

岡林隆敏 著 “不規則な分布荷重を受けるはりの解析” への討議

(土木学会論文報告集 第316号・1981年12月掲載)

▶ 討議者 (Discussion) ————— 高岡宣善・白木 渡・松保重之 (鳥取大学)

By Nobuyoshi Takaoka, Wataru Shiraki and Shigeyuki Matsuho

1. はじめに

不規則な荷重の作用を受けるはりの応答の確率論的計算法については、1977年にルジャニーツインによって解が発表されている¹⁴⁾。この研究成果はまた同氏の著書の第7章にも収録されている¹⁵⁾。著者らはルジャニーツインの手法を用いて道路橋の信頼性解析を行った結果の一部を土木学会で発表し^{16)~18)}、現在もその研究を継続している。

ルジャニーツインの方法は、不規則関数論のうちの相関理論¹⁹⁾にその基礎を置いており、はりに作用する不規則分布荷重の確率特性値(期待値と相関関数)が既知であれば、はりの応答(たわみと断面力)の確率特性値は、各相関関数の間に成立する、①微分関係を利用すること(偏微分方程式を解く方法)、あるいは、②積分関係を利用すること、によってそれぞれ求められる。この手法は一般に岡林氏の計算法よりも簡単であると思われ、また種々の問題へも応用できる。

岡林氏の論文では、以上の研究について言及されていないので、以下においてこの手法の要点を述べ、合わせて岡林氏の取り扱った計算例の二、三を本解法によって解いてみよう。

2. 微分関係を用いる方法

t を助変数とする任意の不規則関数を $X(t)$ とし、その第 m 次導関数を $Y_m(t)$ としよう。

$$Y_m(t) = \frac{d^m X(t)}{dt^m} \dots\dots\dots (65)$$

不規則関数の相関理論によれば、 $X(t)$ および $Y_m(t)$ の各(自己)相関関数 $K_x(t_1, t_2)$ および $K_{y_m}(t_1, t_2)$ の間には、次の関係が成立する¹⁹⁾。

$$K_{y_m}(t_1, t_2) = \frac{\partial^{2m} K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1^m \partial t_2^m} \dots\dots\dots (66)$$

$$K_{y_m y_n}(t_1, t_2) = \frac{\partial^{m+n} K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1^m \partial t_2^n} \dots\dots\dots (67)$$

(ただし、式(67)の左辺は $Y_m(t)$ と $Y_n(t)$ との間の相互相関関数を意味する。) したがって、たとえば $X(t)$ の第1次、第2次の各導関数 $Y_1(t)$ 、 $Y_2(t)$ の各相関関数に対しては、式(66)より次の関係式が得られる。

$$K_{y_1}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \dots\dots\dots (68)$$

$$K_{y_2}(t_1, t_2) = \frac{\partial^4 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} \dots\dots\dots (69)$$

また、式(67)で $m=0, n=1$ とすると、 $X(t)$ と $Y_1(t)$ との間の相互相関関数 $K_{xy_1}(t_1, t_2)$ と $K_x(t_1, t_2)$ とを結びつける関係式

$$K_{xy_1}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2} \dots\dots\dots (70)$$

が得られる。

上述の予備知識のもとに、**Fig. 9** のような不規則分布荷重 $\tilde{q}(x)$ の作用を静的に受ける(任意の)はりの不規則曲げモーメント $\tilde{M}(x)$ について考えてみよう。ここに、文字 q, M の上側に付けた波形記号(〜)は、これらの文字で表わされる量が不規則変数であることを意味している。

さて、初等構造力学で周知のように、分布荷重 $\tilde{q}(x)$ と曲げモーメント $\tilde{M}(x)$ との間には、次の微分関係が成立している。

$$\frac{d^2 \tilde{M}}{dx^2} = -\tilde{q}(x) \dots\dots\dots (71)$$

したがって、 $\tilde{q}(x)$ 、 $\tilde{M}(x)$ の相関関数をそれぞれ $K_q(x_1, x_2)$ 、 $K_M(x_1, x_2)$ とすれば、式(69)により、両者の間には次式が成立する(注1)。

