

側岸の浸食・堆積による蛇行発達の理論*

THEORETICAL STUDY ON MEANDER DEVELOPMENT
CAUSED BY BANK EROSION AND DEPOSITION

福岡 捷 二**・山 坂 昌 成***

By Shoji FUKUOKA and Masashige YAMASAKA

1. 序 論

近年、自由蛇行の発達、特性を理論的に論じた研究が多くなりつつある。なかでも、池田・日野・吉川¹⁾は自由蛇行の発達、前進を理論的に取り扱い、その後の蛇行研究に重要な方向づけを与えた。彼らは、蛇行流路内の流れを解き、平面曲がりによる遠心力に起因する流心線の偏倚状況から蛇行の発達、移動、および迂曲への発達機構を論じた。長谷川・山岡²⁾は池田らと同様な考え方のもとに、河道の曲がりばかりでなく河床洗掘あるいは交互砂州の存在により流心線が偏倚することに着目し、蛇行発達に及ぼすそれぞれの影響について論じた。2つの研究は蛇行問題を理論的に取り扱えるようにした点で高く評価されるが、池田らも指摘しているように側岸の浸食、堆積の機構を考慮していないために蛇行の発達速度、移動速度については定性的な議論しかできず、蛇行の発達過程を論じるには不十分であった。その後、池田・Parker・澤井^{3),4)}は側岸浸食速度が側岸流速に比例すると考えて蛇行平面形状に関する方程式を導き、線形解より蛇行の発達速度、前進速度を求めている。池田らの解析モデルでは蛇行形状に対する側岸流速(\propto 側岸浸食速度)の位相遅れが $0 \sim \pi$ の範囲しかとり得ず、河道中心線が谷線と交わる点における下流側の側岸が常に浸食されるため、蛇行は必ず下流に移動する。この解析はさきの研究¹⁾を進めて、蛇行の発達速度、前進速度を見積れるようにしたが、適用範囲は蛇行の振幅が微小な範囲に限定される。Parker・澤井・池田⁵⁾は上記の線形解析を拡張し、StokesのPerturbation法を適用して蛇

行方程式の非線形解を求めた。その結果、蛇行振幅の増大に伴って、蛇行の発達速度、前進速度が小さくなること、蛇行形状のまるみとゆがみが顕著になることを示した。しかし、この非線形解においても大きな振幅に至るまでの蛇行の発達を説明することはできない。池田らの導いた蛇行方程式においては、側岸浸食速度がその点の側岸流速に比例すると考えているが、実際には、水の流れと土砂の運動との間には必ず位相差が存在する。浸食速度と流砂量とは密接な関係にあるため、蛇行の発達、前進を引き起こす側岸の浸食・堆積は、その点の側岸流速だけでなく側岸流砂量をも考慮しなければ決定し得ない。本研究ではこの点に着目し、蛇行形状が sine generated curve に従うと仮定し、側岸浸食(堆積)機構を考慮した非平衡状態の側岸流砂量を求め、これと流砂の連続式から求まる側岸浸食速度、蛇行の平面形状から求まる側岸浸食速度の両者が等しくなければならないことを考慮して蛇行の発達、移動を定量的に論じ、従来解析的に取り扱えなかった大振幅に至るまでの蛇行の発達過程の理論解析を行う。さらに、一様勾配河川での蛇行解析の結果を応用し、勾配が緩やかに変化する河川での蛇行の発達過程の解析を行う。

2. 一様勾配河川における蛇行の解析

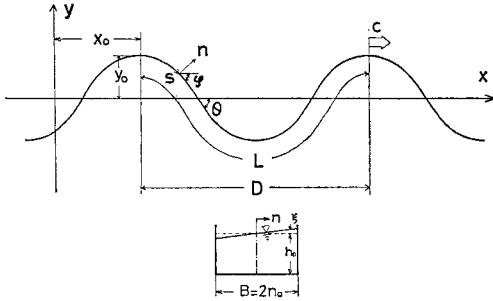
蛇行の発達を引き起こす側岸の浸食・堆積を定量的に評価するためには、蛇行流路内の流れを十分把握し、流れと側岸上での砂の移動を的確に関連づける必要がある。本章では以下の仮定を導入し、一様勾配河川における蛇行の発達、移動を論じる。

① 河道には同じ形状(sine generated curve)の蛇行が無限に続いている。② 谷勾配 i_0 (図-1の x 軸方向の勾配)および蛇行波長 D は時間的に変化しないが、蛇行長 L が蛇行の発達につれて長くなるため、河道距離 s を用いて定義した勾配は小さくなる。③ 側岸の浸

* 本研究の一部は、文献18)に発表済みであるが、その後の研究成果を加え、取りまとめたものである。

** 正会員 Ph.D.工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

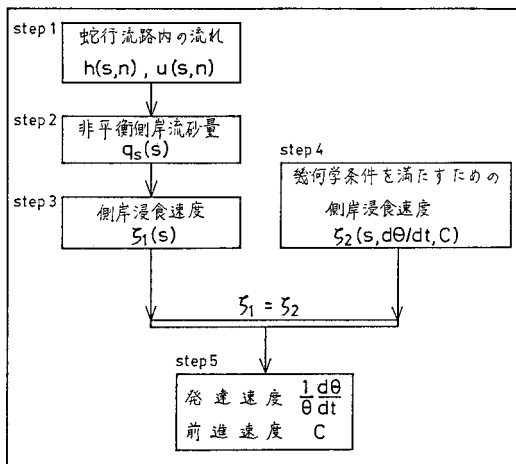
*** 学生会員 工修 東京工業大学大学院博士課程 土木工学専攻



図一 sine generated curve の記号の定義

食土砂は河床に堆積することなく、ある距離流下した後同じ側の側岸に堆積し、川幅 ($B=2n_0$) は一定に保たれる。川幅は水深に比べ十分大きく、流体に働く摩擦力は河床によって規定される。一般に、沖積蛇行では浮遊砂の存在、流量の時間的変化等により、側岸の浸食と堆積がバランスして川幅がほぼ一定に保たれるといわれている。しかし、この川幅を保つ機構がまだ明らかにされていないことに加えて解析の取扱い上、側岸の流砂と河床の流砂の間の交換がないという仮定をおき、川幅を一定に保つこととした。このとき、側岸流砂は一次元的に運動し、側岸の浸食、堆積は側岸流砂量の場所的な変化で決定される。④ 横断河床面は水平であり、主流流速は水深方向に一様である。河道の平面曲がりに伴う河床の交互洗掘や、河床に発生する交互砂州は蛇行の発達に影響を及ぼすといわれている^{2), 3)}。しかし、蛇行流路における交互洗掘、交互砂州の発達、移動の定量的な解析が現段階では不十分であるため、これらを考慮しないことにした。⑤ 河道曲がりの曲率半径は川幅に比べ十分大きい。

解析の手順を 図一2 に示す。まず、蛇行流路内の流れを解き (step 1)、これと関連づけた非平衡の側岸流砂量



図一2 解析の流れ図

q_s を求める (step 2)。流砂の連続式は浸食 (堆積) 速度と流砂量の流下方向変化の関係を示すものであり、これにより側岸浸食速度 ζ_1 を求める (step 3)。各点の側岸浸食速度がわかってもこれにより直接、蛇行の発達速度、前進速度を求めることはできない。そこで逆に、蛇行が発達しながら下流に移動しているときの側岸浸食速度 ζ_2 を求める (step 4)。 ζ_1 と ζ_2 が一致するように蛇行の発達速度、前進速度を決定し、その結果を考察する (step 5)。

(1) 蛇行流路内の流れと側岸流砂量

本研究では、河道中心線の平面形状が sine generated curve に従って変化する蛇行を取り扱う。sine generated curve とは、図一1 の偏角 φ が流下距離 s に対して sine 変化をする曲線である。すなわち、

$$\varphi = \theta \sin \frac{2\pi s}{L} \dots\dots\dots (1)$$

で表わされる。ここで θ を最大偏角とよぶ。Langbein & Leopold⁴⁾ によれば、河川の蛇行形状はこの曲線によく従うことが示されている。このとき河道中心線の曲率は定義より、

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{2\pi\theta}{L} \cos \frac{2\pi s}{L} \dots\dots\dots (2)$$

となる。

蛇行形状の時間変化が非常にゆっくりしていること、この変化に対して流れの応答が速いことを考慮すると、流れは準定常と考えてよい。この流れの流速分布については、Engelund⁵⁾、池田⁶⁾によりすでに解析されているので、ここではその結果を用いる。平均流速 u_0 と平均水深 h_0 の間には等流の条件が成り立ち、

$$gi = f \frac{u_0^2}{2h_0} \dots\dots\dots (3)$$

となる。ここで g は重力加速度、 i は s 方向の河床勾配、 f は河床と流体との間の摩擦係数である。 s 方向の流速 u を平均流速 u_0 と偏倚流速 u' とに分けたとき、 u' は

$$\frac{u'}{u_0} = a \cdot \sin \frac{2\pi s}{L} + b \cdot \cos \frac{2\pi s}{L} \dots\dots\dots (4 \cdot a)$$

$$a = \left(\frac{2\pi h_0}{fL} \right)^2 \frac{\frac{u_0^2}{2gh_0} + 1}{\left(\frac{2\pi h_0}{fL} \right)^2 + 1} \frac{n}{h_0} f\theta \dots\dots\dots (4 \cdot b)$$

$$b = \frac{2\pi h_0}{fL} \frac{\frac{u_0^2}{2gh_0} - \left(\frac{2\pi h_0}{fL} \right)^2}{\left(\frac{2\pi h_0}{fL} \right)^2 + 1} \frac{n}{h_0} f\theta \dots\dots\dots (4 \cdot c)$$

