

## 高精度時間積分法に基づく Navier-Stokes 方程式の解法

APPLICATION OF THE HIGH ACCURATE TIME INTEGRATION  
SCHEME TO SOLUTION PROCEDURE OF THE  
NAVIER-STOKES EQUATIONS

吉 田 裕\*・野 村 卓 史\*\*

By Yutaka YOSHIDA and Takashi NOMURA

## 1. はじめに

有限要素法によって非圧縮粘性流体の流れを解く方法は、流速と圧力を変数として Navier-Stokes 方程式そのものを対象とする方法と、流れ関数を変数として導入して連続方程式を満足するように書き改められた方程式を対象とする方法とに大別される。流れ関数のみを変数とする場合には基礎方程式が重調和型の 4 階導関数を含むため、高次の要素を用いた定式化が必要となるので研究例はあまり多くない<sup>1)~4)</sup>。流れ関数で記述された方程式を対象とする場合にはさらに渦度を変数として導入し、2 階の方程式を連立させて解く方法がよく用いられる<sup>5)~7)</sup>。ここで問題となることは、すべりのない境界条件を設定するために境界における渦度の値を決定する手法であり、これによって解の精度、安定性が大きく左右されるとされている<sup>8)</sup>。総じて流れ関数を変数とする手法は、連続方程式を解く必要がないという利点を有するものの、境界条件の設定に関して制約が大きい。

これに対して流速と圧力を変数とする場合は用いる変数の物理的意味が明確であるため、境界条件の設定が直接的で、解析の対象となる流れの場のモデル化が容易であり、3 次元問題を含めより広範な実際問題の解析が可能となる。しかし、構成される非線形有限要素方程式を連続条件式を満たすように解くための決定的な方法が確立されておらず、現状では、解析できる対象は Reynolds 数の相当低い範囲にとどまっている。Navier-Stokes 方程式に対応する変分原理が構成できないため、有限要素法の適用に際しては制約が与えられた変分表式、あるいは重みつき残差法に基づいて定式化されるのが普通である<sup>9), 10)</sup>。解法としては、いったん圧力を消去して流速を求める式と圧力を求める式とを分離し、両者

を連立させて解く<sup>11)</sup>とか、処罰関数によって連続条件式を処理する<sup>12)</sup>というような特別な方法が具体化されているが、一般的には、圧力の補間関数の次数を流速のものと比べて低く与えなければ圧力の解が適正に求まらないということが指摘されている<sup>13)</sup>。

流れ関数によるものを含め、定常問題の非線形有限要素方程式を解く過程では Newton-Raphson 法を用いる場合が多い<sup>14)</sup>。過渡解析の場合には直接積分によって解を求めていくことになるが、非線形方程式を対象とする関係上、陽な積分公式を用いることが多い<sup>9), 11)</sup>。一般的には、積分公式の評価精度があまりよくないこと、対象の非線形性が強いことなどのため、信頼できる解が得られる Reynolds 数の範囲は相当低い範囲にとどまっている。

本論文は、流速と圧力を変数として重みつき残差法に基づいて定式化された通常の有限要素方程式に対し、著者らの提案した高精度な直接時間積分法<sup>15)</sup>を適用して構成した、逐次積分法による非圧縮粘性流体の解析法について報告するものである。ここでは、基本的には流速と圧力がともに要素内で線形に分布する補間関数に基づいて誘導された 3 角形要素を用いているが、圧力および連続条件に対応する係数マトリックスは、基礎的な考察に基づいて修正を加えた独自のものとしている。用いた時間積分公式の外乱の評価精度が高いことをよりどころとして、非線形項および圧力項を外乱項として扱ったうえで、各積分段階で繰返し収束計算を行うことを基本方針としている。運動方程式に積分公式を適用して得られる関係式と連続条件式から、いったん圧力項を消去して流速に関する非線形な逐次積分式を構成する。各積分段階で、まずこれの繰返し計算を行い、連続条件を満足するような流速分布の収束値を求める。次に、得られた流速の値から圧力を求める。このようにして step-by-step に解を求めていく方法である。数値解析例によって、構成した解析法の圧力評価の妥当性、非線形性の強い、高い

\* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科

Reynolds 数の領域における精度，安定性などに関する解法の特性を示す。

### 2. 基礎とする有限要素方程式

以下に示すような Navier-Stokes 方程式 (1) と連続方程式 (2) に支配される非圧縮粘性流体の 2 次元流れの問題を対象とする。

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \mu \nabla^2 u + \frac{\partial p}{\partial x} = b_x \quad \dots\dots\dots (1 \cdot a)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \mu \nabla^2 v + \frac{\partial p}{\partial y} = b_y \quad \dots\dots\dots (1 \cdot b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで  $u, v$  は流速の  $x, y$  成分， $p$  は圧力， $b_x, b_y$  は物体力， $\rho$  は密度， $\mu$  は粘性係数であり， $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  である。