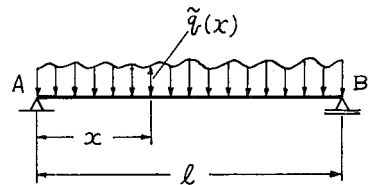


Fig. 9

注1) 式(69)において、それぞれ $t_1 \rightarrow x_1, t_2 \rightarrow x_2, Y_2 \rightarrow \tilde{q}, X \rightarrow M$ と読みかえてみよ。

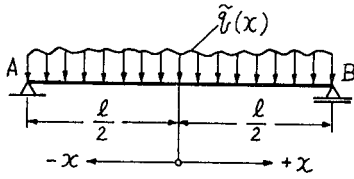


Fig. 10

$$\frac{\partial^4 K_M(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = K_q(x_1, x_2) \dots\dots\dots (72)$$

分布荷重の相関関数が既知であれば、境界条件の考慮のもとに式(72)を積分することにより、曲げモーメントの相関関数を求めることができる。

【計算例1】単純ばりの場合には、Fig. 10に示すように、座標xの原点をスパンの中央に置くと(式の対称性が利用できる)計算が容易となる。このとき、相関関数 $K_M(x_1, x_2)$ に対する境界条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} K_M\left(-\frac{l}{2}, x_2\right) &= K_M\left(\frac{l}{2}, x_2\right) = K_M\left(x_1, \frac{l}{2}\right) \\ &= K_M\left(x_1, -\frac{l}{2}\right) = 0. \dots\dots (73) \end{aligned}$$

偏微分方程式(72)の完全な解 $K_M(x_1, x_2)$ は

$$\begin{aligned} K_M(x_1, x_2) &= f_1(x_1) + f_2(x_2) + x_2 f_3(x_1) \\ &\quad + x_1 f_4(x_2) + K_M^*(x_1, x_2) \dots\dots\dots (74) \end{aligned}$$

という形をしている。ここに、 f_1, f_2, f_3, f_4 はいずれも x_1 または x_2 のみの任意関数であり、 $K_M^*(x_1, x_2)$ は式(72)の一つの特解である。

分布荷重 $q(x)$ が定常過程である場合には、その相関関数 $K_q(x_1, x_2)$ は、座標の差 τ , すなわち

$$\tau = x_1 - x_2 \dots\dots\dots (75)$$

のみの関数として次のように表わされる。

$$K_q(x_1, x_2) = K_q(x_1 - x_2) = K_q(\tau) \dots\dots\dots (76)$$

このときには、特解 $K_M^*(x_1, x_2)$ も τ のみの関数 $K_M^*(\tau)$ となり、 $K_q(\tau)$ との間に次の関係を有することが容易に証明できる。

$$\frac{d^4 K_M^*(\tau)}{d\tau^4} = K_q(\tau) \dots\dots\dots (77)$$

したがって、上式より

$$K_M^*(\tau) = \int_0^\tau \int_0^\tau \int_0^\tau K_q(\tau) d\tau^4 \dots\dots\dots (78)$$

として特解が求められる。

岡林氏は、分布荷重 $q(x)$ が(定常)白色雑音の場合、すなわちその相関関数が

$$K_q(\tau) = 2\pi S_q \delta(\tau) = S \cdot \delta(\tau) \dots\dots\dots (79)$$

という形で与えられる場合を取り扱っている。以下においてもこの場合について解を求めよう。式(79)において、 $\delta(\tau)$ は Dirac のデルタ関数であり、また $S = 2\pi S_q$ は定係数である。ちなみに、上記の相関関数に対

応するスペクトル密度 $S_q(\omega)$ は

$$S_q(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_q(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = S_q \dots\dots\dots (16)$$

