

## 走行車両による斜スラブの動力学的性状について

DYNAMIC BEHAVIOR OF SKEW SLABS UNDER THE  
ACTION OF MOVING VEHICLE

水澤 富作\*・梶田 建夫\*\*・成岡 昌夫\*\*\*

By Tomisaku MIZUSAWA, Tateo KAJITA and Masao NARUOKA

## 1. まえがき

走行車両によるスラブの動的挙動に関する研究<sup>1)</sup>は古くから行われ、特に長方形スラブを中心に、厳密解法、有限要素法を用いた解析がされている。一方、地理的、空間的制約により斜め支持されるスラブ橋が多くあるが、この種のスラブの動的応答についてはそれほど研究されていない。斜スラブの力学特性は、斜交構造特性により長方形スラブとはかなり異なった変形挙動を示すものと思われる。したがって、斜スラブの合理的な設計を行うために走行車両による応答性状の解明が必要であると考えられる。

Srinivasan と Munaswamy<sup>2),3)</sup>らは、走行車両の質量効果を見捨てた走行外力による斜スラブおよび補剛斜スラブの動的応答について、有限帯板法を用いて解析している。また著者<sup>4)</sup>らは、走行外力を受ける弾性的に点支持された斜スラブの動的性状を有限要素法を用いて検討している。これらの研究では、走行車両の動的効果を見捨てた走行外力モデルを用いて解析されているが、斜スラブ橋は一般に短いスパンのものが多く走行車両の質量効果の影響が無視できないものと思われる。

本文では、走行車両による斜スラブの動的応答を明らかにするために、有限要素法を用いて定式化を行い、斜スラブの動たわみ性状に与える速度パラメーター、斜角、スラブに対する走行車両の質量比および振動数比の影響について検討を行った。走行車両-斜スラブ系の連成運動方程式は、Newmark の  $\beta$  法により逐次積分し、スラブの応答を求めた。

## 2. 解析手法

本文では、次の解析仮定のもとに走行車両-斜スラブ系の運動方程式を定式化する。

(a) 斜スラブは、直交異方性板として理想化し、有限要素法を用いて離散化する。また、スラブ表面は滑らかであると仮定する。

(b) 走行車両モデルとして、(i) 走行車両の質量効果を無視した走行外力モデル、(ii) 質量のみを考慮した走行質量モデル、および、(iii) ばねで支えられた上質量、下質量より成る1自由度系モデルを想定する。

## (1) 用いた要素

斜板の離散化要素として、種々の三角形要素、アイソパラメトリック要素とともに、平行四辺形要素が広く用いられている。

本文では次式で示すように変位関数として16の項をもつ多項式を用いた適合平行四辺形要素を用いた。

$$W = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 + a_{13}x^2y^2 + a_{14}x^3y^2 + a_{15}x^2y^3 + a_{16}x^3y^3 \\ = [N]\{a\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $[N] = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3 \ x^2y^2 \ x^3y^2 \ x^2y^3 \ x^3y^3]$ 、 $\{a\}^T = [a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} a_{16}]$  である。

## (2) 単一走行車両による斜スラブの運動方程式

Fig. 1 に示す単一走行車両 (Sprung-Unsprung Mass) が作用する斜スラブの運動方程式は、Lagrange の運動方程式より容易に導くことができ、これをマトリックス表示すると次の2つの連成方程式で表わされる。

すなわち、斜スラブの運動方程式は、

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \dots\dots\dots (2)$$

\* 正会員 工修 大同工業大学講師 建設工学科  
\*\* 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学科  
\*\*\* 正会員 工博 摂南大学教授 工学部土木工学科

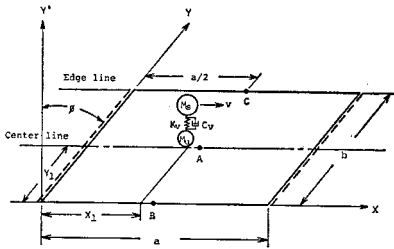


Fig. 1 Idealized moving vehicle and skew slab.

