーメント  $M_y$  の値に近い。このことと、図中の細い点線（厳密解）を安全側に評価したのが太い点線（近似解）に相当することより、降伏モーメント  $M_y$  で無次元化した横倒れ座屈強度の推定にあたっては、式(18)で与えられる  $\delta_{cr}-\bar{\lambda}$  曲線を  $M_{cr}/M_y - \sqrt{M_y/M_E}$  曲線として用いるといい。

図-13は  $\sigma_r/\sigma_y=0.3$  なる残留応力を有するはりの横倒れ座屈強度および最大強度と  $U_0/L=1/1000$  なる初期面外変形を有するはりの耐荷力との関係を表わす。図より、はりの強度低下に及ぼす残留応力および初期面外変形の影響は、細長比  $\lambda$  の小さい領域では圧縮残留応力  $\sigma_r$  の方が大きく、 $\lambda$  の大きい領域では初期面外変形  $U_0/L$  の方が大きい。また、通常よく用いられる細長比では、 $U_0/L=1/1000$  の場合、横倒れ座屈強度、耐荷力、最大強度の順に強度が大きいことがわかる。しかし、正規化した細長比  $\lambda=1.0$  の近傍では、前2者の強度はほぼ同程度であり、残留応力と初期面外変形の影響をともに考慮したより複雑な解析では両者は複雑に影響し合う。

図中のプロットは福本・久保<sup>14)</sup>によって収集された圧延I形ばかりの横倒れ座屈実験値を表わす。図より、これらの実験値のほぼ平均的な位置にはりの耐荷力曲線が、上限的な位置に最大強度曲線が、下限的な位置に座屈強度曲線がある。

## (2) モデル解析と設計基本強度式

図-14 はりに関する代表的な設計基本強度式<sup>17)~19)</sup>

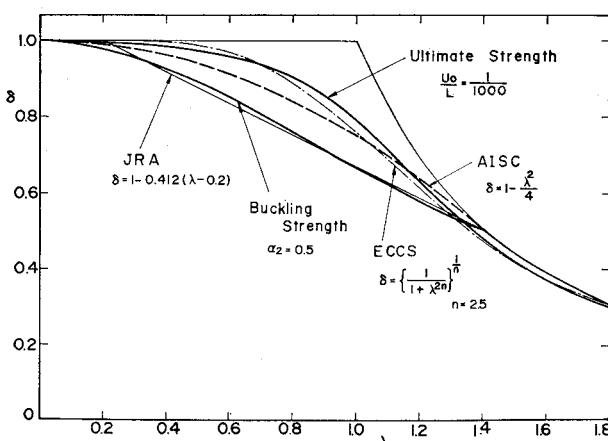


Fig. 14 Comparison between Design Curves and Proposed Curves.

と本解析値との関連性を表わす。ただし、JRA および AISC の強度曲線は許容応力度設計なるため、縦軸は  $\sigma_r/\sigma_y$  を意味し、横軸は、AISC では弾性座屈モーメントと降伏モーメントが等しい場合に 1.0 となるように正規化した細長比  $L/L_y$  を意味し、JRA では式(10-a)とほぼ同様にして導き出された細長比

$$\lambda = \frac{2}{\pi} \sqrt{3 + \frac{A_w}{A_c}} \left( \frac{L}{b} \right) \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \quad \dots \dots \dots (23)$$

を意味する。

道路橋示方書の直線基本強度式<sup>17)</sup>は、はりの横倒れ座屈に及ぼす St. Venant のねじりの効果を無視し、そりねじりの効果のみを考慮して導かれた横倒れ座屈強度を基本とし、実験値に対して安全側となるようにして引かれた直線式に基づいている。図より、道路橋示方書の直線式は  $\sigma_r/\sigma_y=0.5$  なる残留応力を有するはりの横倒れ座屈強度曲線とよく対応していることがわかる。

ECCS の基本強度式<sup>18)</sup>の  $n$  値は、荷重偏心を有するはりの耐荷力解析結果と、曲げ試験結果の平均値を表わすものとして導き出され、 $n=2.5$  なる数値が与えられている。ECCS の座屈曲線と初期不整を有するはりの耐荷力曲線はよく対応しており、また文献18)からもわかるように ECCS の座屈強度曲線は  $U_0/L=1/1000$  なる初期不整を有するはりに耐荷力曲線にも対応する。

AISC の放物線公式<sup>19)</sup>は、横倒れ座屈が圧縮フランジとウェブの圧縮応力部からなる部分柱の曲げ座屈とみなせることより、柱に対するものと同じ基本強度式になっている。AISC の曲線は放物線形の経験式<sup>13)</sup>であり、図において、座屈強度曲線と耐荷力曲線の中間に位置している。

## 5. あとがき

はりの強軸まわりの曲げ強度を求める方法は、直ばかりの分岐座屈問題としてとらえる方法と初期変形を有するはりの耐荷力問題としてとらえる方法に分けられる。

本研究では、横倒れ座屈強度とはりの耐荷力について簡単な解析モデルを提案し、両者の関連性について種々の検討を行った。モデル解析によるものではあるが以下のことが明らかになった。