となる。すなわち式(79)の S_q は、定常白色雑音 $q(x)$ のスペクトル密度である。

まず、式(79)を式(78)へ代入して特解を求めよう。その際、デルタ関数の一般的性質²⁰⁾

$$\left. \begin{aligned} \delta(-\tau) &= \delta(\tau) \\ \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(\tau) d\tau &= 2 \int_0^{\epsilon} \delta(\tau) d\tau = 1 \quad (\epsilon \text{ は任意の正数}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (81)$$

を考慮すれば、特解が

$$K_M^*(\tau) = \frac{S}{12} |\tau|^3 = \frac{S}{12} |x_1 - x_2|^3 \dots\dots\dots (82)$$

となることはすぐ理解できる。

さらに、簡単な計算の結果

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &= \frac{S}{96} (l^3 - 12lx^2), \\ f_3(x) = f_4(x) &= \frac{S}{24l} (l^2x + 4x^3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (83)$$

が得られる。ただし、上式中の x は x_1, x_2 のいずれでもよいので、記述の簡単のために下付き添字 1, 2 を省略している。途中の演算過程¹⁵⁾を省略して、最終結果を書けば、曲げモーメント $\tilde{M}(x)$ の相関関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} K_M(x_1, x_2) &= \frac{S}{96} (l^3 - 12lx_1^2) + \frac{S}{96} (l^3 - 12lx_2^2) \\ &\quad + \frac{Sx_2}{24l} (l^2x_1 + 4x_1^3) + \frac{Sx_1}{24l} (l^2x_2 + 4x_2^3) \\ &\quad + \frac{S}{12} |x_1 - x_2|^3 \dots\dots\dots (84) \end{aligned}$$

せん断力 $\tilde{Q}(x)$ は、曲げモーメント $\tilde{M}(x)$ との間に $\tilde{Q}(x) = d\tilde{M}(x)/dx$ という関係を有するから、式(68)、(84)により、せん断力の相関関数

$$\begin{aligned} K_Q(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2 K_M(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &= \frac{S}{24l} (l^2 + 12x_1^2) + \frac{S}{24l} (l^2 + 12x_2^2) \\ &\quad - \frac{S}{2} |x_1 - x_2| \dots\dots\dots (85) \end{aligned}$$

が得られる。

さらに、 $\tilde{M}(x)$ と $\tilde{Q}(x)$ との間の相互相関関数は、式(70)、(84)により、次のようになる。

$$\begin{aligned} K_{MQ}(x_1, x_2) &= \frac{\partial K_M(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ &= -\frac{Sl}{4} x_2 + \frac{Sx_1}{12l} (l^2 + 2x_1^2 + 6x_2^2) \\ &\quad - \frac{S}{4} (x_1 - x_2)^2 \dots\dots\dots (86) \end{aligned}$$

式(84)、(85)、(86)において、 $x_1 = x_2 = x$ とおくと

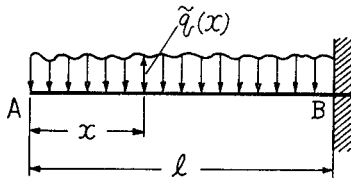


Fig. 11

$$K_M(x, x) = D_M(x) = \frac{Sl^3}{3} \left\{ \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{1}{4} \right\}^2, \quad \dots\dots\dots(87)$$

$$K_Q(x, x) = D_Q(x) = \frac{Sl}{12} \left\{ 12 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 1 \right\}, \quad \dots\dots\dots(88)$$

$$K_{MQ}(x, x) = D_{MQ}(x) = \frac{Sl^2}{6} \cdot \frac{x}{6} \left\{ 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 1 \right\} \quad \dots\dots\dots(89)$$

となる。ここに、 $D_M(x)$ 、 $D_Q(x)$ はそれぞれ断面 x における曲げモーメント、せん断力の分散であり、また $D_{MQ}(x)$ は両者の共分散である。