走行車両系の運動方程式は、

$$M_s \ddot{z} + c_v \dot{z} + k_v z = k_v W + c_v \dot{W} \dots \dots \dots (3)$$

で与えられる。ここで、 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$  はそれぞれ斜スラブの質量マトリックス、減衰マトリックスおよび剛性マトリックスを示し、また  $M_s$ 、 $c_v$ 、 $k_v$  は走行車両系の上質量、減衰定数およびばね定数である。 $\{q\}$ 、 $\{\dot{q}\}$  はそれぞれ一般化座標での斜スラブの加速度ベクトル、速度ベクトルと変位ベクトルを、 $W$ 、 $\dot{W}$  は鉛直方向の変位および速度を示す。 $z$  は上質量の鉛直変位である。外力ベクトル  $\{Q\}$  は、次式で与えられる。

$$\{Q\} = \sum_{i=1}^J \iint [T^{-1}]^T [N(x, y)]^T \{R_z(t)\} \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) dx dy \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 $[T^{-1}]$  は座標変換マトリックスであり、 $\delta(x-x_i)\delta(y-y_i)$  は Dirac-Delta 関数を、 $x_i$ 、 $y_i$  は時刻  $t$  での走行位置を示し、また  $J$  は要素数である。 $R_z$  は下質量とスラブとの接触点での反力であり、次式で定義される。

$$R_z(t) = (M_s + M_u)g - M_u \ddot{W} + k_v(z - W) + c_v(\dot{z} - \dot{W}) \dots \dots \dots (5)$$

ただし、 $M_u$  は下質量、 $g$  は重力加速度、また  $\cdot$  は時間に関する導関数を示す。

次に、走行車両が走行中パウンドしないものと仮定すると、時刻  $t$  でのスラブの鉛直方向の加速度  $\ddot{W}$  および速度  $\dot{W}$  は次式で示される。ただし、 $x$  方向に定速度  $v$  (m/s) で走行するものとする。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{W} &= \partial^2 W / \partial t^2 + 2v(\partial W / \partial x)(\partial W / \partial t) \\ &\quad + v^2(\partial^2 W / \partial x^2) \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

$$\dot{W} = v(\partial W / \partial x) + (\partial W / \partial t)$$

式 (6)、(5) を式 (4) に代入すると、

$$\{Q\} = \sum_{i=1}^J \{ (M_s + M_u)g [T^{-1}]^T [N]^T + k_v z [T^{-1}]^T [N]^T + c_v \dot{z} [T^{-1}]^T [N]^T - ([\bar{M}]\{q\} + [\bar{D}]\{\dot{q}\} + [\bar{K}]\{q\}) \} \dots (7)$$

となる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} [\bar{M}] &= \sum \{ M_u [T^{-1}]^T [N]^T [N] [T^{-1}] \}_{x=x_1, y=y_1} \\ [\bar{D}] &= \sum \{ 2v M_u [T^{-1}]^T [N]^T [N, x] [T^{-1}] \\ &\quad + c_v [T^{-1}]^T [N]^T [N] [T^{-1}] \}_{x=x_1, y=y_1} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} [\bar{K}] &= \sum \{ v^2 M_u [T^{-1}]^T [N]^T [N, xx] [T^{-1}] \\ &\quad + v c_v [T^{-1}]^T [N]^T [N, x] [T^{-1}] \\ &\quad + k_v [T^{-1}]^T [N]^T [N] [T^{-1}] \}_{x=x_1, y=y_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

である。また、 $x_1 = x_0 + vt$ 、 $y_1 = y_0$  であり、 $x_0$ 、 $y_0$  は走行車両の初期位置を示す。ただし、 $[N, x] = \partial[N] / \partial x$ 、 $[N, xx] = \partial^2[N] / \partial x^2$  である。

式 (2)、(3) で示される走行車両-斜スラブ系の連成運動方程式は Newmark の  $\beta$  法により逐次積分する。

斜スラブの動的応答は、動たわみに関する動的増幅率 (DAF) で表示される。この DAF は次式で定義される。すなわち、スパン中央断面の任意の点 ( $a/2, y$ ) では、

$$DAF = W_D(a/2, y) / W_S(a/2, y) \dots \dots \dots (9)$$

である。ここで、 $W_D(a/2, y)$ 、 $W_S(a/2, y)$  はそれぞれスパン中央断面での点 ( $a/2, y$ ) の動たわみ、静たわみを示す。

### 3. 数値計算例および考察

2. で定式化した解析手法を用いて、種々の走行車両モデルが作用する等方性斜スラブの動的応答解析を行った。Newmark の  $\beta$  法 ( $\beta = 1/6$ ) による解の安定性、精度は、一般に要素分割数と時間ステップに影響されるが、ここでは、種々の数値実験の結果より、要素分割は  $6 \times 6$  とし、また時間ステップは  $\Delta t = T_f \cdot \alpha / 250$  を用いれば十分であることがわかった。ただし、 $T_f$  は斜スラブの固有周期を、また  $\alpha$  は速度パラメーターを示す。