で与えられる。ここで $n=n_0 (=B/2)$ とおくと左岸での流速、 $n=-n_0$ とおくと右岸での流速となる。偏倚流速は左岸と右岸とで符号が異なるだけなので、ここでは左岸沿いの偏倚流速 u'_l について考える。式 (4) を変形す

ると

$$\frac{u'_l}{u_0} = \sqrt{a_l^2 + b_l^2} \cos\left(\frac{2\pi s}{L} - \alpha\right) \dots\dots\dots(5 \cdot a)$$

$$\cos \alpha = b_l / \sqrt{a_l^2 + b_l^2} \dots\dots\dots(5 \cdot b)$$

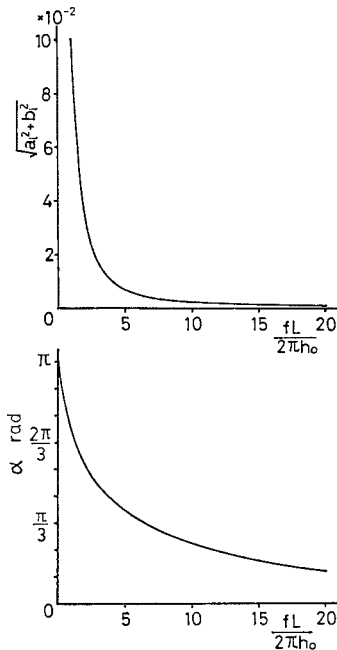
$$\sin \alpha = a_l / \sqrt{a_l^2 + b_l^2} \dots\dots\dots(5 \cdot c)$$

となる。ここで a_l, b_l はそれぞれ、式 (4・b), (4・c) で $n=n_0$ とおいたものである。式 (2), 式 (5) を比較すると、蛇行形状と側岸偏倚流速との間に位相差が存在する。左岸偏倚流速の絶対値と位相差が蛇行長 L によってどのように変化するかを 図—3 に示す。蛇行長が短いとき、流速偏倚量の絶対値は大きく、位相は側岸形状に対して逆位相となる。このとき流速は曲がりの内側ほど大きく、外側ほど小さく、流れはポテンシャル流的となる。蛇行長が長くなるに従って、形状と流速の間の位相差は小さくなり、偏倚流速が最大となる位置は上流に移動する。しかし、偏倚量の絶対値はゼロに近づき、流れは一様化されてくる。これは、遠心力の効果に比べ、河床摩擦抵抗の果たす役割が相対的に大きくなるためである。

仮定 ③ で述べたように側岸上の流砂と河床上の流砂の間に交換がないとすると、側岸の浸食・堆積は側岸に沿う流砂量によって決定される。いま、河床での流砂量と同様に、側岸での平衡状態の流砂量 q_{se} を式 (6) のように表わす。

$$q_{se} = m(u - u_c)^4 = m\{(u_0 + u') - u_c\}^4 \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 u_c は側岸での砂粒子の移動限界流速であり、



図—3 左岸偏倚流速の絶対値と側岸形状に対する位相遅れ ($F_r=0.5, f\theta n_0/h_0=0.15$)

m は比例定数である。 $u' \ll u_0 - u_c$ を考えると、式 (6) は

$$q_{se} \approx m u_0^4 \left\{ \left(1 - \frac{u_c}{u_0}\right)^4 + 4 \left(1 - \frac{u_c}{u_0}\right)^3 \frac{u'}{u_0} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

となる。蛇行流路では側岸での流速が流下方向に変化するため、流砂はその点での水理量だけではなく、運動履歴の影響を受けて非平衡状態で流れる。この非平衡流砂量 q_s を求める必要がある。側岸上の流砂と河床上の流砂の間に交換がないため、側岸上の流砂運動は一次元で表現され連続式は次式となる。

$$\zeta_1 = \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_s}{\partial s} \dots\dots\dots(8)$$

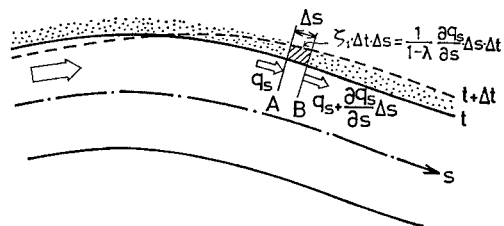
ここに、 ζ_1 は側岸浸食速度、 λ は河岸材料の空隙率、 q_s は側岸の単位深さ当たりの非平衡状態の側岸流砂量である。側岸浸食速度、側岸流砂量のどちらか一方が決定されれば、他方が求まる。しかし、側岸浸食速度あるいは側岸流砂量は独立に決定されるものではなく、両者は互いに影響を及ぼし合う。次にこの関係を定式化する。水の流れには本来的に土砂を輸送する能力があり、これは平衡状態の流砂量に等しい。図—4 の AB 間での平均的な流砂能力が q_{se} であったとき、上流側 A 断面からの側岸流砂量 q_s がこれより大きい場合には、A 断面から流入してきた土砂を B 断面から流出しきれずにその一部を AB 間に堆積させる。逆に q_s が q_{se} より小さい場合には AB 間の側岸が浸食される。したがって、側岸の浸食 (堆積) 速度は $\zeta_1 \propto (q_{se} - q_s)$ となる。この浸食速度と流砂の連続式 (8) から、非平衡流砂量を決定する次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial s} q_s(s) = \kappa \{q_{se}(s) - q_s(s)\} \dots\dots\dots(9)$$

ここで、 κ を浸食係数とよぶことにする。 κ は [1/(長さ)] の次元をもち、流速に対する流砂の遅れ距離の逆数に相当する。

式 (5) を式 (7) に代入することにより、左岸流速に対応する平衡状態の側岸流砂量は

$$q_{se}(s) = m u_0^4 \left\{ \left(1 - \frac{u_c}{u_0}\right)^4 + 4 \left(1 - \frac{u_c}{u_0}\right)^3 \cdot \left(a_l \sin \frac{2\pi s}{L} + b_l \cos \frac{2\pi s}{L}\right) \right\} \dots\dots\dots(10)$$



図—4 側岸流砂量と側岸浸食量

となる。式 (10) を式 (9) に代入し、上流端の影響のないところで q_s について解くと注 1), 左岸に沿う非平衡状態の流砂量は、

$$q_s(s) = mu_0^4 \left[\left(1 - \frac{u_c}{u_0} \right)^4 + \frac{4(1-u_c/u_0)^3 \kappa h_0}{(2\pi h_0/L)^2 + (\kappa h_0)^2} \right. \\ \times \left\{ \left(a_I \kappa h_0 + b_I \frac{2\pi h_0}{L} \right) \sin \frac{2\pi s}{L} \right. \\ \left. \left. + \left(-a_I \frac{2\pi h_0}{L} + b_I \kappa h_0 \right) \cos \frac{2\pi s}{L} \right\} \right] \dots\dots\dots (11)$$

となる。 $\kappa \rightarrow \infty$ のとき、非平衡流砂量 $q_s(s)$ は平衡流砂量 $q_{se}(s)$ に等しくなる。 q_s を一蛇行長当たりの平均量 q_{s0} とそれからの変動量 q_s' とに分割し、流速変動と流砂量変動の関係を調べる。

$$\frac{q_s'}{q_{s0}} = \frac{\sqrt{a_I^2 + b_I^2}}{1 - u_c/u_0} \frac{4}{\sqrt{(2\pi h_0/L)^2 + (\kappa h_0)^2}} \frac{\kappa h_0}{\kappa h_0} \\ \cdot \cos \left(\frac{2\pi s}{L} - \alpha - \phi \right) \dots\dots\dots (12 \cdot a)$$

$$\cos \phi = \frac{\kappa h_0}{\sqrt{(2\pi h_0/L)^2 + (\kappa h_0)^2}} \dots\dots\dots (12 \cdot b)$$

$$\sin \phi = \frac{2\pi h_0/L}{\sqrt{(2\pi h_0/L)^2 + (\kappa h_0)^2}} \dots\dots\dots (12 \cdot c)$$

側岸流速 (5) 式、側岸流砂量 (12) 式より、流速変動量に対する流砂量変動量の割合は、

$$4\kappa h_0 / \{ (1 - u_c/u_0) \sqrt{(2\pi h_0/L)^2 + (\kappa h_0)^2} \}$$

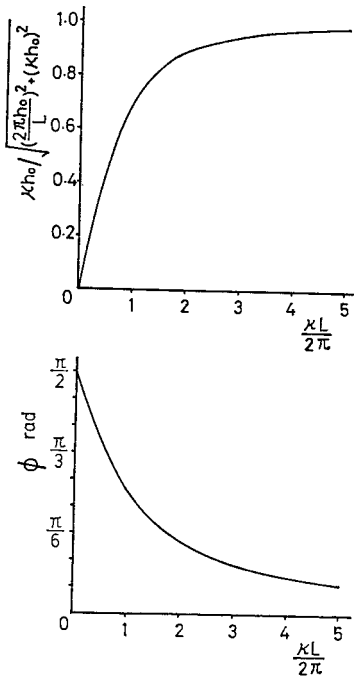


図-5 側岸流速に対する側岸流砂量の変化

注 1) 上流端での給砂条件は $\exp(-\kappa s)$ で側岸流砂量に影響を及ぼすため、ある距離流下すると上流端の影響はなくなる。

であり、流速に対する流砂量の位相遅れ ϕ は、

$$\cos^{-1} \{ \kappa h_0 / \sqrt{(2\pi h_0/L)^2 + (\kappa h_0)^2} \}$$

であることがわかる。これらが蛇行長 L 、浸食係数 κ によってどのように変化するかを図-5 に示す。 κL が大きいとき、位相遅れはほとんどなく、このときの流砂量は平衡状態の流砂量 [式 (10)] に等しくなる。これは κ が大きいほど、側岸の浸食・堆積によって平衡状態の流砂量に近づこうとし、 L が大きいほど平衡状態の流砂量の流下方向変化が緩やかになるので、これに追従しやすくなるためである。 κL が小さくなるに従って、流速に対する流砂量の位相遅れは $\pi/2$ rad に近づき、流速変動量に対する流砂量変動量の絶対値はゼロに近づく。