もし、座標 x の原点を Fig. 9 のように単純ばりの左支点 A に置くことにすれば、上記の 3 式は次のように書きかえられる (ただし、 $\xi = x/l$ である)。

$$D_M(x) = \frac{Sl^3}{3} \xi^2 (1 - \xi)^2, \quad \dots\dots\dots(90)$$

$$D_Q(x) = \frac{Sl}{3} (1 - 3\xi + 3\xi^2), \quad \dots\dots\dots(91)$$

$$D_{MQ}(x) = \frac{Sl^2}{3} \xi (1 - 3\xi + 2\xi^2). \quad \dots\dots\dots(92)$$

これらの 3 式は、岡林論文の式 (63) のうちの $E[M(x)^2]$ 、 $E[Q(x)^2]$ 、 $E[M(x)Q(x)]$ にほかならない。

【計算例 2】 上述のような手法を、Fig. 11 に示す片持ちばりに適用する。分布荷重 $q(x)$ は、計算例 1 と同様に、式 (79) で定義される定常白色雑音である。途中の計算は省略し、曲げモーメントの相関関数および分散の式のみを示せば、次のようになる。

$$K_M(x_1, x_2) = \frac{Sx_1x_2}{4}(x_1+x_2) - \frac{S}{12}(x_1^3+x_2^3) + \frac{S}{12}|x_1-x_2|^3, \quad \dots\dots\dots(93)$$

$$D_M(x) = \frac{S}{3}x^3. \quad \dots\dots\dots(94)$$

もし、座標 x の原点を固定端 B に置くことにすれば、式 (94) は

$$D_M(x) = \frac{Sl^3}{3}(1-\xi)^3 \quad \dots\dots\dots(95)$$

と書き改められる ($\xi = x/l$)。これは岡林論文の式 (64) 中の $E[M(x)^2]$ を表わしている。

3. 積分関係を利用する方法

$X(t)$ および $\varphi(t, t')$ をそれぞれ任意の不規則関数お

よび既知の確定関数として、定積分

$$Y(t) = \int_a^b \varphi(t, t') X(t') dt' \quad \dots\dots\dots(96)$$

によって新しい不規則関数 $Y(t)$ を定義する。このとき、 $X(t)$ 、 $Y(t)$ の各相関関数をそれぞれ $K_x(t_1, t_2)$ 、 $K_y(t_1, t_2)$ とすれば、後者は

$$K_y(t_1, t_2) = \int_a^b \int_a^b \varphi(t_1, t') \varphi(t_2, t'') K_x(t', t'') dt' dt'' \quad \dots\dots\dots(97)$$

によって求められる¹⁹⁾。上式を利用して、計算例 2 の解を求めてみよう。

【計算例 3】 Fig. 11 の片持ちばりの断面 x における曲げモーメント $\tilde{M}(x)$ は

$$\tilde{M}(x) = \int_0^x \tilde{q}(t) \cdot (x-t) dt \quad \dots\dots\dots(98)$$

で与えられる。したがって、曲げモーメントの相関関数は次のようになる。

$$K_M(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} (x_1-t')(x_2-t'') K_q(t', t'') dt' dt'' \quad \dots\dots\dots(99)$$

上式の右辺の $K_q(t', t'')$ として式 (79)、すなわち

$$K_q(t', t'') = S \cdot \delta(t' - t'')$$

を代入して積分を遂行すればよい。デルタ関数を含む積分に対しては、推移積分の公式²⁰⁾を利用すればよい。その際に注意すべきことは、 $x_1 \geq x_2$ のときにはまず t' による積分を行い、その次に t'' による積分を行い、逆に $x_1 \leq x_2$ のときには t'' 、 t' の順に積分を行うということである。そうすると

$$K_M(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{S}{6} x_2^2 (3x_1 - x_2), & x_1 \geq x_2 \\ \frac{S}{6} x_1^2 (3x_2 - x_1), & x_1 < x_2 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(100)$$