(1) はりの耐荷挙動には残留応力、初期不整等が大きく影響を及ぼし、厳密な耐荷力解析は複雑なものとなる。この耐荷挙動を2次弹性解析および引張りフランジは弾性、圧縮フランジは完全塑性なる2次塑性解析としてモデル化すると実験ばかりの定性的挙動を説明できることがわかった。

提案する耐荷力モデルによる耐荷力値は式(12)に示す  
解析解として与えられる。

(2) 横倒れ座屈強度の考え方を座屈実験結果を用いてより簡明な形で与え、これと後座屈挙動を関連づけた。この後座屈挙動を説明する解析モデルと耐荷力の解析モデルを併用することにより、一般に図-1として示されるところの座屈強度、最大強度および耐荷力の相互の定性的および定量的関連性を説明することができる。

(3) 耐荷力および最大強度を求めるにあたってウェブの影響を無視し、弾性座屈強度の近似化も行った。モデル解析より得た式(12)の耐荷力および式(18)の非弾性座屈強度式における $\bar{\delta}$ および $\bar{\lambda}$ を $\delta$ および $\lambda$ に置換して、実験値およびはりの基本強度式と比較すると、本解析法による提案式は実験値およびはりの基本強度式とよく対応することが明かになった。

はりの簡単な解析モデルを提案し、これを用いて等曲げを受ける単純支持ばりの耐荷挙動と横倒れ座屈挙動を説明した。耐荷挙動および座屈挙動の平易で簡潔な誘導に重点を置いた。初期変形と残留応力の耐荷力に及ぼす相乗効果と等曲げ・単純支持以外の荷重・境界条件に関する耐荷力の推定方法の2点については文献4)～6)を参照されたい。

本研究で提案する簡易式を設計に用いる場合、次の2点に注意する必要がある。初期不整量 $U_0/L=1/1\,000$ を有するはりの耐荷力式 $\delta_u$ は強度の平均値をねらったものであり、設計では強度のばらつきを何らかの形で考慮する必要があろう。一方、安全側の評価をねらったはりの座屈強度式 $\delta_{cr}$ は、初期不整の影響を残留応力の中へ含めて評価する必要がある。たとえば $\sigma_r/\sigma_y=0.5$ と評価すれば、強度式は道示の基本強度式と同等なものとなる。

#### 参考文献

- 1) Lee, G.C. : A Survey of Literature on the Lateral Instability of Beams, WRC, Bulletin Series No. 63, pp. 50～59, Aug. 1960.
- 2) Massonet, Ch. and R. Maquoi : Resent Progress in

the Field of Structural Stability of Steel Structures, IABSE Surveys, S-5/78, pp. 1～40, 1978.

- 3) Bjorhovde, R. : Research Needs in Stability of Metal Structures, Proc. of ASCE, Vol. 106, No. ST 12, pp. 2425～2441, Dec. 1980.
- 4) 青島泰之：圧延H型鋼ばりの横倒れ座屈公式、土木学会論文報告集、No. 267, pp. 1～8, 1977年11月。
- 5) 谷口元・秋山宏：H形断面梁に関する横座屈設計式の提案、建築学会論文報告集、No. 295, pp. 33～43, 1980年9月。
- 6) 建築学会：鋼構造座屈設計指針、丸善, 1980年9月。
- 7) Clark, J.W. and H.N. Hill : Lateral Buckling of Beams, Trans. of ASCE, Vol. 127, Part II, pp. 180～201, 1962.
- 8) Djalaly, H. : Calcul de la résistance ultime au déversement, Construction Métallique, No. 1, pp. 217～242, 1974.
- 9) Nethercot, D.A. and N.S. Trahair : Lateral Buckling Approximation for Elastic Bending, The Structural Engineer, Vol. 54, No. 6, pp. 197～204, June 1976.
- 10) Fukumoto, Y. and S. Nishida : Ultimate Load Behavior of Curved I-Beams, Proc. of ASCE, Vol. 107, No. EM 2, pp. 367～385, April 1981.
- 11) Fukumoto, Y., Y. Itoh and M. Kubo : Strength Variation of Laterally Unsupported Beams, Proc. of ASCE, Vol. 106, No. ST 1, pp. 165～181, Jan. 1980.
- 12) Horne, M.M. and W. Merchant : The Stability of Frames, Pergamon Press, 1965.
- 13) Galambos, T.V. : Structural Members and Frames, Prentice-Hall, 1968.
- 14) Fukumoto, Y. and M. Kubo : An Experimental Review of Lateral Buckling of Beams and Girders, Proc. of International Colloquium on Stability of Structures under Static and Dynamic Loads, SSRC/ASCE, Washington, D.C., pp. 541～562, May 1977.
- 15) Fukumoto, Y. and Y. Itoh : Statistical Study of Experiments on Welded Beams, Proc. of ASCE, Vol. 107, No. ST 1, pp. 89～103, Jan. 1981.
- 16) 坂井藤一：薄肉開断面部材の弾性安定基礎方程式の統一的誘導、土木学会論文報告集、No. 221, pp. 1～15, 1974年1月。
- 17) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説、1980年2月。
- 18) ECCS-IABSE : Liege Colloquium on Stability of Steel Structures, 13-15, April 1977, Preliminary Report, Feb. 1977.
- 19) AISC : Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings, Feb. 1969.

(1981.9.21・受付)