(2) 側岸の浸食 (堆積) 速度

前節では、蛇行流路内の流れと関連づけて側岸流砂量を求めた。流砂量の流下方向の変化は側岸の浸食、堆積によって引き起こされ、これは流砂の連続式 (8) で表現される。側岸流砂量 (11) 式を式 (8) に代入するとただちに側岸浸食速度 ζ_1 が得られる。

$$\zeta_1 = \frac{4mu_0^4(1-u_c/u_0)^3}{(1-\lambda)h_0} \frac{(2\pi h_0/L)\kappa h_0}{(2\pi h_0/L)^2 + (\kappa h_0)^2} \\ \times \left\{ \left(a_I \frac{2\pi h_0}{L} - b_I \kappa h_0 \right) \sin \frac{2\pi s}{L} \right. \\ \left. + \left(a_I \kappa h_0 + b_I \frac{2\pi h_0}{L} \right) \cos \frac{2\pi s}{L} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ζ_1 が負の場合には、側岸での堆積を意味する。 ζ_1 は左岸について得られた側岸浸食速度であり、これは右岸における側岸堆積速度に等しい注 2)。

式 (5・b, c) および式 (12・b, c) を用いて式 (13) を変形すると、

$$\zeta_1 = \frac{4mu_0^4(1-u_c/u_0)^3}{(1-\lambda)h_0} \frac{(2\pi h_0/L)\kappa h_0}{\sqrt{(2\pi h_0/L)^2 + (\kappa h_0)^2}} \\ \cdot \sqrt{a_I^2 + b_I^2} \cos \left(\frac{2\pi s}{L} - \phi \right) \dots\dots\dots (14 \cdot a)$$

$$\phi = \alpha + \phi - \pi/2 \dots\dots\dots (14 \cdot b)$$

となり、側岸流砂量に対して側岸浸食速度の位相は $\pi/2$ rad 進むことがわかる。側岸形状に対する側岸浸食速度の位相遅れが蛇行長によってどのように変化するかを図-6 に示す。蛇行長が非常に短いとき位相遅れは π rad であり、蛇行長が長くなるに従って位相遅れは小さくなる。蛇行長が非常に長くなると、位相遅れは $-\pi/2$ rad、すなわち側岸形状に対して側岸浸食速度の位相は $\pi/2$ rad 進む。また浸食係数 κ が大きいほど位相遅れは小さく、 κ が小さいほど位相遅れは大きい。これは、 κ が側岸流速に対する側岸流砂量の遅れ距離の逆数に相当することを考えれば明らかである。側岸形状と側岸浸食

注 2) 式 (7) で平衡状態の側岸流砂量を偏倚流速に関して線形化しているため、側岸浸食速度は右岸と左岸とで符号のみ異なる。

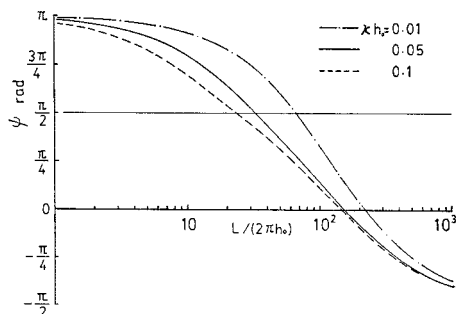


図-6 側岸形状に対する側岸浸食速度の位相遅れ
($F_r=0.5, f=0.015$)

速度の位相差によって側岸の浸食領域、堆積領域が変化する。この位相差は蛇行の発達、前進に重要な役割を果たす。以上で図-2に示した step 3 の解析段階が終わった。

次に step 4 の ζ_2 、すなわち sine generated curve を維持して最大偏角 θ を時間とともに変えながら速度 C で前進する蛇行の側岸浸食速度を求める。ある時刻 t での側岸の位置を決定するために、時間的に変化する (s, n) 座標から固定座標 (x, y) への変換を行う。河道距離 s を一つの蛇行頂点からとると (図-1),

$$\begin{aligned} x(s, n, t) &= x_0(t) + \int_0^s \cos \varphi ds + n \cdot \sin \varphi \\ &= x_0(t) + \int_0^s \cos \left\{ \theta(t) \sin \frac{2\pi s}{L(t)} \right\} ds \\ &\quad + n \cdot \sin \left\{ \theta(t) \sin \frac{2\pi s}{L(t)} \right\} \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(s, n, t) &= y_0(t) - \int_0^s \sin \varphi ds + n \cdot \cos \varphi \\ &= y_0(t) - \int_0^s \sin \left\{ \theta(t) \sin \frac{2\pi s}{L(t)} \right\} ds \\ &\quad + n \cdot \cos \left\{ \theta(t) \sin \frac{2\pi s}{L(t)} \right\} \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

となる。ここに $x_0(t)$ は蛇行頂点の x 座標であり、この点は速度 C で前進する ($dx_0(t)/dt=C$)。 $y_0(t)$ は河道中心の蛇行振幅である。式 (15), (16) の積分は、被積分関数の展開⁹⁾

$$\cos \left(\theta \sin \frac{2\pi s}{L} \right) = J_0(\theta) + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} J_{2\nu}(\theta) \cos 2\nu \frac{2\pi s}{L} \dots \dots \dots (17)$$

$$\sin \left(\theta \sin \frac{2\pi s}{L} \right) = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} J_{2\nu+1}(\theta) \sin(2\nu+1) \frac{2\pi s}{L} \dots \dots \dots (18)$$

によって実行可能である。式 (17), (18) を式 (15), (16) に代入し、 $y(L/4, 0, t)=0$ を考慮すると、

$$\begin{aligned} x(s, n, t) &= x_0(t) + J_0\{\theta(t)\}s \\ &\quad + 2 \frac{L(t)}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\nu} J_{2\nu}\{\theta(t)\} \sin 2\nu \frac{2\pi s}{L(t)} \\ &\quad + n \cdot \sin \left\{ \theta(t) \sin \frac{2\pi s}{L(t)} \right\} \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(s, n, t) &= 2 \frac{L(t)}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\nu+1} J_{2\nu+1}\{\theta(t)\} \\ &\quad \cdot \cos(2\nu+1) \frac{2\pi s}{L(t)} + n \cdot \cos \left\{ \theta(t) \sin \frac{2\pi s}{L(t)} \right\} \\ &\quad \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

$$y_0(t) = 2 \frac{L(t)}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\nu+1} J_{2\nu+1}\{\theta(t)\} \dots \dots \dots (21)$$

が得られる。時間の関数である蛇行長 L と時間によらない蛇行波長 D との関係は式 (19) により次式で与えられる。

$$D = x(L, 0, t) - x(0, 0, t) = J_0\{\theta(t)\} \cdot L'(t) \dots \dots \dots (22)$$

蛇行が発達、前進しているとき、左岸の浸食速度を ζ_2 とする。側岸流砂量から求めた側岸浸食速度より、左岸の浸食量と右岸の堆積量は等しく、その結果川幅 ($2n_0$) は一定に保たれることが知られた。このとき、図-7において、時刻 t での左岸の位置 O 点の座標 (x, y) は、時刻 t での (s, n) 座標で表わすと $[x(s, n_0, t), y(s, n_0, t)]$ であり、時刻 $t+\Delta t$ での (s, n) 座標で表わすと $[x(s+\Delta s, n_0-\zeta_2\Delta t, t+\Delta t), y(s+\Delta s, n_0-\zeta_2\Delta t, t+\Delta t)]$ となる。両者の対応する座標は相等しく、

$$x(s, n_0, t) = x(s+\Delta s, n_0-\zeta_2\Delta t, t+\Delta t) \dots \dots (23)$$

$$y(s, n_0, t) = y(s+\Delta s, n_0-\zeta_2\Delta t, t+\Delta t) \dots \dots (24)$$

が成り立つ。 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で式 (23), (24) の右辺を展開し、二次以上の微小項を省略して整理すると、

$$\left. \frac{\partial x}{\partial n} \right|_{(s, n_0, t)} \cdot \zeta_2 - \left. \frac{\partial x}{\partial s} \right|_{(s, n_0, t)} \cdot \frac{ds}{dt} = \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{(s, n_0, t)} \dots \dots \dots (25)$$

$$\left. \frac{\partial y}{\partial n} \right|_{(s, n_0, t)} \cdot \zeta_2 - \left. \frac{\partial y}{\partial s} \right|_{(s, n_0, t)} \cdot \frac{ds}{dt} = \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{(s, n_0, t)} \dots \dots \dots (26)$$

となる。式 (25), (26) を連立して解くと、左岸の浸食速度は次式で表わされる。

$$\zeta_2 = \frac{\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial t} & -\frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & -\frac{\partial y}{\partial s} \end{array} \right|_{(s, n_0, t)}}{\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial n} & -\frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial n} & -\frac{\partial y}{\partial s} \end{array} \right|_{(s, n_0, t)}} \dots \dots \dots (27)$$

