

# 応力拡大係数の計算に用いる一つの要素 モデルについて

## FORMULATION OF A FINITE ELEMENT EMPLOYED FOR CALCULATING STRESS INTENSITY FACTOR

豊島 史郎\*・中西 宏\*\*・波田 凱夫\*\*\*

By Shiro TOYOSHIMA, Hiroshi NAKANISHI and Yoshio NAMITA

### 1. 緒 言

構造部材や材料の強度を評価するのに近年線形破壊力学の手法を適用することが多くなっている。特に、疲労クラックの伝播などの問題に対しては、応力拡大係数が重要な役割を果たすことが知られており、それを的確に求める手法の確立が望まれている。応力拡大係数を求めるのにすでにいくつかの手法が提案されているが、汎用性という点からみて有限要素法によるものが実用的である。有限要素法による計算法として、解析解の重ね合わせによる方法<sup>1)</sup>、クラック付近の解を利用する方法<sup>2)</sup>、特異応力場、変位場を導入するハイブリッド法<sup>3), 4)</sup>、高次内挿関数の性質を利用して特異性を表現する方法<sup>5)</sup>などがある。有限要素法によって計算する場合、応力拡大係数が陽な形で表現されることが望ましいが、そのためには応力拡大係数自体を未知数とする方法を採用する必要がある。

本文では、簡単にプログラミングが行えるよう、また、応力拡大係数を知るための特異項が陽な形で求められるように、特異項を変位関数に埋め込むという手法<sup>7)</sup>によって一つの特異要素を作成し、若干の解析例によりその特性を検討している。

### 2. クラック先端近傍の特異場

いま、図-1に示すように、クラック先端の局所座標系を  $(x', y')$ 、その極座標を  $(r, \theta)$  とする。また、全体座標系を  $(x, y)$ 、クラック先端の座標を  $(x_c, y_c)$  とし、 $(x', y')$  座標系は  $x$  軸から反時計回りに  $\varphi$  だけ回

転した位置にあるとする。一般に、任意点の  $x'$  および  $y'$  方向の変位成分  $u_s', v_s'$  は局所座標系によって次のように表わされる<sup>1)</sup>。

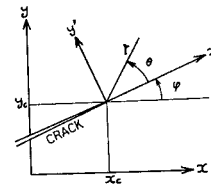


図-1 クラック先端近傍の座標系

$$\left. \begin{aligned} u_s' &= \sum_{i=1}^n (K_{Ii} \cdot f_i u' + K_{IIi} \cdot g_i u') \\ v_s' &= \sum_{i=1}^n (K_{Ii} \cdot f_i v' + K_{IIi} \cdot g_i v') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

$$\left. \begin{aligned} f_i u' &= ar^{i/2} \left[ \left\{ \kappa + \frac{i}{2} + (-1)^i \right\} \cos \frac{i}{2} \theta - \frac{i}{2} \cos \left( \frac{i}{2} - 2 \right) \theta \right] \\ f_i v' &= -ar^{i/2} \left[ \left\{ -\kappa - \frac{i}{2} + (-1)^i \right\} \sin \frac{i}{2} \theta + \frac{i}{2} \sin \left( \frac{i}{2} - 2 \right) \theta \right] \\ g_i u' &= ar^{i/2} \left[ \left\{ \kappa - \frac{i}{2} - (-1)^i \right\} \cos \frac{i}{2} \theta + \frac{i}{2} \sin \left( \frac{i}{2} - 2 \right) \theta \right] \\ g_i v' &= -ar^{i/2} \left[ \left\{ \kappa - \frac{i}{2} + (-1)^i \right\} \sin \frac{i}{2} \theta + \frac{i}{2} \cos \left( \frac{i}{2} - 2 \right) \theta \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= 1/2 \sqrt{2\pi} G \\ \kappa &= \begin{cases} 3-4\nu & \text{(平面ひずみ)} \\ (3-\nu)/(1+\nu) & \text{(平面応力)} \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 $G$  はせん断弾性係数、 $\nu$  はポアソン比である。また、 $K_{Ii}$ 、 $K_{IIi}$  は外力および境界条件に依存する係数で、特に  $i=1$  のときの値  $K_{I1}$ 、 $K_{II1}$  はそれぞれモード I およびモード II の応力拡大係数  $K_I$ 、 $K_{II}$  を表わす。