となる。上式が式 (93) と同一の結果を表わしていることは容易に確かめられる。

曲げモーメントの相関関数がわかると、せん断力 $\tilde{Q}(x)$ の相関関数は、式 (100) と式 (68) から

$$K_Q(x_1, x_2) = \begin{cases} Sx_2, & x_1 \geq x_2 \\ Sx_1, & x_1 < x_2 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(101)$$

となる。上式はまた

$$\tilde{Q}(x) = -\int_0^x \tilde{q}(t) dt$$

$$\therefore K_Q(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} K_q(t', t'') dt' dt''$$

という関係を利用してただちに求められる。

式 (101) において $x_1 = x_2 = x$ とすれば

$$D_Q(x) = Sx \quad \dots\dots\dots(102)$$

となるが、これは岡林論文の式 (64) 中の $E[Q(x)]$ に対応する式である。

4. おわりに

以上、不規則関数の相関理論を用いれば、簡単な計算によってはりの応答の確率特性値を求めることが可能なことを例題によって説明した。

岡林氏は論文の中で、“分布荷重 $\bar{q}(x)$ を「はりの長さ $0 \leq x \leq l$ で定義される」確率過程でモデル化する”と述べているが、 $\bar{q}(x)$ を定常過程と考えるときには、上記「……」部分は「 $-\infty < x < +\infty$ で定義される」と述べるべきである。なぜなら、有限区間で定義される定常過程はあり得ないからである。かつまた、分布荷重 $\bar{q}(x)$ をこのように無限区間で定義しておいてもなんら支障はない。なぜなら、はりの長さ l の外側にある荷重は、はりの応答になんらの影響も及ぼさないからである。

ちなみに、荷重 $\bar{q}(x)$ が定常であっても、曲げモーメント $\bar{M}(x)$ 、せん断力 $\bar{Q}(x)$ 、たわみ $\bar{y}(x)$ などとはもはや定常ではなくなる。なぜなら、これらははりの長さという有限区間で定義される量だからである。式 (84), (85), (93), (101) の各相関関数が式 (75) で定義される

τ のみの関数になっていないのはそのためである。

最後に、上述の(自己)相関関数はいずれも、その一般的性質の一つである対称性 $K(x_1, x_2) = K(x_2, x_1)$ を満たしているということを指摘しておこう。

参考文献

- 14) Ржаницын А.Р.: Вероятностный расчет балок на случайную нагрузку. Исследования по теории сооружений, выпуск XXIII, стр. 158~172, Москва, Стройиздат, 1977.
- 15) ルジャーニーツィン著・高岡宣善訳：構造物の信頼性解析，丸善，1980-12.
- 16) 高岡宣善・白木 渡・松保重之：不規則荷重によるはりの静的応答，土木学会中国四国支部第32回学術講演会一般講演概要，pp. 33~34, 1980-5.
- 17) 松保重之・白木 渡・高岡宣善：シミュレーション手法による道路橋活荷重のモデル化，同上第33回学術講演会一般講演概要，pp. 7~8, 1981-5.
- 18) 松保重之・白木 渡・高岡宣善：不規則関数論に基づく道路橋の信頼性解析，土木学会第36回年次学術講演会講演概要集第1部，pp. 638~639, 1981-10.
- 19) 高岡宣善：工学のための応用不規則関数論(第3章参照)，共立出版，1975-2.
- 20) 小西一郎・高岡宣善：構造動力学(第6章参照)，丸善，1973-6.

▶回答者 (Closure)

岡 林 隆 敏 (長崎大学)

By Takatoshi Okabayashi

はじめに、著者の論文に対し詳細な討論を寄せられたことに謝意を表します。討論の内容は2点に絞られると思われまので、以下回答いたします。

(1) ルジャーニーツィンの解法と著者の解法の比較について

ご指摘のとおり、ルジャーニーツィンの文献¹⁾は、本論文に関連した必要な参考文献でありますので、改めてここで参考文献に加えさせていただきますとともに、ご教示下さったことに感謝いたします。