式 (19), (20) を式 (27) に代入し、

$$dL/dt = -\{L/J_0(\theta)\} / \{\partial J_0(\theta)/\partial \theta\} (d\theta/dt)$$

を考慮すると、幾何学的条件を満たすべき左岸の浸食速度 ζ_2 が求まる。

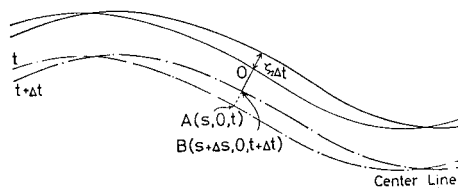


図-7 左岸浸食幅

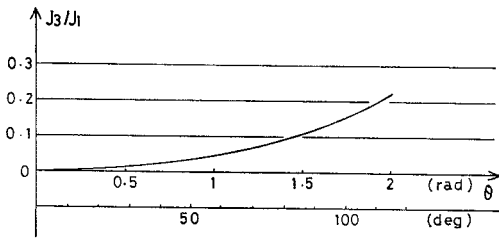


図-8 式(28)のオーダー比較

$$\zeta_2 = 2C \left(J_1 \sin \frac{2\pi s}{L} + J_3 \sin 3 \frac{2\pi s}{L} + \dots \right) + \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{L}{2\pi} \frac{2}{J_0} \left(J_1 \cos \frac{2\pi s}{L} + J_3 \cos 3 \frac{2\pi s}{L} + \dots \right) \dots (28)$$

左岸と同様な解析を行うと、右岸の堆積速度は式(28)と同一なものとなる。図-8に示すように式(28)の第2項、第4項はそれぞれ第1項、第3項に比してθがかなり大きい範囲(θ < 100°)まで無視できる。このとき側岸浸食速度は次式で近似できる。

$$\zeta_2 = 2C J_1 \sin \frac{2\pi s}{L} + \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{L}{2\pi} \frac{2 J_1}{J_0} \cos \frac{2\pi s}{L} \dots (29)$$

式(28)または式(29)より、蛇行の発達速度(1/θ)(dθ/dt)はs=0すなわち蛇行頂点の側岸浸食速度により決定され、蛇行の前進速度Cはs=L/4すなわちx軸と交差する点の側岸浸食速度により決定される。先に、蛇行が発達するか減衰するか、あるいは下流に移動するか上流に移動するかは、式(14)で与えられる側岸形状に対する側岸浸食速度の位相遅れφの大きさで判定できることを知った。式(14)と式(28)より次のことが明らかとなる。蛇行が発達するためには、s=0で側岸浸食速度が正となればよいので、このときφは-π/2 < φ < π/2となる。逆に-π < φ < -π/2, π/2 < φ < πでは蛇行は減衰する。一方、s=L/4での側岸浸食速度の正負で蛇行の移動方向が決まる。したがって、0 < φ < πでは蛇行は下流へ移動し、-π < φ < 0では上流に移動する。従来、沖積地河川における蛇行は下流にのみ移動するといわれていたが^{1),3)}、これまでの解析で欠落していた側岸流砂量を考慮すれば、相対的に波長の長い蛇行は、側岸形状に対する側岸浸食速度の位相遅れが負となるため、上流に移動するという結果が得られる。

(3) 蛇行の発達速度と前進速度

前節で求めた2つの浸食速度ζ₁とζ₂は一致しなければならない(step 5)注3)。式(13)と式(29)が恒等的に等しくなる条件より、蛇行の発達速度(1/θ)(dθ/dt)、前進速度Cがそれぞれ次式のように求まる。

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{4mu_0^4(1-u_c/u_0)^3 J_0}{2(1-\lambda)h_0^2 J_1} \times \frac{(2\pi h_0/L)^2 \kappa h_0}{(2\pi h_0/L)^2 + (\kappa h_0)^2} \left(a_1 \kappa h_0 + b_1 \frac{2\pi h_0}{L} \right) = \frac{4mu_0^4(1-u_c/u_0)^3 (n_0/h_0) J_0 \theta}{2(1-\lambda)h_0^2 J_1} \times \frac{(2\pi h_0/L)^4 \kappa h_0}{(2\pi h_0/L)^2 + (\kappa h_0)^2} \frac{1}{(2\pi h_0/L)^2 + f^2} \times \left[f \kappa h_0 \left(\frac{u_0^2}{2gh_0} + 1 \right) + \left\{ f^2 \frac{u_0^2}{2gh_0} - \left(\frac{2\pi h_0}{L} \right)^2 \right\} \right] \dots (30)$$

$$C = \frac{4mu_0^4(1-u_c/u_0)^3}{2(1-\lambda)h_0 J_1} \frac{(2\pi h_0/L) \kappa h_0}{(2\pi h_0/L)^2 + (\kappa h_0)^2} \times \left(a_1 \frac{2\pi h_0}{L} - b_1 \kappa h_0 \right) = \frac{4mu_0^4(1-u_c/u_0)^3 (n_0/h_0) \theta}{2(1-\lambda)h_0 J_1} \times \frac{(2\pi h_0/L)^2 \kappa h_0}{(2\pi h_0/L)^2 + (\kappa h_0)^2} \frac{1}{(2\pi h_0/L)^2 + f^2} \times \left[f \left(\frac{2\pi h_0}{L} \right)^2 \left(\frac{u_0^2}{2gh_0} + 1 \right) - \kappa h_0 \left\{ f^2 \frac{u_0^2}{2gh_0} - \left(\frac{2\pi h_0}{L} \right)^2 \right\} \right] \dots (31)$$

ここに、u₀、h₀は流路が蛇行しているときの等流状態の平均流速、平均水深であるので、蛇行の発達に伴って変化する量である。そこで、これらを直線流路時の平均流速ū₀、水深h̄₀および最大偏角θの関数で表わすことにする。河道の中心線に沿ったs方向の勾配iは蛇行の発達による河道距離の増加に伴って緩やかになり、谷勾配(平均流下方向の勾配)i₀との間にi=(D/L)i₀=J₀(θ)i₀なる関係が成立する。このとき、平均量を決定する方程式(3)より、u₀=J₀(θ)^{1/3}ū₀、h₀=J₀(θ)^{-1/3}h̄₀が得られる。これらの関係式を用い、蛇行の発達速度、前進速度を直線流路時の平均量と蛇行波長D、最大偏角θの関数で表わす。

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{4m\bar{u}_0^4(1-J_0^{-1/3}u_c/\bar{u}_0)^3 (n_0/\bar{h}_0) J_0^{7/3} \theta}{2(1-\lambda)\bar{h}_0^2 J_1} \times \frac{(2\pi\bar{h}_0 J_0/D)^4 \kappa \bar{h}_0}{(2\pi\bar{h}_0 J_0/D)^2 + (\kappa\bar{h}_0)^2} \frac{1}{(2\pi\bar{h}_0 J_0^{2/3}/D)^2 + f^2} \times \left[f \kappa \bar{h}_0 J_0^{-1/3} \left(\frac{\bar{u}_0^2}{2g\bar{h}_0} J_0 + 1 \right) + \left\{ f^2 \frac{\bar{u}_0^2}{2g\bar{h}_0} J_0 - \left(\frac{2\pi\bar{h}_0 J_0^{2/3}}{D} \right)^2 \right\} \right] \dots (32)$$

$$C = \frac{4m\bar{u}_0^4(1-J_0^{-1/3}u_c/\bar{u}_0)^3 (n_0/\bar{h}_0) J_0^{4/3} \theta}{2(1-\lambda)\bar{h}_0 J_1} \times \frac{(2\pi\bar{h}_0 J_0/D)^2 \kappa \bar{h}_0}{(2\pi\bar{h}_0 J_0/D)^2 + (\kappa\bar{h}_0)^2} \frac{1}{(2\pi\bar{h}_0 J_0^{2/3}/D)^2 + f^2}$$

注3) θ ≥ 100°では式(28)を式(29)で表現すると近似の精度が悪くなり、ζ₁=ζ₂が厳密には成り立たなくなる。したがって、蛇行形状はsine generated curveからしだいにずれるようになる。

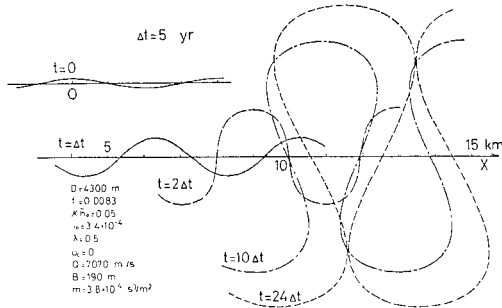


図-9 蛇行形状の経時変化

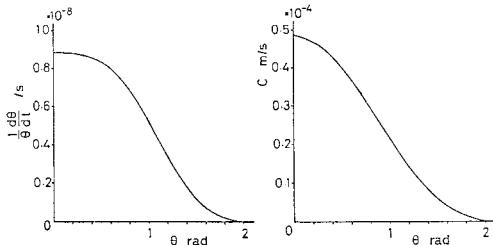


図-10 最大偏角による発達速度, 前進速度の変化 (水理条件は図-9 に同じ)

$$\times \left[f \left(\frac{2\pi\bar{h}_0}{D} \right)^2 J_0^{5/3} \left(\frac{\bar{u}_0^2}{2g\bar{h}_0} J_0 + 1 \right) - \kappa\bar{h}_0 \left\{ f^2 \frac{\bar{u}_0^2}{2g\bar{h}_0} J_0 - \left(\frac{2\pi\bar{h}_0}{D} J_0^{2/3} \right)^2 \right\} \right] \dots\dots\dots(33)$$