### 3. 特異場の有限要素表示

アイソパラメトリック 8 節点長方形要素を用いてクラ

\* 正会員 工修 (株) 神戸製鋼所構造研究所研究員  
\*\* 正会員 工博 (株) 神戸製鋼所構造研究所研究員  
\*\*\* 正会員 工博 (株) 神戸製鋼所構造研究所次席研究員

ック先端近傍の特異場を有限要素表示する。式(1)を全体座標系に変換すると、 $x$  および  $y$  方向の変位成分はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} u_s &= \sum_i (K_{1i} \cdot f_i^u + K_{2i} \cdot g_i^u) \\ &= \sum_i (K_{1i} \cdot f_i^u(\xi, \eta) + K_{2i} \cdot g_i^u(\xi, \eta)) \\ v_s &= \sum_i (K_{1i} \cdot f_i^v + K_{2i} \cdot g_i^v) \\ &= \sum_i (K_{1i} \cdot f_i^v(\xi, \eta) + K_{2i} \cdot g_i^v(\xi, \eta)) \end{aligned} \right\} \dots(4)$$

となる。ここに

$$\left. \begin{aligned} f_i^u &= \cos \varphi \cdot f_i^{u'} - \sin \varphi \cdot f_i^{v'} \\ g_i^u &= \cos \varphi \cdot g_i^{u'} - \sin \varphi \cdot g_i^{v'} \\ f_i^v &= \sin \varphi \cdot f_i^{u'} + \cos \varphi \cdot f_i^{v'} \\ g_i^v &= \sin \varphi \cdot g_i^{u'} + \cos \varphi \cdot g_i^{v'} \end{aligned} \right\} \dots(5)$$

であり、また、 $f_i^u(\xi, \eta)$  などは上記の  $f_i^u = f_i^u(r, \theta)$  を要素内にとった正規化座標系  $(\xi, \eta)$  で書きかえたものであり、座標系  $(r, \theta)$  と  $(\xi, \eta)$  とは後出の式(16)によって関係づけられている。

式(4)で表わされる特異項を通常の変位法で用いられる変位関数に付け加えて、新しい変位関数を次のように定義する。

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = [u, v]^T = \mathbf{S}(\xi, \eta) \cdot \mathbf{a} + \sum_i (K_{1i} \cdot \mathbf{f}_i + K_{2i} \cdot \mathbf{g}_i) \dots(6)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_i &= [f_i^u(\xi, \eta), f_i^v(\xi, \eta)]^T \\ \mathbf{g}_i &= [g_i^u(\xi, \eta), g_i^v(\xi, \eta)]^T \end{aligned} \right\} \dots(7)$$

であり、 $\mathbf{S}(\xi, \eta)$  は変位場の多項式、 $\mathbf{a}$  はその係数である。8個の節点について式(6)を書き下すと

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{a} + \sum (K_{1i} \cdot \hat{\mathbf{f}}_i + K_{2i} \cdot \hat{\mathbf{g}}_i) \dots(8)$$

ここに \* 印は節点における値を示す。

これより

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{S}}^{-1} \{ \hat{\mathbf{u}} - \sum (K_{1i} \cdot \hat{\mathbf{f}}_i + K_{2i} \cdot \hat{\mathbf{g}}_i) \} \dots(9)$$

となり、これを式(6)に代入すれば、変位場が次のように表わせる。

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \cdot \hat{\mathbf{u}} + \sum K_{1i} \{ \mathbf{f}_i(\xi, \eta) - \mathbf{N}(\xi, \eta) \cdot \hat{\mathbf{f}}_i \} + \sum_i K_{2i} \{ \mathbf{g}_i(\xi, \eta) - \mathbf{N}(\xi, \eta) \cdot \hat{\mathbf{g}}_i \} \dots(10)$$