解析の対象とする領域を  $\Omega$  とする。その境界は流速が規定されている境界  $\Gamma_v$  と応力が規定されている境界  $\Gamma_\sigma$  とに分けられる。領域  $\Omega$  に対して有限要素法を適用し，空間に関して離散化された基礎方程式を得る過程では，式 (1), (2) に対応する変分原理が存在しないため，以下に示すような重みつき残差法に基づく定式化が通常よく用いられており，本研究でもこれらに従うものとする。

結果のみ示すことにすると，運動方程式 (1) に対し流速分布を重み関数とし，連続方程式 (2) に対し圧力分布を重み関数とすることにより，式 (3), (4) のような重みつき残差式を得る。

$$\iint_{\Omega} \delta \dot{\epsilon}^T \sigma d\Omega - \iint_{\Omega} \delta v^T (b - \rho c) d\Omega = \int_{\Gamma_\sigma} \delta v^T \bar{\sigma} d\Gamma \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\iint_{\Omega} \delta p (\nabla^T v) d\Omega = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで次の諸関係を用いている。

$$v^T = \langle u \ v \rangle \quad \dots\dots\dots (5 \cdot a)$$

$$b^T = \langle b_x \ b_y \rangle \quad \dots\dots\dots (5 \cdot b)$$

$$c = \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left\{ u \right\} \quad \dots\dots\dots (5 \cdot c)$$

$$\nabla^T = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \quad \dots\dots\dots (5 \cdot d)$$

$$\dot{\epsilon} = Lv \quad \dots\dots\dots (5 \cdot e)$$

$$L^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5 \cdot f)$$

$$\sigma^T = \langle \sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy} \rangle \quad \dots\dots\dots (5 \cdot g)$$

ここに  $\dot{\epsilon}$  はひずみ率， $\sigma$  は応力で，ひずみ率と応力の間には次のような構成関係がある。

$$\sigma + m p = D \dot{\epsilon} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし，

$$m^T = \langle 1 \ 1 \ 0 \rangle \quad \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

$$D = \mu \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

式 (3), (4) において  $\delta v$  は重み関数に相当する流速の関数で， $\Gamma_v$  上で与えられている流速の境界条件を満足するものである。 $\delta \dot{\epsilon}$  は  $\delta v$  に対応するひずみ率の関数， $\delta p$  は重み関数に相当する圧力の関数であり， $\bar{\sigma}$  は  $\Gamma_\sigma$  上で境界条件として与えられている応力である。

式 (3), (4) をもとにして有限要素法を適用する。このとき流速  $v$ ，圧力  $p$  をそれぞれ節点流速  $u$ ，節点圧力  $p$  で表わすと，

$$v = N_u u \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$p = N_p p \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで  $N_u$  は流速に関する補間関数， $N_p$  は圧力に関する補間関数である。式 (3), (4) に式 (8), (9) の関係を適用すると最終的に次のような有限要素方程式 (10), (11) が得られる。

$$M \frac{du}{dt} + \bar{K} u + K u + K_p p = f \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$K_p^T u = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

各係数マトリックスの内容を具体的に示すと，

$$M = \iint_{\Omega} \rho N_u^T N_u d\Omega \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\bar{K} = \iint_{\Omega} \rho N_u^T \{ \nabla (N_u u) \}^T N_u d\Omega \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$K = \iint_{\Omega} B^T D B d\Omega \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$K_p = \iint_{\Omega} B^T m N_p d\Omega \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$f = \iint_{\Omega} N_u^T b d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} N_u^T \bar{\sigma} d\Gamma \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし  $B = L N_u$  である。ここで  $M$  は密度に関するマトリックス， $\bar{K}$  は対流項に関する非線形マトリックス， $K$  は粘性に関するマトリックスである。 $K_p$  は空間に関する勾配を表現するマトリックスで，運動方程式 (10) においては  $K_p p$  によって圧力の勾配を表わし，連続方程式 (11) においては  $K_p^T u$  によって流速の勾配を表わす。

$f$  は物体力および応力の境界条件から得られる節点力のベクトルである。

式 (10), (11) の，流速と圧力を変数とする非線形なマトリックス方程式の解法を構成することが本研究の主眼である。

### 3. 有限要素方程式の修正

式 (3), (4) の重みつき残差式に基づいて得られた基礎方程式 (10), (11) については, 用いる補間関数  $N_u$ ,  $N_p$  の種類のいかんにかかわらず, 運動方程式 (10) の数は節点流速  $u$  の自由度数に等しく, 連続方程式 (11) の数は節点圧力  $p$  の自由度数に等しいという対応関係がある. 一般に, 流速と圧力を変数として得られる有限要素方程式に基づく解法では, 圧力の補間関数  $N_p$  に比べ流速の補間関数  $N_u$  の次数を高くしないと適正な解を得ることができないという指摘がされており, 採用した補間関数の組合せに対して未知変数の数と方程式の数との対応関係を吟味する必要がある.