式 (32), (33) は蛇行振幅のかなり大きい範囲まで蛇行の発達速度, 前進速度を表現するものである。

図-9 は式 (32), (33) によって計算した蛇行形状の経時変化の一例である。計算条件は石狩川河口湾曲部での実測データ²⁾を用いている。最大偏角が小さい間は蛇行の下流への移動が活発であるが, 最大偏角が大きくなるに従って蛇行の発達, 前進が不活発になることがわかる。図-10 は同じ条件で, 最大偏角 θ によって発達速度, 前進速度がどのように変化するかを示したものである。 θ の増大に伴って発達速度, 前進速度は単調に減少する。これは, θ の増加が河道に沿った勾配を減少させその結果流れの掃流力が減じ, 図-3 が示すように蛇行長 L の増加が流速偏倚量を減少させることにより側岸の浸食・堆積が小さくなること, また同量の浸食・堆積があっても規模の大きいものほど発達, 前進が不活発になるためである。

蛇行の前進速度 C は, 式 (33) が示すように最大偏角 θ ばかりでなく, 蛇行波長 D によって大きく変化する。図-11 はこれらの関係を示したものである。最大偏角が同一, すなわち平面形状が相似な蛇行の前進速度は, 波長の長いものほど小さくなる。これは, 波長が長いものほど河道中心線の曲率が小さくなり遠心力に起因

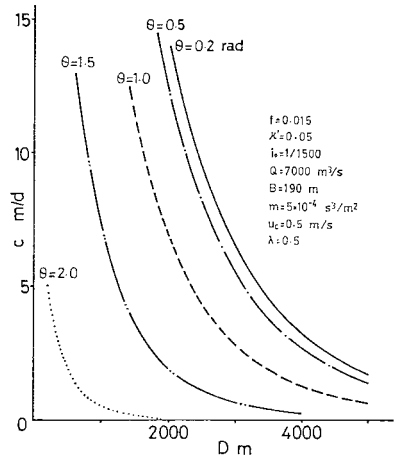


図-11 蛇行波長による前進速度の変化

する流速偏倚量が小さくなること, 蛇行形状と側岸浸食速度の間の位相差が小さくなることによる。蛇行波長と前進速度の関係を片対数グラフにプロットすると, $\log C \sim D$ の関係はほぼ直線となる。著者らの知る限り蛇行の前進速度に関する資料は見当たらないが, 砂礫堆の長さ³⁾と前進速度の関係によく似ている³⁾。このことは砂礫堆と蛇行波長との強い関連^{2), 3)}を示唆するものとして興味深い。

(4) 安定な蛇行形状は存在し得るか

図-9 に示した計算例では, 蛇行は発達し続け, やがて河道の短絡を引き起こす。では, 条件が異なれば, 短絡に至る以前に蛇行の発達がやみ, その形状を保ったまま蛇行が前進, 後退または停止することがあるだろうか。このような状態の蛇行形状を安定蛇行形状とよぶことにする。まず, 水理条件が一定のもので安定な蛇行形状すなわち, 蛇行の発達速度をゼロにする θ が存在するかどうかを調べる。 θ の増加とともに $(1/\theta)(d\theta/dt)$ がゼロとなる状況には, $(1/\theta)(d\theta/dt)$ が正から負に変化する間でゼロをとる場合 (図-12, Case 1) と, 負から正に変化する間でゼロをとる場合 (図-12, Case 2) の2つがあり, 両者では $(1/\theta)(d\theta/dt)=0$ のもつ意味が異なる。 $(1/\theta)(d\theta/dt)=0$ となる θ を θ_0 とおいて, まず Case 1 について考える。Case 1 で θ が θ_0 より小さいとき, 発達速度が正であるため θ は時間的に増大

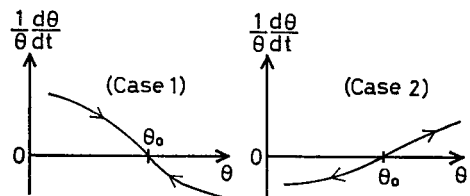


図-12 安定蛇行形状の存在, 非存在

し、 θ_0 に近づく。 θ が θ_0 より大きいとき、発達速度が負となるため θ は時間的に減少し、 θ_0 に近づく。したがって、初期最大偏角がいかなる値であっても時間が十分経過すると最大偏角は θ_0 に落ち着き、安定な蛇行形状が存在する。この場合には $(1/\theta)(d\theta/dt)=0$ は安定である。一方 Case 2 では、 θ が θ_0 より小さいとき、発達速度が負であるため θ は時間的に減少し、時間が経過するに従って $\theta=0$ すなわち直線流路に近づく。 θ が θ_0 より大きいとき、発達速度は正となるため、河道の短絡に至るまで蛇行は発達し続ける。したがって、この場合には $(1/\theta)(d\theta/dt)=0$ は不安定であり、安定な蛇行形状は存在しない。

θ の変化に対して式 (32) がどのように変化するかを調べてみる。 $\theta=0$ で発達速度が正である場合には、 θ の増加に伴って発達速度が減少するが、 θ が十分大きくなって（河道の短絡に至る $\theta=2.2$ rad までの範囲）発達速度は負の値とはならないため、水理条件が変化しない限り、発生した蛇行は迂曲、短絡にまで至る（図-9, $t=24$ dt）。また $\theta=0$ で発達速度が負である場合には、図-13 の ---- 線が示すように図-12, Case 2 と同様な変化を示すため、 $\theta < \theta_0$ の蛇行は時間が経過すると消滅してしまい、 $\theta > \theta_0$ の蛇行は迂曲、短絡にまで至る。したがって、先に導かれた自由蛇行の式 (32) は安定な蛇行形状をとり得ないことがわかる。しかし、 θ が増加して蛇行長が長くなると、河道中心線に沿った勾配が緩やかになる。その結果、側岸での掃流力が限界掃流力に達すると、もはや蛇行は発達、移動しなくなる。このとき、蛇行は安定形状を保っているとみなすことができる。

上述の議論では流量が一定の状態を考えてきたが、流量が変化する場合には蛇行の発達、減衰が起こり得る。次にこの場合を考えてみる。図-13 に示すように、ある一定流量 Q_1 のもとで波長 D の蛇行が発達し続けている。ここで流量を Q_2 まで減少させたときには、蛇行

の発達速度が小さくなるだけで相変わらず発達し続けるが、ある程度流量が増加すると (Q_3) 逆に蛇行は減衰する。そのまま大流量が継続すると波長 D の蛇行は消滅し（図-12, Case 2）、やがて流量 Q_3 に対応する卓越波長の蛇行が発生する。河川では長期間一定の流量が流れることはまれで、むしろ流量はある範囲内で変動していると考えられる。このとき蛇行はきわめてゆっくり発達、減衰を繰り返し、最大偏角 θ 、蛇行長 L がある範囲内の値をとり、観測期間中安定蛇行形状をとっているかのようにみえる。

(5) 卓越蛇行波長

直線流路からの蛇行の発生は、最大偏角 θ が微小な場合についてその偏角が時間とともに増大するか否かを調べればよい。 $\theta=0$ で与えられる最大偏角の微小擾乱に対して、 $(1/\theta)(d\theta/dt) > 0$ となる波長をもつ蛇行は、流量が変化しない限りその後減衰することはない。したがって、直線流路から発生する蛇行は $[(1/\theta)(d\theta/dt)]_{\theta=0} > 0$ を満たす波長をもつ蛇行と考えられる。式 (32) において $\theta=0$ のとき、 $J_0(\theta)=1, J_1(\theta)=\theta/2$ であるので $k_D'=2\pi\bar{h}_0/D, \kappa'=\kappa\bar{h}_0, F_r'^2=\bar{u}_0^2/(g\bar{h}_0)$ なる変換を行うと、このときの蛇行の発達速度は次式となる。

$$\left[\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt}\right]_{\theta=0} = \frac{4m\bar{u}_0^4(1-u_c/\bar{u}_0)^3(n_0/\bar{h}_0)}{(1-\lambda)\bar{h}_0^2} \frac{k_D'^4\kappa'}{k_D'^2+\kappa'^2} \times \frac{1}{k_D'^2+f^2} \{f\kappa'(F_r'^2/2+1) + (f^2F_r'^2/2-k_D'^2)\} \dots\dots\dots(34)$$

これより、発生蛇行波数は

$$k_D'^2 < \kappa' f(F_r'^2/2+1) + f^2 F_r'^2/2 = k_{DS}'^2 \dots\dots(35)$$

となる。同様に式 (33) より、 $\theta=0$ に対して蛇行が下流に移動する条件は、

$$k_D'^2 > \frac{\kappa' f^2 F_r'^2/2}{f(F_r'^2/2+1)+\kappa'} = k_{DC}'^2 \dots\dots\dots(36)$$

となる。 k_{DS}' と k_{DC}' の大きさを比較すると、常に $k_{DC}' < k_{DS}'$ が成り立つ。

蛇行が発生し始めてからその振幅を増しても、蛇行波長は発生時のものとほとんど変わらないと考えられ、したがって初期発達速度を最大にする波長が最も発生しやすい蛇行の波長である。発達速度には最大偏角で定義したものと振幅で定義したものと2つがあるが、 $\theta \rightarrow 0$ の極限では $y_0 = D\theta/(2\pi)$ となるため、最大偏角の変化で定義した発達速度 $(1/\theta)(d\theta/dt)$ と振幅の変化で定義した発達速度 $(1/y_0)(dy_0/dt)$ は一致する。これより、発達速度をどちらで定義しても卓越蛇行波長は式 (34) の極値条件で与えられる。すなわち、

$$F(k_D'^2) = k_D'^6 + 2(\kappa'^2 + f^2)k_D'^4 - \{\kappa'^3 f(F_r'^2/2+1) + \kappa'^2 f^2 F_r'^2/2 - 3\kappa'^2 f^2 + \kappa' f^3(F_r'^2/2+1)\}$$