ここに、 $\mathbf{N}(\xi, \eta) = \mathbf{S}(\xi, \eta) \cdot \hat{\mathbf{S}}^{-1}$  (形状関数) である。式(10)からひずみ成分を計算すれば

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{u}} \dots(11)$$

となる。ここに

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T \\ \hat{\mathbf{u}} &= [\hat{u}^T, K_{11}, K_{21}, \dots, K_{1n}, K_{2n}]^T \end{aligned} \right\} \dots(12)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{1x} & 0 & N_{8x} & 0 & \bar{f}_{1x}^u \\ 0 & N_{1y} & 0 & N_{8y} & \bar{f}_{1y}^v \\ N_{1y} & N_{1x} & N_{8y} & N_{8x} & \bar{f}_{1y}^u + \bar{f}_{1x}^v \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{g}_{1x}^u & \vdots & \bar{f}_{nx}^u & \vdots & \bar{g}_{nx}^u \\ \bar{g}_{1y}^v & \vdots & \bar{f}_{ny}^v & \vdots & \bar{g}_{ny}^v \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{g}_{1y}^u + \bar{g}_{1x}^v & \vdots & \bar{f}_{ny}^u + \bar{f}_{nx}^v & \vdots & \bar{g}_{ny}^u + \bar{g}_{nx}^v \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} N_{ix} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad (i=1, \dots, 8, (x=x, y)) \\ \bar{f}_{ix}^u &= \frac{\partial f_i^u(\xi, \eta)}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \dot{\mathbf{f}}_i^u \\ &\quad (i=1, \dots, n), (x=x, y), (u=u, v) \\ \bar{g}_{ix}^u &= \frac{\partial g_i^u(\xi, \eta)}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \dot{\mathbf{g}}_i^u \\ &\quad (i=1, \dots, n), (x=x, y), (u=u, v) \end{aligned} \right\} \dots(13)$$

である。 $\hat{\mathbf{u}}$  は節点変位  $u_1, v_1, \dots, u_8, v_8$  と、特異性を表わす係数  $K_{1i}, K_{2i}$  とを併せて一つの変位ベクトルとして表現したものであり、これを一般化変位とよぶ。

式(13)を正規化座標  $(\xi, \eta)$  によって表わすには以下の変換則によればよい。

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{aligned} \right\} &= \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f_i^u(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial f_i^u(\xi, \eta)}{\partial y} \end{aligned} \right\} &= \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f_i^u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_i^u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{J}' \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f_i^u}{\partial r} \\ \frac{\partial f_i^u}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \dots(15)$$

ここに、 $\mathbf{J}$  は座標系  $(\xi, \eta)$  と  $(x, y)$  に関するヤコビアン行列、 $\mathbf{J}'$  は同様に  $(\xi, \eta)$  と  $(r, \theta)$  に関するものである。

また

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= (N(\xi, \eta) \hat{\mathbf{x}} - x_c)^2 + (N(\xi, \eta) \hat{\mathbf{y}} - y_c)^2 \\ \theta &= \tan^{-1} \{ (N(\xi, \eta) \hat{\mathbf{y}} - y_c) / (N(\xi, \eta) \hat{\mathbf{x}} - x_c) - \varphi \} \end{aligned} \right\} \dots(16)$$

の関係がある。

よって、通常の変位法に基づく定式化の過程と同様に、最小ポテンシャルエネルギー原理により、節点変位と特異項から成る一般化変位に関する剛性行列が

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det |\mathbf{J}| d\xi d\eta \dots(17)$$

によって計算される。ここに、 $\mathbf{D}$  は応力ひずみ行列であり、式(17)の積分を実施するにあたってはガウスの数値積分法を用いる。

#### 4. 特異項の包絡関数

前節に示した要素はクラック先端の特異性を表わす項を含んでいるため、この要素を通常の変位法に基づく要素と隣接して配置するとき、要素間の境界では変位の連続性(適合条件)が満たされない。一般に、この特異項の影響はクラック先端より遠ざかるにつれて急速に小さくなるから、解に及ぼす境界変位の不連続性の影響も小