本研究では, 流速, 圧力とも通常用いられる最も簡単な要素内線形分布の3角形要素によって離散化した. このとき流速の補間関数と圧力の補間関数がカップルするマトリックス  $K_p$  の要素マトリックス  $K_p^e$  は, 次のようになっている.

$$K_p^{eT} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

ここで,  $a_i = x_k - x_j$ ,  $b_i = y_j - y_k$ ,  $(ijk) = (123) (231) (312)$ ,  $(x_i, y_i)$  は3角形要素の各節点の座標である. マトリックスの並びの順は, 行が  $u^{eT} = \langle u_1 \ u_2 \ u_3 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \rangle$ , 列が  $p^{eT} = \langle p_1 \ p_2 \ p_3 \rangle$  に対応している.

式 (17) のマトリックスは, 同じ内容の行が3本並んだ形である. したがって1つの要素について連続方程式をたてると,

$$K_p^{eT} u^e = 0 \dots\dots\dots (18)$$

となるが, 式 (18) は見かけ上方程式の数は3であるものの独立な関係式は実は1つしかない. すなわち, 空間の勾配に関する評価が要素につき1つの評価だけされている. この要素マトリックスを用いて系全体に対する連続方程式 (11) をたてると, 方程式の数は節点数に等しいが独立な関係は系を構成する要素の数しかない, という結果になる. これに対して, 圧力の変数は各節点に導入されているため, 圧力変数の数と連続方程式の中の独立な関係式とはうまく対応しておらず, 式 (17) のマトリックスを用いた方程式は解ける形になっていないことがわかる.

そこで本研究では, 式 (17) でなされている勾配評価が要素中心での評価となるように, マトリックス  $K_p^e$  を次のように改めて導入する.

$$K_p^{eT} = -\frac{1}{2} \langle b_1 \ b_2 \ b_3 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \rangle \dots\dots\dots (19)$$

またこれと対応して, 圧力変数を節点変数ではなく, 要

素中心の変数として導入する. これらの修正によって, 圧力勾配は要素中心で評価され, 連続方程式も要素中心においてたてられることになる. 修正されたマトリックス  $K_p^e$  を用いて全体系 (10), (11) を構成すると, 圧力変数の数および連続方程式の数ともに系を構成する要素の数に等しく, 両者の対応関係が実質的にも成立することになる.

なお, 基礎方程式 (10), (11) 中の流速ベクトル  $u$  は境界条件として与えられている成分をも含んだベクトルである. 通常の解法では, 流速既知の項に関して縮約を行った方程式を基礎方程式とすることが普通であるが, 本研究ではあえて縮約をせずに解法を構成した. 縮約をしない理由, 縮約せずに解法が構成できる理由は, 用いた時間積分法の本質に由来するところで, これについては後に述べる.

### 4. 直接時間積分公式<sup>15)</sup>

基礎とする修正された方程式 (10), (11) に対して直接時間積分法を適用し, step-by-step に解を求めるための関係式を導くことにする. 構成された解法の特性は, したがって, 用いる積分法の特性に依存することになる. 対象とする方程式 (10), (11) が非線形な方程式であるから, 積分に伴って蓄積される誤差が解の信頼性に大きく影響し, 安定して解き得る範囲が制約される. たとえ計算時間, 記憶容量を相当多く要するとしても, 精度について非常によい積分公式を用い, このことによって解法の適用範囲が従来以上に拡張し得るのであれば, 解法の実存意義は十分あると考える. その意味で, 本研究では著者らが提案した高精度な直接積分公式を用いるものである.

公式の定式過程および特性についてはすでに発表済みである<sup>15)</sup>ので, ここでは後の展開で使用するマトリックス等の具体的な内容を明確にするために必要なことのみを示す. 用いる積分公式が対象とする問題は, 式 (20) で表わされる, 時間に関する1階の連立常微分方程式の初期値問題である.

$$\alpha \frac{dx}{dt} + \beta x = \bar{f} \dots\dots\dots (20)$$

ここに,  $x$  は未知変数のベクトル,  $\bar{f}$  は外乱のベクトルで時間方向の分布が既知の量である. 係数マトリックス  $\alpha$  は対称 ( $\alpha^T = \alpha$ ) であるが,  $\beta$  は非対称でもかまわない.