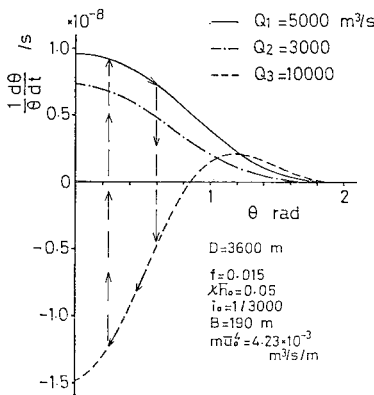


図-13 流量による発達速度の変化

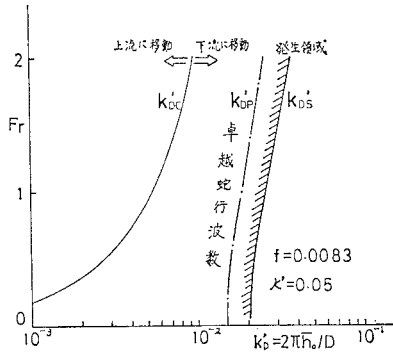


図-14 蛇行の発生領域図

$$+ f^4 F_r^2 / 2 \} k_D'^2 - 2 \{ \kappa'^3 f^3 (F_r^2 / 2 + 1) + \kappa'^2 f^4 F_r^2 / 2 \} = 0 \dots\dots\dots (37)$$

である。 $F(k_D'^2) = 0$ を満たす k_D' が卓越蛇行波数であり、これを k_{DP}' で表わす。式 (37) より、 $F(k_D'^2) = 0$ を満たす $k_D'^2$ は $k_D'^2 > 0$ の範囲でただ1つ存在する。さらに式 (35), (36) および (37) より、 $F(k_{DC}'^2) < 0$, $F(k_{DS}'^2) > 0$ なる関係が得られ、これより $k_{DC}' < k_{DP}' < k_{DS}'$ なる関係式を得る。 k_{DC}' , k_{DP}' , k_{DS}' を F_r の関数として 図-14 に示す。斜線部より左側が蛇行の発生領域である。発生領域内には、蛇行が下流に移動する領域と上流に移動する領域があり、相対的に波長の長い蛇行は上流に移動する。しかし、卓越波数は蛇行が下流に移動する領域内に現われるため、上流に移動する蛇行は発生しにくいことがわかる。 図-14 で $f = 0.0083$ は石狩川河口湾曲部の実測データである。採用した κ' の値にはやや厳密さを欠くが、 κ を流速に対する流砂の遅れ距離と考へ、 $1/\kappa$ を平均流速 u_0 、平均水深 h_0 、土砂の沈降速度 w で表わすと $(u_0 h_0 / w)$ のオーダーとなり、 κ' は (w/u_0) のオーダーとなる。これより、 κ' の代表値として 0.05 を与えた。 図-14 の発生領域図は、 f , κ' の値によって変化する。 図-6 が示すように κ' が大きくなるほど側岸形状に対する側岸浸食速度の位相遅れ ϕ が小さくなる。 k_{DS}' は $\phi = \pi/2$ rad となる波数に、 k_{DC}' は $\phi = 0$ となる波数に対応するため、 κ' が大きくなるほど同じ F_r に対して k_{DC}' , k_{DP}' , k_{DS}' は大きくなる。しかし、これらの変化する範囲には限度があり、 k_{DC}' は $f^2 F_r^2 / 2$ より大きくはならず、 k_{DS}' は $f^2 F_r^2 / 2$ より小さくはならない。 κ' に対する変化と同様に、 f が大きくなるほど k_{DC}' , k_{DP}' , k_{DS}' は大きくなる。

無次元卓越蛇行波数 k_{DP}' を卓越蛇行波長 D_P に書き直すと、

$$D_P = 2\pi \bar{h}_0 / k_{DP}' \dots\dots\dots (38)$$

となる。流量 Q 、川幅 B が一定の場合には、谷勾配 i_0 が大きくなるにつれて \bar{h}_0 は小さく、 F_r は大きくなる。

k_{DP}' は F_r に対して単調に増加するため (図-14)、卓越蛇行波長 D_P は勾配の増加とともに減少する。 図-15 はこの一例を示したものである。この図は、勾配の急な上流部ほど蛇行波長は短く、勾配の緩やかな下流部ほど波長は長いという実河川での現象をよく説明する。

式 (37), (38) により計算した卓越蛇行波長と実測蛇行波長との関係を 図-16 に示す。 f , h_0 , u_0 は実測データを用い、 $\kappa' = 0.05$ を与えた。同図の ∇ , \odot 印は実験水路における交互砂州波長であるが、これらも含めて卓越蛇行波長は実測の波長をほぼ説明する。本解析で得られた卓越波長は池田・Parker・澤井^{3), 4)} の導いた自由蛇行の卓越波長 $D_P = 4\pi h_0 / (1.5f)$ に近い値をとるため、 図-16 と彼らの示した (実測波長) ~ (卓越波長) の図はほぼ一致する。

実河川で経験的に求められてきた流量と川幅、川幅と蛇行波長、流量と蛇行波長の関係を示す Regime 理論¹⁵⁾ を卓越蛇行波長を用いて説明することを試みる。池田ら¹⁾ は流量と川幅の関係として $B \propto Q^{1/2}$ を与え、流量と蛇行長について $L \propto Q^{0.35}$ の関係を導いている。しかし、蛇行長 L は蛇行の発達に伴って増大するため、

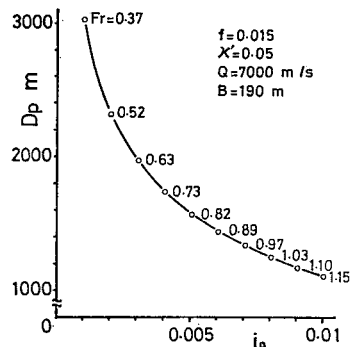


図-15 勾配による蛇行波長の変化

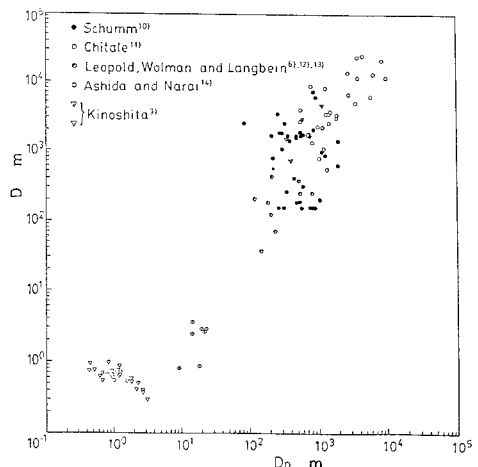


図-16 卓越蛇行波長と実測蛇行波長の比較

蛇行の特性を示す指標とはなりにくい。そこで、蛇行の発達段階によらずほぼ一定である蛇行波長と流量、蛇行波長と川幅の関係を求める。谷勾配 i_0 、摩擦係数 f が一定の条件では、 $F_r = \sqrt{2i_0/f}$ は流量、川幅によらず一定となる。したがって、図-14 より無次元卓越蛇行波数 k_{DP}' も一定となり、蛇行波長は直線流路時の水深 \bar{h}_0 に比例する。水深に関する式 $\bar{h}_0 = \sqrt[3]{fQ^2/(2gi_0B^2)}$ を用いて式 (38) を変形すると、

$$D_P = \frac{2\pi}{k_{DP}'} \sqrt[3]{\frac{fQ^2}{2gi_0B^2}} \dots\dots\dots (39)$$

となる。一般に安定した川幅は流量、勾配、河岸材料によって決まると考えられる¹⁶⁾。建設省の調べによれば、安定した川幅と流量との関係は、日本の中間地河道では図-17 に示すようにほぼ $B = (2.5 \sim 8)Q^{1/2}$ となっている¹⁷⁾。この関係式を式 (39) に代入するとただちに

$$D_P \propto Q^{1/3} \dots\dots\dots (40)$$

$$D_P \propto B^{2/3} \dots\dots\dots (41)$$

を得る。これらの関係と実測値との比較を 図-18、図-19 に示す。●印は実測値を示し、上側の実線は川幅と流量の関係 $B = 2.5Q^{1/2}$ で与えた場合の理論曲線、下側の実線は $B = 8Q^{1/2}$ としたときの理論曲線である。自然河川では平均的に $D \propto Q^{1/2}$ 、 $D \propto B$ といわれてい

るが、実測の流量と川幅の関係式を用いて計算した卓越蛇行波長は、実測値のばらつきの範囲内で流量と蛇行波長、川幅と蛇行波長の関係をほぼ説明する。

3. 勾配が緩やかに変化する河川における蛇行の解析

流下方向に流量、川幅、勾配が変化しない条件で行われた前章までの解析では、蛇行波長、最大偏角、発達速度および前進速度は流下方向に変化しない。しかし、一般に谷勾配 i_0 は流下方向に減少するため、前進速度などが場所ごとに異なり、蛇行がおしつめられたり、引き伸ばされたりすることが考えられる。本章では、一様勾配での蛇行理論を勾配が変化する流れに適用し、勾配が変化する河道での蛇行の解析を行う。