ルジャーニーツィンの解法、すなわち相関関数に関する偏微分方程式による解法(以後相関関数法と略記する)と、Green 関数による解法をご教示いただきました。ご指摘のとおり、解析の対象を単純ばりおよび片持ばりに限定し、応答量として曲げモーメントとせん断力のみを考えるのであれば、ご指摘のとおり簡単な計算から応答の確率特性を求めることは可能です。特に、片持ばりの場合、Green 関数による解法を用いれば、容易に解を得ることができます。しかし、ルジャーニーツィンの文献におきましても、たわみとたわみ角の解は出されておられません。この解法を適用したとしても、かなり複雑な計算が必要となるものと思われます。ルジャーニーツィンの解法は、数学的には非常に一般的な表現であります

が、具体的な解を得るためには煩雑な計算が要求されます。さらに、数値計算を実行する場合、数値計算に適した形になっておりません。

相関関数法では、各種のはりの問題に対して、基礎方程式は同じ形をしており、境界条件の変更のみで対応できる一般性を有しています。しかし、たわみの応答を考える場合、相関関数の方程式は8階の偏微分方程式になります。この方程式を解くことは容易ではないと考えられます。

Green 関数による解法では、各種のはりの問題に対し、それぞれ対応する Green 関数を用いる必要があります。式の形としては積分表示であるので、解析解を得るのに適している形ですが、Green 関数は弱い不連続性を有しているため、積分区間を分割して計算しなければなりません。たわみ応答の計算では、かなり複雑な計算が要求されます。

著者の提案した解法では、各種のはりの解析に対して、境界条件を変更するだけで、同じアルゴリズムが使用できます。また、積分の計算は、せん断力からたわみ応答まで順次計算を進められます。しかしこの計算は上記2解法と比べてとりたてて優位にあるものではないと考えられます。

いずれの解法でも、たわみ応答を得るための解析ではかなり煩雑な計算過程が要求されます。

ところで、不規則境界値問題は、上記のようなはりの問題だけでなく、さらに複雑な問題が多くあります。その複雑さは、構造系に起因するものおよび外力に起因するものとに分類することができます。構造系については、次のような問題があります。はりの問題でも空間的に非均一な場合、すなわち変断面ばり、また連続ばり、ラーメン構造さらに複合した構造等の問題があります。一方、外力の問題としては、一般的なパワースペクトル密度を有する不規則分布荷重および空間的に非定常な分布荷重の処理の問題があります。

このような問題では解析的解法には限界があり、効果的な数値解析手法を適用する必要に迫られます。周知のように、確定論による解析では、数値解析は初期値問題に比べ境界値問題の解法が困難であります²⁾。確率論による解析でも同じ状況にあります。そこで、本研究は、著者の論文 1. で述べましたように、不規則境界値問題の一般的な解法を目的としております。このような観点から著者の論文では、2点境界値問題を初期値問題に変換する取扱いと、数値解析の手順を提案しております。問題が単純な場合、解析解を得ることが可能でありますから、計算例として論文には単純ばりと片持ばりの解析結果を示しました。

次に、著者の論文の解法は容易に変断面の解法に拡張できますので、変断面の場合を含め、数値解析の手順の概要を示します。

外力を白色雑音過程でモデル化すると、状態空間で記述されたはりの基礎方程式は、伊藤型の確率微分方程式で表現することができる。

$$\frac{d}{dx} X(x) = A(x)X(x) + F(x), \quad (0 \leq x \leq l) \quad \dots\dots\dots(1)$$

境界条件: $X(0) = X_0, X(l) = X_l$

この応答過程 $X(x)$ の共分散は、共分散方程式に支配されている。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} R_X(x) &= A(x)R_X(x) + R_X(x)A(x)^T \\ &+ \Phi_X(x, 0)E[X_0F(x)^T] + E[F(x)X_0^T] \\ &\cdot \Phi_X(x, 0)^T + Q(x), \quad (0 \leq x \leq l) \dots\dots(2) \end{aligned}$$