さいものと思われるが、ここでは図-2に示されるような関数  $q_m(\xi, \eta)$  を定義し、これを特異項に乗ずることにより適合条件を満たすようにする<sup>7)</sup>。すなわち、クラック先端を正規化座標系で  $(-1, -1)$  とし、 $q_m(\xi, \eta)$  は次の性質をもつものとする。

- i)  $q_m(-1, -1) = 1$
- ii)  $q_m(1, \eta) = q_m(\xi, 1) = 0$
- iii)  $-1 < \xi, \eta < 1$  の間では滑らかに減少する。

このような性質をもつ関数を特異項の包絡関数とよぶことにし、ここでは次のような関数を設定する。

$$q_m(\xi, \eta) = \left[ \frac{1}{4} \left\{ 1 + \cos \frac{\pi}{2} (1 + \xi) \right\} \times \left\{ 1 + \cos \frac{\pi}{2} (1 + \eta) \right\} \right]^{1/m} \dots (18)$$

これを式 (10) の特異項に乗ずれば

$$u(\xi, \eta) = N(\xi, \eta) \cdot \hat{u} + q_m(\xi, \eta) \sum [K_{1i} \{ f_i(\xi, \eta) - N(\xi, \eta) \hat{f}_i \} + K_{2i} \{ g_i(\xi, \eta) - N(\xi, \eta) \hat{g}_i \}] \dots (19)$$

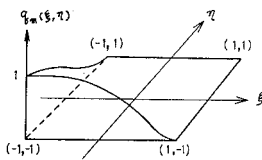


図-2 包絡関数

となる。これを用いて式 (13) と同様にひずみ・変位行列が得られる。この場合、式 (14) の  $\bar{f}_{ix}^u, \bar{g}_{ix}^u$  がそれぞれ次のように書きかえられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_{ix}^u &= q_m \left( \frac{\partial f_i^u(\xi, \eta)}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x} \hat{f}_i^u \right) \\ &+ \frac{\partial q_m}{\partial x} (f_i^u(\xi, \eta) - N \hat{f}_i^u) \\ \bar{g}_{ix}^u &= q_m \left( \frac{\partial g_i^u(\xi, \eta)}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x} \hat{g}_i^u \right) \\ &+ \frac{\partial q_m}{\partial x} (g_i^u(\xi, \eta) - N \hat{g}_i^u) \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

### 5. 数値解析例

#### (1) 両側縁にクラックをもつ板 (図-3)

両側縁にクラックをもつ板が等分布荷重  $\sigma$  を受けるときの解析を行い、要素の分割パターンとガウスの積分点のとり方により  $K_I$  値の精度がどのようになるかを調べた。図-3に要素分割のパターンを、図-4に計算結果を示す。図-3のパターン A, B, C はいずれもかなり細かい分割であるが、誤差は 5% 以内に収まっている。積分点の数を 5 にとると良好な値を示し、パターン B, C では誤差は 0.7% 程度である。図-5はクラック長と板幅との比を変化させたときの  $K_I$  値を示す。図中の曲線は既往の研究による近似解<sup>8)</sup> (誤差 0.5% 以内) を示す。すなわち