Table 1 に、有限要素法により解析した斜スラブの固有振動パラメーター  $\mu_1$  を示した。

解析パラメーターとして、次のものを用いる。(1) 速度パラメーター ( $\alpha = v \cdot T_f / 2a$ )。ここで、 $a$  はスパンである。(2) 斜角 ( $\phi$ )。 (3) 辺長比 ( $\lambda = a/b$ )。ここで、 $b$  は幅員である。(4) 質量比 ( $\beta = M_v / M_p$ )。ここで、 $M_v = M_u + M_s$ 、 $M_p = \rho ab$ 、 $\rho$  はスラブの密度である。(5) 振動数比 ( $r = n_0 / \omega_1$ )。ここで、 $n_0$  は走行車両系の固有振動数、また  $\omega_1$  は斜スラブの固有振動数である。(6) 走行位置 ( $\bar{y}_1 = y_0/b$ )。ここでは、センターライン走行 ( $\bar{y}_1 = 1/2$ ) と縁走行 ( $\bar{y}_1 = 1$ ) の 2 つの場合を考え

Table 1 Fundamental frequency parameters,  $\mu_1 = a^2 \omega_1 \sqrt{\rho h / D}$  of skew slab calculated by FEM with mesh divisions  $6 \times 6$ .

Skew angle $\phi$	aspect ratio, $a/b$			
	0.75	1.0	1.25	1.50
0°	9.682	9.632	9.592	9.561
30°	12.36	12.14	12.01	11.96
45°	16.93	16.51	16.05	15.67

る。

解析においてスラブおよび走行車両の減衰効果は考えないものとし、また車両のばねの初期変形  $z_0$  は 0 とした。

(1) 種々の走行車両モデルによる単純斜スラブの動力学的性状

a) 走行外力 (Moving Force) が作用する場合

Fig. 2 (a), (b) は、それぞれセンターライン走行および縁走行による斜スラブ ( $\lambda=1.0$ ,  $\nu=0.15$ ) のスパン中央断面での DAF 値に与える速度パラメーター,  $\alpha$  と斜角,  $\phi$  の影響について示した。

これにより、斜スラブのスパン中央断面での DAF 性状は、走行車両の走行方向、走行位置、速度パラメーターおよび斜角により複雑な挙動を示す。センターライン走行する場合、中央断面の点 A での DAF は、斜角の増大とともに減少するのに対して、自由辺上の点 B, C での値は、速度パラメーターと斜角により大きな影響がみられる。一方、縁走行では、常に自由辺の点 C で DAF の最大値が生じ、また斜角の増大とともに DAF 値が大きくなる。

Fig. 3 は、センターライン走行による斜スラブのスパン中央断面の点 A での DAF に与える辺長比,  $\lambda$  の影響について示した。これより、速度パラメーターに関係なく、辺長比を大きくすると DAF 値の増大する傾向がみられる。速度パラメーターが 0.5 以下においては、辺長比に関係なく、斜角が入るとこの DAF は長方形スラブ ( $\phi=0^\circ$ ) よりも小さい値となる。

b) 走行質量 (Moving Mass) が作用する場合

ここでは、斜スラブの動的応答に与える走行車両の質

Table 2 The effects of mass ratio,  $\beta$  on DAF of skew slabs under a moving mass along the center line;  $\lambda=1.0$  and  $\nu=0.15$ .

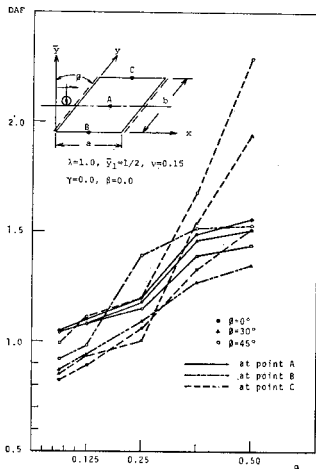
Speed parameter $\alpha$	Mass ratio $\beta$	Skew angle, $\phi$					
		0°			45°		
		B	A	C	B	A	C
0.125	0.0	0.890	1.10	0.890	0.981	1.08	1.11
	0.25	0.919	1.13	0.919	0.979	1.14	0.989
	0.50	0.911	1.13	0.911	0.982	1.11	0.990
	1.00	0.885	1.08	0.885	1.02	1.04	1.03
	1.50	0.867	1.05	0.867	1.04	1.14	0.982
0.250	0.0	1.06	1.20	1.06	1.39	1.15	1.20
	0.25	1.09	1.31	1.09	1.29	1.36	1.07
	0.50	1.15	1.40 (1.42)	1.15	1.17	1.49	1.35
	1.00	1.29	1.53 (1.58)	1.29	1.04	1.62	2.04
	1.50	1.44	1.63	1.44	0.976	1.67	2.64