境界条件: $R_X(0) = R_{X_0}, R_X(l) = R_{X_l}$

ここに、 $\Phi(x_2, x_1)$ は式 (1) の状態遷移行列であり、方程式、

$$\frac{d}{dx} X(x) = A(x)X(x), \quad X(x_1) = I \dots\dots\dots(3)$$

による、 $x=x_2$ の解である。なお、一定断面ばりの場合は $\Phi_X(x_2, x_1) = \Phi_X(x_2 - x_1)$ であり、著者論文式 (34) となる。

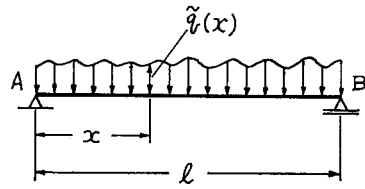


Fig. 9 Beam subjected to randomly distributed load.

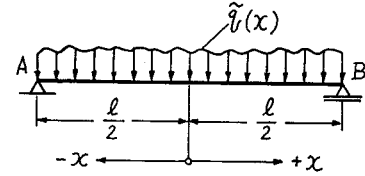


Fig. 10 Simply supported beam.

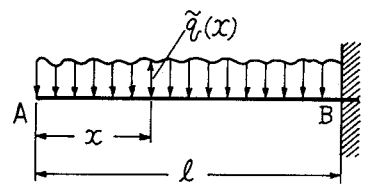


Fig. 11 Cantilever beam.

このように、共分散応答の解析は、共分散領域における2点境界値問題の解法に帰着する。式 (2) において、初期条件と外力の相関関数 $E[X_0F(x)^T]$ と初期条件の共分散 R_0 を決定することができれば、式 (2) は不規則振動論による応答解析と同様に、初期値問題として解くことができる。

a) 初期条件と外力の相関関数の決定

著者論文式 (36)

$$\begin{aligned} E[X_lF(x)^T] &= \Phi_X(l, 0)E[X_0F(x)^T] \\ &+ \Phi_X(l, x)Q(x) \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

に、 $x=0$ と $x=l$ の境界条件を用いる。式 (4) は連立方程式となり、 $E[X_0F(x)^T]$ が得られる。

b) 初期条件の共分散の決定

著者論文式 (42)

$$R_l = \Phi_X(l, 0)R_0\Phi_X(l, 0)^T + P(l) \dots\dots\dots(5)$$

に、 $x=0$ と $x=l$ の境界条件を用いる。なお、 $P(l)$ は $R_X(0) = 0$ に対する $x=l$ のときの解である。すなわち、外力のみによる応答である。式 (5) より、 R_0 は連立方程式より得られる。

上記のように、それぞれの手順は連立方程式の数値解析と微分方程式の数値解析(たとえば、Runge-Kutta法)により構成することができます。

(2) 不規則分布荷重 $\hat{g}(l)$ の定常確率過程の定義について

定常確率過程の定義は、文献 3), 4) に従い、次のように定義しております。

S を有限区間とした場合、確率過程 $X(x) (x \in S)$ は、

次のとき広義の定常確率過程とする.

$$|E[X(x)]| \leq \text{定数} < \alpha$$

さらに,

$$E[X(x)^2] < \infty, E[X(x_1)X(x_2)] = \Gamma(x_1 - x_2)$$

ここに, $\Gamma(x_1 - x_2)$ は $X(x)$ の自己相関関数である.

ご指摘のように, 区間の定義によって応答の結果には影響ありませんが, 著者の論文では上記のような定義を用いております.

参考文献

- 1) ルジャニーツィン著・高岡宣義訳: 構造物の信頼性解析・7章, 丸善, 1980-12.
 - 2) Distéfano, N.: Nonlinear Processes in Engineering, § 1, § 2, Academic Press, New York, 1974.
 - 3) Doob, J.L.: Stochastic Process, pp. 94~95, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1953.
 - 4) Soong, T.T.: Random Defferential Equations in Science and Engineering, pp. 42~43, Academic Press, New York, 1973.
-