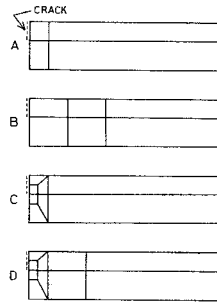


図-3 両側縁にクラックをもつ板の要素分割パターン

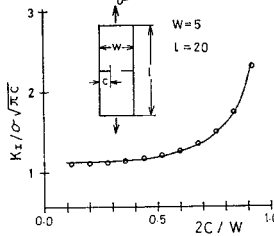


図-5 両側縁にクラックをもつ板のクラック長と  $K_I$  値

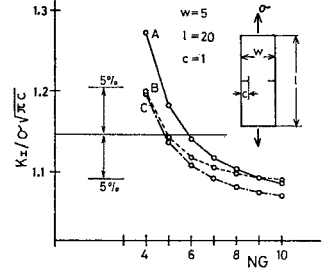


図-4 両側縁にクラックをもつ板の  $K_I$  値

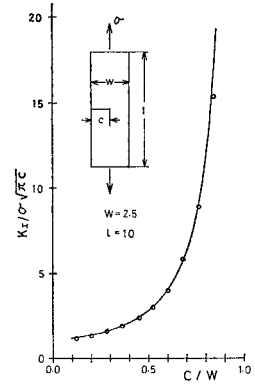


図-6 片側縁にクラックをもつ板のクラック長と  $K_I$  値

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_I}{\sigma \sqrt{\pi c}} &= \frac{1.122 - 0.561\xi - 0.205\xi^2}{\sqrt{1-\xi}} \\ &+ \frac{0.471\xi^3 - 0.190\xi^4}{\sqrt{1-\xi}} \end{aligned} \right\} \xi = 2c/W \dots (21)$$

なお、要素分割は図-3のパターン D であり、積分点数は 5 とし、包絡関数は使用していない。

#### (2) 片側縁にクラックをもつ板 (図-6)

前項 (1) と同じ条件で片側縁にクラックをもつ板の解析を行った。この場合の近似解<sup>8)</sup> (誤差 0.5% 以内) は次のように与えられている。

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_I}{\sigma \sqrt{\pi c}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi\xi} \tan\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)} \\ &\times \frac{0.752 + 2.02\xi + 0.37\left(1 - \sin\frac{\pi\xi}{2}\right)^3}{\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)} \end{aligned} \right\} \xi = c/W \dots (22)$$

図-6 に計算結果ならびに式 (22) の曲線を示す。 $\xi = 0.75$  までは誤差は 2% 程度であるが、 $\xi = 0.84$  では誤差は 8% となった。これは、 $\xi$  が大きくなると曲げの影響が大きくなるのと、ここで用いた要素分割がかなり

あらいことによると思われる。

(3) 片側縁に 45° の傾斜クラックをもつ板 (図-7)

混合モードにおける応力拡大係数  $K_I$ ,  $K_{II}$  値を求める計算例として, 片側縁に 45° の傾斜クラックをもつ板の解析を行った. 図-7 に要素分割を示す. ここでは, 包絡関数 (18) の指数  $m$  の値と, ガウスの積分点数の影響を調べる. なお, この問題に対し, O.L. Bowie<sup>9)</sup> は mapping 手法により  $K_I/\sigma\sqrt{c}=1.86$ ,  $K_{II}/\sigma\sqrt{c}=0.88$  を示しており, M.A. Hussain<sup>10)</sup> は Collapsed

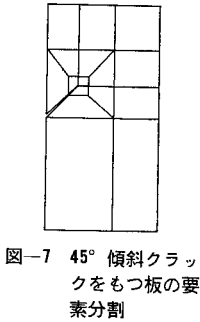


図-7 45° 傾斜クラックをもつ板の要素分割

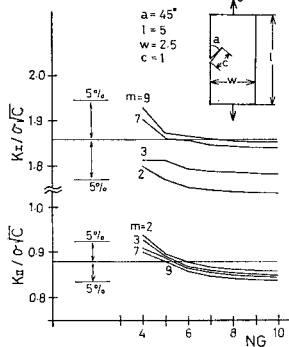


図-8 45° 傾斜クラックをもつ板の  $K_I$ ,  $K_{II}$  値

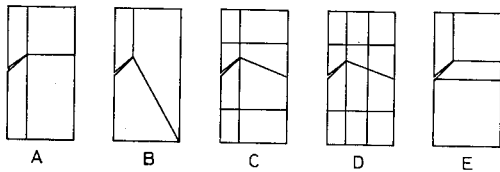


図-9 不規則であらい要素分割 (45° 傾斜クラック)

表-1 不規則であらい要素分割による応力拡大係数 (45° 傾斜クラックをもつ板)