( ) is the result obtained by the beam theory

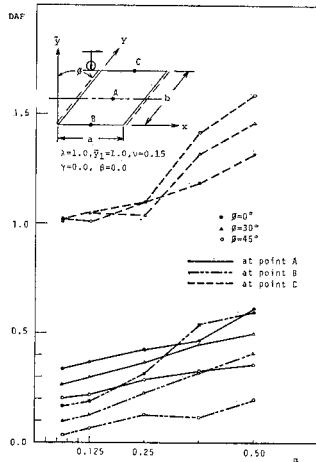
量効果について検討した。

Table 2 では、センターライン走行による斜スラブ ( $\lambda=1.0$ ,  $\bar{y}_1=1/2$ ) の動たわみ性状に与える質量比  $\beta$  の影響について表示した。ここで、斜角は  $0^\circ$  と  $45^\circ$  の場合を考え、また質量比は 0 から 1.5 までを想定した。

これより、低速走行 ( $\alpha=0.125$ ) する場合は、斜角に関係なく、DAF に与える質量比の影響は小さいが、速度パラメーターを大きくすると ( $\alpha=0.25$ )、質量比の影響が顕著にみられる。スパン中央断面の点 A に関する DAF に与える質量比の影響は、車両の質量慣性を無視した走行外力モデルによる結果と異なり、質量比が 0.2 以上になると斜角の影響が大きくなり、また質量比の増大とともに DAF 値も大きく生じている。特に、C 点では、質量比の増大とともにかなり大きな DAF 値が示される。これは、走行速度の増大に伴う車両の質量慣性の効果と斜スラブの曲げとねじりの連成挙動によるものと思われる。



(a)



(b)

Fig. 2 Variation of DAF at the mid-span for different skew angles,  $\phi$  and speed parameters,  $\alpha$  subjected to moving force model.

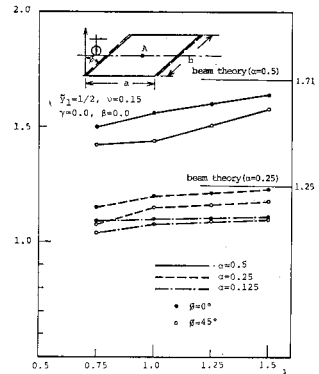


Fig. 3 The effect of aspect ratio,  $\lambda$  on the DAF at point A of mid-span subjected to moving force model.

c) ばねで支えられた上、下質量から成る 1 自由度系走行車両 (Sprung-Unsprung Mass) が作用する場合走行車両としてばね上質量  $M_s$ 、ばね下質量  $M_u$  とばね  $k_v$  より成る車両モデルを受ける斜スラブの応答性状について検討した。ここで、ばね定数  $k_v$  は走行車両とスラブとの振動数比  $r$  より決定される。すなわち、 $r = n_0/\omega_1$  より車両のばね定数は、 $k_v = r^2 \mu_1^2 \beta_1 (Db/a^2)$  で与えられる。ここで、 $\beta_1 = M_s/M_p$ 、 $\mu_1$  は斜スラブの固有振動パラメーターであり、 $\mu_1 = a^2 \omega_1 \sqrt{\rho h/D}$  で与えられる。ただし、 $D$  はスラブの曲げ剛性を、また  $h$  はスラブ厚を示す。

**Table 3** は、センターライン走行での斜スラブ ( $\lambda = 1.0$ ,  $\bar{y}_1 = 1/2$ ) の動たわみ性状に与える振動数比の影響について表示した。ただし、 $\beta_1 = M_s/M_p = 5/12$ 、 $\beta_2 = M_u/M_p = 1/12$  と仮定した。これより、DAF に与える振動数比の影響は、走行速度に関係し、高速走行になるとその影響は斜角の増大とともに大きく生じる。また、この結果を同じ質量比 ( $\beta = 0.5$ ) をもつ走行質量モデルによる値と比較すると、走行ライン上の点 A では小さな DAF 値が示されているが、走行ライン以外では大きな値が示されている。