(1) 基礎方程式

流下方向の勾配変化が緩やかである場合には、ある地点の流れはその地点の勾配に等しい一様勾配河川の流れで近似できる。蛇行の発達、前進は側岸流速と密接な関係にあるため、このような河川における蛇行の発達、前進をその地点の勾配に等しい一様勾配河川での理論解析の結果を用いて検討する。図-20 に示すように時刻 t に x の位置にある蛇行は、時刻 $t + \Delta t$ に $x + C\Delta t$ の位置まで前進する。このとき、蛇行の移動に伴う波長の变化を記述する基礎式は、

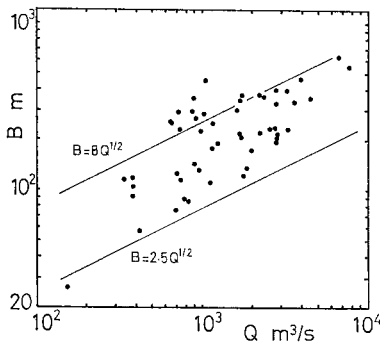


図-17 流量と川幅の関係

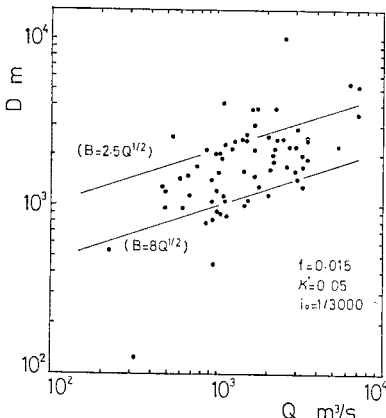


図-18 流量と蛇行波長の関係

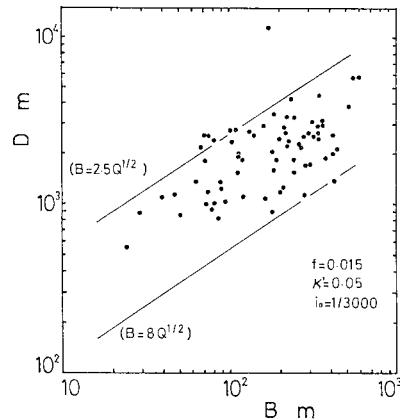


図-19 川幅と蛇行波長の関係

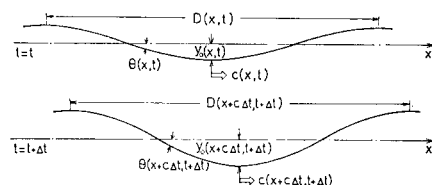


図-20 蛇行の前進に伴う波長、振幅の変化

$$D(x+C\Delta t, t+\Delta t) = D(x, t) + \{C(x+D/2, t) - C(x-D/2, t)\} \Delta t \dots\dots\dots(42)$$

である。前進速度の流下方向変化が緩やかであるとき、 Δt を十分小さくとり、式 (42) を展開することにより

$$\frac{\partial D}{\partial t} = D \frac{\partial C}{\partial x} - C \frac{\partial D}{\partial x} \dots\dots\dots(43)$$

が得られる。すなわち、波長の時間変化は流下方向の前進速度の差によるものと、上流からの伝播によるものとの線形和で表わされる。ここで蛇行の前進速度 C をその地点の勾配、波長、最大偏角に等しい一様勾配河川の前進速度 (33) 式で近似する。同様に、蛇行振幅の変化を記述する基礎式は

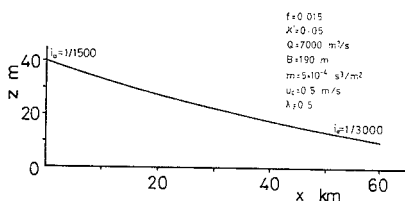
$$y_0(x+C\Delta t, t+\Delta t) = y_0(x, t) + \left[\frac{dy_0}{dt} \right]_u \Delta t \dots\dots\dots(44)$$

で表わされる。上式中 $[dy_0/dt]_u$ は蛇行の前進速度と同じ速度の移動座標系からみたときの振幅の増加率であり、一様勾配河川での振幅増加率に等しいと考える。 Δt が十分小さいとき、式 (44) の左辺を展開することにより、蛇行振幅の時間変化率は近似的に次式で表現できる。

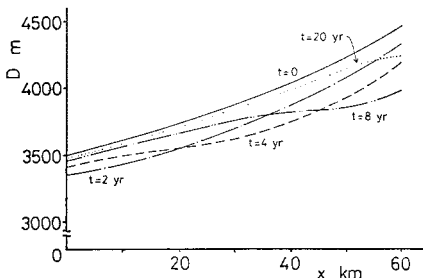
$$\frac{\partial y_0}{\partial t} = \left[\frac{dy_0}{dt} \right]_u - C \frac{\partial y_0}{\partial x} \dots\dots\dots(45)$$

振幅は蛇行の形状を直接的に表現するものでない(振幅だけでは蛇行が迂曲、短絡にまで至っているかどうかわからない)ため、振幅の時間変化率を最大偏角の時間変化率に変換すると、若干の計算ののち次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial \theta}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial y_0} \frac{\partial y_0}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial D} \left(\frac{\partial D}{\partial t} + C \frac{\partial D}{\partial x} \right) + \left[\frac{d\theta}{dt} \right]_u - C \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned} \dots\dots\dots(46)$$



図—21 河床縦断形状



図—22 蛇行波長の経時変化

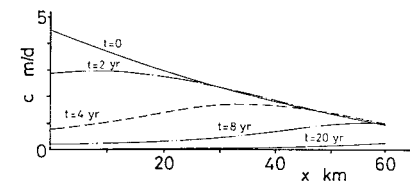
上式で $[d\theta/dt]_u$ は一様勾配河川での最大偏角の時間変化率である。また、sine generated curve を仮定していることから $(\partial\theta/\partial D)$ は式 (21) より、

$$\frac{\partial \theta}{\partial D} = - \frac{J_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{J_{2\nu+1}}{2\nu+1}}{D \left\{ J_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{J_{2\nu+1}}{2\nu+1} + J_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{J_{2\nu}-J_{2\nu+2}}{2(2\nu+1)} \right\}} \dots\dots\dots(47)$$

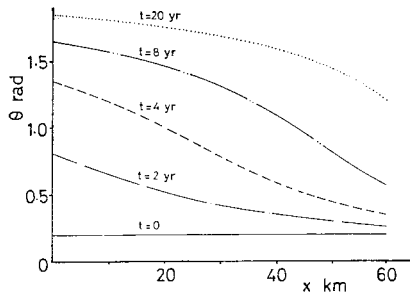
となる。式 (46) は、最大偏角の時間変化が、振幅一定のもとでの波長の減少によるものと、波長一定のもとでの振幅増加によるもの、および上流からの伝播によるものとの和で表わされることを示す。初期蛇行波長 $D(x, 0)$ 、初期最大偏角 $\theta(x, 0)$ を与えると、式 (32)、(33) を用いて式 (43)、(46) を数値計算することにより、谷勾配が緩やかに変化する河川における蛇行の発達過程の解析が可能となる。

(2) 蛇曲から迂曲、短絡への移行

河川の縦断勾配は上流側ほど急で、下流側ほど緩やかである。そこで、谷勾配 i_0 が平均流下方向に直線的に減少する場合についての計算を行った。このとき河床高 z は、図—21 に示すように流下直線距離に対して放物線形となる。初期蛇行波長としてその地点の勾配に対応する卓越蛇行波長を、初期最大偏角として流下方向に一樣な $\theta(x, 0) = 0.2 \text{ rad}$ を与えた。図—22、図—23、図—24 にそれぞれ差分計算で求めた蛇行波長、前進速度、最大偏角の時間変化を示す ($\Delta t = 30 \text{ d}$, $\Delta x = 2.4 \text{ km}$)。卓越蛇行波長は、図—15 に示したように勾配が急なほど短いため、初期蛇行波長は上流側ほど短く、下流側ほど長い(図—22, $t=0$)。図—11 に示したように波長の



図—23 前進速度の経時変化



図—24 最大偏角の経時変化

短い蛇行ほど前進速度が大きいため、 $0 < t < 2 \text{ yr}$ では全域で波長が減少する。側岸浸食量の大きな上流側では蛇行が発達しやすく、時間が経過するに従って最大偏角は上流側ほど大きくなる(図-24)。最大偏角が増大するに従って、前進速度が減少するため(図-10, 図-11), ある時間が経過すると下流側の蛇行の方が前進速度が大きい区域が生じ(図-23, $t=2 \text{ yr}$), その区域では波長が時間的に増大する(図-22, $t=2 \text{ yr}$ 以降の $x=0 \sim 20 \text{ km}$ 付近)。時間が経過するに従ってこの現象が全域でみられるようになり、蛇行発達の著しい上流側で最大偏角が約 2.2 rad にまで達して河道の短絡が発生するまでには、蛇行波長はほぼその地点の勾配に対応する卓越蛇行波長に落ち着く(図-22, $t=20 \text{ yr}$)。図-21~24 に示した計算例は、谷勾配が比較的緩やかな場合であるが、谷勾配が急な場合(100 km の区間で i_0 が $1/100$ から $1/1000$ に直線的に変化)においても、流れのもつ掃流力が増大するため蛇行発達に要する時間が短いだけで、発達過程はここで述べたものと同じ結果となる。