MESH TYPE	A	B	C	D	E
3×3	2.332 2	2.196 5	3.028 3	2.521 0	2.102 2
	1.401 7	1.552 4	2.034 6	1.531 4	1.715 7
4×4	2.016 0	2.000 9	2.521 6	2.239 2	1.733 0
	1.096 7	1.252 8	1.419 6	1.230 4	1.278 3
5×5	1.924 1	1.916 1	2.330 6	2.106 7	1.705 3
	0.960 4	1.037 5	1.219 9	1.118 1	1.138 5
6×6	1.879 9	1.877 4	2.237 9	2.033 9	1.682 7
	0.901 4	0.928 2	1.126 2	1.058 8	1.092 6
7×7	1.859 3	1.863 4	2.184 6	1.988 8	1.673 0
	0.870 2	0.868 3	1.074 5	1.023 8	1.058 3
8×8	1.848 0	1.859 8	2.150 6	1.958 9	1.670 6
	0.851 0	0.833 1	1.042 6	1.001 3	1.036 5
9×9	1.841 3	1.859 6	2.127 2	1.938 0	1.669 8
	0.838 8	0.813 3	1.021 5	0.986 0	1.021 4
10×10	1.837 1	1.860 6	2.110 3	1.922 7	1.667 0
	0.830 5	0.801 9	1.006 7	0.975 3	1.010 1

上値= $K_I/\sigma\sqrt{c}$ , 下値= $K_{II}/\sigma\sqrt{c}$

cubic isoparametric 要素を用いて  $K_I/\sigma\sqrt{c}=1.89\sim 1.84$ ,  $K_{II}/\sigma\sqrt{c}=0.96\sim 0.92$  を得ている. 図-8 に数値計算結果を示す. 誤差は  $K_I$ ,  $K_{II}$  値とも 5% 以内であり, この場合もガウスの積分点数 NG を 5 とすれば誤差が最も小さくなるようである.  $NG=5$ ,  $m=8$  の場合,  $K_I$ ,  $K_{II}$  とも誤差は 0.5% 程度である. 次に, さらに要素分割をあらくし, また不規則な分割を行った場合について検討する. 図-9 にあらい要素分割パターンを示す. ここでは  $m=8$  と固定し, 一方ガウスの積分点数を変化させている. 計算の結果を表-1 に示す. この表からわかるように, 非常にあらくて不規則な分割であるにもかかわらず, 計算値は最大 12% 程度の誤差内に収まっている.

6. 結 論

有限要素法の変位関数にクラック近傍の解析解を埋め込み, 応力拡大係数の計算用の特異要素を作成した. この要素は 8 節点のアイソパラメトリック型のもので, これを用いれば, 比較的あらい要素分割でも精度よく, 陽な形で応力拡大係数を求めることができる.

参 考 文 献

- 岡村弘之: 線形破壊力学入門, 培風館, p. 196, 昭和 51 年.
- 山本善之・徳田直明: 板構造物中のクラックの応力拡大係数の有限要素法による解析法, 造船学会論文集, 第 130 号, p. 219, 1971.
- Chan, S.K., I.S. Tuba and W.K. Wilson: On the finite element method in linear fracture mechanics, Engng Fract. Mech. 2, pp. 1~17, 1970.
- Tong, P., T.H.H. Pian and S.J. Lasry: A hybrid-element approach to crack problems in plane elasticity, Int. J. num. Meth. Engng, 7, pp. 297~308, 1973.
- Atluri, S.N., A.S. Kobayashi and M. Nakagaki: An assumed displacement hybrid finite element model for linear fracture mechanics, Int. J. of Fracture 11, pp. 257~271, 1975.
- Henshell, R.D. and K.G. Shaw: Crack tip finite elements are unnecessary, Int. J. num. Meth. Engng, 9, pp. 495~507, 1975.
- Strang, G. and G.J. Fix: An Analysis of the Finite Element Method (邦訳: 三好哲彦・藤井 宏, 有限要素法の理論, 培風館, 8 章, 昭和 51 年)
- 岡村弘之: 線形破壊力学入門, 培風館, p. 217, 昭和 51 年.
- Bowie, O.L.: Solutions of plane crack problems by mapping technique, Mechanics of Fracture, Vol. 1 (Ed. G.C. Sih), Noordhoff, Leyden, the Netherlands, 1973.
- Pu, S.L., M.A. Hussain and W.E. Lorensen: The collapsed cubic isoparmetric element as a singular element for crack problems, Int. J. num. Meth. Engng, 12, pp. 1727~1742, 1978.