次に、3 種の走行車両モデルによる斜スラブの動的性状を比較検討すると、 $\alpha$  が 0.125 以下では、走行車両モデルによって DAF 値に大きな差異は生じなかった。しかし、速度パラメーターを 0.2 以上にすると、走行車両モデルによってかなり異なった応答性状がみられた。特に、走行車両の質量効果の影響が大きく生じ、斜角の増大に伴い DAF が大きく生じてくる。これは、走行車両

**Table 3** The effects of frequency ratio,  $r$  on DAF of skew slabs under the action of sprung-unsprung mass along the center line;  $a/b = 1.0$ ,  $\nu = 0.15$  and  $\beta_2/\beta_1 = 0.20$ .

Speed parameter $\alpha$	Frequency ratio $r$	Skew angle, $\phi$					
		0°			45°		
		B	A	C	B	A	C
0.125	0.25	0.922	1.11	0.922	0.951	1.11	1.16
	0.50	0.962	1.15	0.962	1.06	1.15	1.08
	0.75	0.883	1.05	0.883	1.16	1.00	1.08
	Moving force	0.890	1.10	0.890	0.981	1.08	1.11
	Moving mass*	0.911	1.13	0.911	0.982	1.11	0.990
0.250	0.25	0.999	1.18	0.999	1.29	1.12	1.27
	0.50	1.00	1.09	1.00	1.16	1.12	1.76
	0.75	1.18	1.33	1.18	1.04	1.42	1.65
	Moving force	1.06	1.20	1.06	1.39	1.15	1.20
	Moving mass*	1.15	1.40	1.15	1.17	1.49	1.35

\* Mass ratio  $\beta = 0.50$  is used in the computations.

の質量と斜スラブの連成の効果によるものと思われる。また、走行ライン上では、他の 2 つのモデルと比較して走行質量モデルによる値が一番大きくなっている。

斜スラブの動たわみ性状に与える斜角の影響は、主として速度パラメーターに関係し、このパラメーターが増大すると、斜スラブ特有の曲げとねじりの連成作用により、自由辺の C 点ではかなり大きな DAF 値が生じている。

#### 4. あとがき

本文では、種々の走行車両モデルによる斜スラブの動的応答について、有限要素法と Newmark の  $\beta$  法を用いて定式化し、確定論手法に基づきパラメトリック解析を行った。この結果、斜スラブの動たわみ性状は、斜交構造特性により長方形スラブとは異なった挙動を示すことが明らかになった。おもな項目を列記すれば、次のことが明らかにできたと思われる。

(1) 斜スラブの動たわみ性状は、主として速度パラメーターに関係し、このパラメーターが増大すると、斜角および車両の質量効果の影響が顕著に生じてくる。

(2) 速度パラメーターの実用値は一般に 0.25 以下であるが、このパラメーターが 0.2 ぐらになると走行車両の質量効果の影響が無視できなくなる。特に、質量効果の影響を無視した走行外力モデルによる結果と比較して、この影響を考慮した車両モデルでは斜角の増大とともに DAF 値が大きく生じてくる傾向がみられる。

(3) しかし、速度パラメーターが 0.125 以下であれば、斜スラブの動的応答に与える車両の質量効果、斜角の影響が小さくなり、また走行車両モデルによる差異が小さなものとなる。

今後、実橋の振動測定をふまえて、合理的な斜スラブ橋、斜桁橋の衝撃係数の問題および局所的な反力性状について検討していきたい。なお、数値計算は、名古屋大学大型計算センター FACOM M-200 を用いて行った。

#### 参考文献

- Huang, T.: Vibration of bridges, Shock and Vibration Digest, Vol. 8, No. 3, pp. 601~620, 1976.
- Srinivasan, R.S. and K. Munaswamy: Dynamic response of skew bridge decks, Earthquake Eng. Struct. Dynamics, Vol. 6, pp. 139~156, 1978.
- Srinivasan, R.S. and K. Munaswamy: Dynamic response analysis of stiffened slab bridges, Compt. & Struct., Vol. 9, pp. 559~566, 1978.
- 水澤富作・梶田建夫: 弾性支承された斜スラブの動力学的性状について、マトリックス構造解析法研究発表論文集, 日本鋼構造協会, pp. 361~366, 1977.

(1981.10.31・受付)