谷勾配が直線流下距離に対して直線的に変化する場合ではなく、もっと複雑に変化した場合にはどのような蛇行の発達過程がみられるだろうか。図-25 に示すように、谷勾配 i_0 が $x=20 \sim 80 \text{ km}$ の区間で正弦変化をしている場合の解析結果を図-26~図-28 に示す。初期蛇行波長、初期最大偏角は前述のものと同様に与えた。下流側ほど勾配の急な $x=50 \text{ km}$ より上流では初期に波長が増大し、下流側ほど勾配の緩やかな $x=50 \text{ km}$ より下流では減少する(図-26, $t=0 \sim 2 \text{ yr}$)。しかし、前の例と同様に最急勾配部で蛇行の発達が著しく、その結果前進速度が小さくなるため(図-27, $t=4 \text{ yr}$ 以降), その地点より上流域では波長が減少し、下流域では増大して卓越蛇行波長に近づいてゆく(図-26)。時間が十分経過すると、波長はほぼ初期波長に落ち着き、蛇行発達の最も激しい急勾配部で河道の短絡($\theta=2.2 \text{ rad}$)に至る。

自然河川では、上流の蛇行が下流の蛇行に追いつく河道の短絡現象がみられる⁹⁾。池田ら¹⁾ は一様勾配河川での蛇行の解析から、河床縦断勾配が急なほど蛇行長は短く、前進速度は大きくなるという結果を得た。この結果を勾配が変化する河川に準用し、蛇行長の短い上流側ほど蛇行の前進速度が大きいため蛇行のおしつまりが生じ、迂曲、短絡へと移行すると推論した。しかし、この推論では勾配が変化する河川に固有の蛇行長(あるいは最大偏角)と前進速度の時間的変化を考慮していないため、勾配が変化する河道での蛇行の挙動を説明し得たことにはならない。一方、これらの変化を考慮した本解析では次の結果が導かれる。

(i) 急勾配域で蛇行が十分発達して迂曲、短絡に至

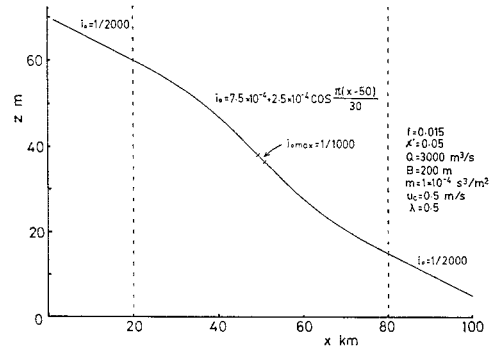


図-25 河床縦断形状

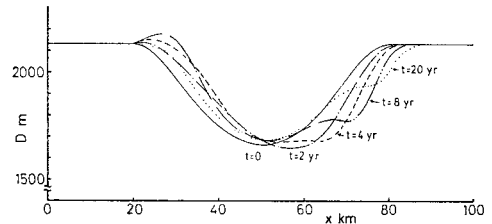


図-26 蛇行波長の経時変化

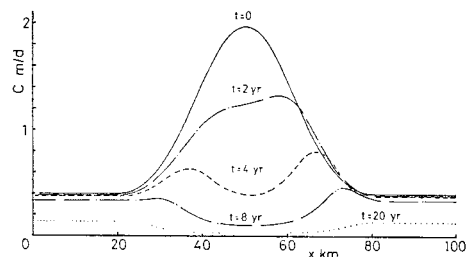


図-27 前進速度の経時変化

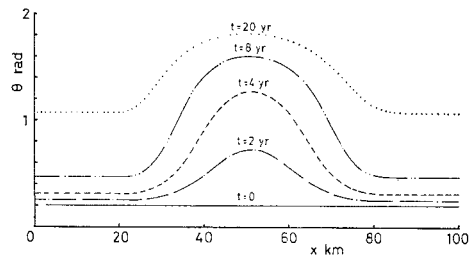


図-28 最大偏角の経時変化

るまでには、蛇行発達の初期段階にみられた蛇行のおしつまりはほとんど消失する。したがって、迂曲、短絡に至る原因は蛇行のおしつまりよりも、一様勾配河川で短絡に至るメカニズムと同じく、蛇行振幅の増大によるものである。

(ii) 急勾配域で河道の短絡がいったん生じた後は、短絡部の最大偏角が急減するため、前進速度が大きくなる。その結果下流の蛇行をおしつめ、迂曲から短絡への移行を促進し、この繰返しによって河道短絡の発生は上

流から下流へと伝播してゆく。短絡の伝播は短絡後の最大偏角の急減によるものであり、勾配変化の直接的な影響は小さい。

自然河川で迂曲から短絡へと移行する箇所は勾配が急から緩へと急変する地点に集中するといわれている。これは勾配変化部での蛇行のおしつまりによると解釈されるが、上記 (i), (ii) の点を考慮すると、蛇行のおしつまりによる迂曲、短絡への移行は、勾配変化そのものの影響より、むしろ勾配変化地点付近での河岸土質の不均一性および河床の砂礫堆などの影響をも考慮しなければ説明できないようである。

4. 今後の課題と結論

本解析では河床面が平坦であると仮定してきたが、木下⁹⁾、長谷川¹⁰⁾が指摘しているように河床に形成される交互砂州は蛇行の発生に強い影響を及ぼすことが知られている。今後は、蛇行の発達、前進が交互砂州によってどのように影響されるかを明らかにするつもりである。また、浸食係数 κ の量的な把握が十分なされていないため、これについて検討する必要がある。

最後に、本解析から得られた主要な結論を列挙する。

(1) 蛇行の発達、前進には蛇行形状と側岸浸食速度の間の位相差が重要な役割を果たす。側岸浸食速度の位相遅れが $-\pi/2 \sim \pi/2$ rad のとき蛇行は発達し、 $0 \sim \pi$ rad のとき蛇行は下流に移動する。位相遅れは蛇行波長が長いほど小さくなり、極端に波長が長いとき位相遅れは負となる。このとき蛇行は上流に移動する。

(2) 蛇行が発達するに従って、その発達速度、前進速度は小さくなる。発達に伴って河床勾配が非常に小さくなり側岸流速が限界流速に達する場合を除いては、発達速度はゼロにならないため、最終的には迂曲、短絡にまで至る。

(3) 理論的に得られた卓越蛇行波長 D_P は実測の蛇行波長をほぼ説明する。自然河川での流量と蛇行波長、川幅と蛇行波長の経験的な関係を示す Regime 理論を D_P を用いて検討した結果、実測の $D \sim Q$, $D \sim B$ の関係をほぼ説明する。

(4) 河床勾配が緩やかに変化する河川においては、蛇行の最大偏角が小さいうちは前進速度の差による蛇行のおしつまりが生じるが、最終的には蛇行波長はその地点の勾配で決定される卓越蛇行波長にほぼ落ち着き、勾配の変化が迂曲、短絡への移行を促進する主たる原因とはなりにくい。

謝辞：研究を進めるにあたり、埼玉大学建設基礎工学科の池田駿介先生、北海道大学土木工学科の長谷川和義先生には研究成果および文献の提供をいただいた。記して謝意を表します。なお、本研究の一部は文部省科学研究費、自然災害特別研究（扇状地における洪水、土砂災害の発生とその防止軽減に関する研究、研究代表者：京大防災研、芦田和男教授）の一部として行ったものである。

参考文献

- 1) 池田駿介・日野幹雄・吉川秀夫：河川の自由蛇行に関する理論的研究，土木学会論文報告集，第255号，1976年11月。
- 2) 長谷川和義・山岡 勲：蛇行流路の発達に及ぼす平面ならびに河床形状の影響（英文），土木学会論文報告集，第296号，1980年4月；河川の機能に関する基礎的研究，北大委託研究報告，1979年3月。
- 3) 池田駿介・Parker, G.・澤井健二：河川の蛇行に関する統一見解，第24回水理講演会論文集，1980年2月。
- 4) Ikeda, S., G. Parker and K. Sawai: Bend Theory of River Meanders, Part 1. Liner Development, J.F.M. (in press).
- 5) Parker, G., K. Sawai and S. Ikeda: Bend Theory of River Meanders, Part 2. Nonlinear Deformation of Finite-Amplitude Bends, J.F.M. (in press).
- 6) Langbein, W.B. and L.B. Leopold: River Meanders—Theory of Minimum Variance, U.S. Geological Survey Prof. Paper 422 H, 1966.
- 7) Engelund, F.: Flow and Bed Topography in Channel Bends, Jour. of Hy. Div. HY 11, ASCE, Nov. 1974.
- 8) 数学ハンドブック編集委員会：理工学のための数学ハンドブック，丸善，1978年。
- 9) 木下良作：石狩川河道変遷調査，科学技術庁資源局資料，No. 36, 1961年11月。
- 10) Schumm, S.A.: River Metamorphosis, Jour. of Hy. Div. HY 1, ASCE, Jan. 1969.
- 11) Chitale, S.V.: River Channel Patterns, Jour. of Hy. Div. HY 1, ASCE, Jan. 1970.
- 12) Leopold, L.B. and M.G. Wolman: River Channel Patterns: Braided, Meandering and Straight, U.S. Geological Survey Prof. Paper, 282 B, 1957.
- 13) Leopold, L.B. and W.B. Langbein: River Meanders, Scientific American, Jun. 1966.
- 14) 芦田和男・奈良井修二：河床形態の変動特性に関する研究—その統計的構造について—，京大防災研究所年報，第12号B，1969年3月。
- 15) 吉川秀夫：河川工学，朝倉書店，1976年。
- 16) Ikeda, S.: Self-Formed Straight Channels in Sandy Beds, Jour. of Hy. Div. HY 4, ASCE, Apr. 1981.
- 17) 建設省河川局治水課・建設省土木研究所：蛇行に関する研究，第32回建設省技術研究会，1979年10月。
- 18) 福岡捷二：移動床流れの河床波と流路形態，水工学シリーズ 81-A-5，土木学会水理委員会，1981.7.

(1981.9.24・受付)