1ステップの積分時間間隔  $\Delta t$  を, 時間長さの等しい  $m$  個の時間領域に分割し, 時間方向に有限要素技法を適用することにより, 次式 (21) に示すような時刻  $t_i$  から  $t_{i+1} (= t_i + \Delta t)$  への積分漸化式が導かれる.

$$[k_{11}H_m + k_{12}H_{m-1}](-\alpha x_{i+1} + f_{i+1,i}) = \alpha x_i + f_{i,i+1} \dots\dots\dots(21)$$

ここで  $x_i$  は時刻  $t_i$  における変数  $x$  の値である。係数マトリックスの具体的な内容は以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= \frac{1}{3}\beta\alpha^{-1}\beta^T t_m + \frac{1}{2}(\beta^T + \beta) + \alpha \frac{1}{t_m} \\ k_{12} &= \frac{1}{6}\beta\alpha^{-1}\beta^T t_m + \frac{1}{2}(\beta^T - \beta) - \alpha \frac{1}{t_m} \\ k_{21} &= k_{12}^T \\ k_{22} &= \frac{1}{3}\beta\alpha^{-1}\beta^T t_m - \frac{1}{2}(\beta^T + \beta) + \alpha \frac{1}{t_m} \end{aligned} \right\} \dots\dots(22)$$

ただし、 $t_m = \Delta t/m$  である。また、マトリックス  $H_j$  は次のような過程によって作成されるものである。

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= 0 \\ H_1 &= k_{21}^{-1} \\ \vdots & \\ H_j &= -k_{21}^{-1}(k_{11} + k_{22})H_{j-1} - k_{21}^{-1}k_{12}H_{j-2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

$f_{i,i+1}$ ,  $f_{i+1,i}$  は、それぞれ時刻  $t_i$ ,  $t_{i+1}$  における等価外乱のベクトルで、積分時間領域  $t_i < t < t_{i+1}$  内に分布する外乱を、これと等価につり合うよう始端  $t_i$  および終端  $t_{i+1}$  に振り分けることにより作成される。いま、積分時間領域内の外乱分布が、両端における外乱の値  $\bar{f}_i$  と  $\bar{f}_{i+1}$  との間で直線変化するものと仮定すると、等価外乱ベクトルは次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} f_{i,i+1} &= t_m \left( \frac{1}{2}\bar{f}_i + \frac{1}{6m}\Delta\bar{f} \right) \\ &\quad - t_m \left( k_{11} \sum_{j=1}^{m-1} H_j + k_{12} \sum_{j=1}^{m-1} H_{j-1} \right) \bar{f}_i \\ &\quad - t_m \left( k_{11} \sum_{j=1}^{m-1} jH_j + k_{12} \sum_{j=1}^{m-1} jH_{j-1} \right) \frac{\Delta\bar{f}}{m} \\ f_{i+1,i} &= t_m \left( \frac{1}{2}\bar{f}_i + \frac{3m-1}{6m}\Delta\bar{f} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

ここで  $\Delta\bar{f} = \bar{f}_{i+1} - \bar{f}_i$  である。

積分公式 (21) および等価外乱ベクトル (24) に含まれる諸係数マトリックスの作成には、計算時間・記憶容量とも相当かかるものであるが、 $\alpha$ ,  $\beta$  が定数係数マトリックスであって、積分間隔  $\Delta t$  が変わることのない限り、積分計算の過程では 1 回作成するだけでよい。

### 5. 漸化方程式への変換

時間積分公式 (21) を適用するために運動方程式 (10) を式 (20) の形に記すことにすると、次式 (25) のように、圧力項  $K_p p$  を移項して節点力ベクトル  $f$  と合わせて外乱項に含める形が考えられる。

$$M \frac{du}{dt} + (K + \bar{K})u = f - K_p p \dots\dots\dots(25)$$

式 (25) に積分公式を適用することにより、1 つの時

間ステップに関する漸化方程式が導かれる。しかし式 (25) の形では式 (20) の  $\beta$  に相当するマトリックス ( $K + \bar{K}$ ) の中に非線形マトリックス  $\bar{K}$  が含まれるため、流速  $u$  の値が変わるたびにこれを評価し直し積分公式を作成し直さなければならず、これに要する計算時間が膨大になる。

そこで、解法の基礎とする方程式を次式 (26) のように設定する。

$$M \frac{du}{dt} + Ku = f - K_p p - \bar{K}u \equiv r \dots\dots\dots(26)$$

ベクトル  $r$  は、節点力ベクトル  $f$  と圧力項  $K_p p$  に、さらに非線形項  $\bar{K}u$  を加えて構成した外乱項に相当するベクトルである。

粘性に関するマトリックス  $K$  は定数係数のマトリックスであるから、式 (26) によれば積分間隔  $\Delta t$  を変えない限り積分公式を作成する過程は 1 回ですむ。 $K$  と  $\bar{K}$  とは物理的意味が異なるマトリックスであるから、これを分離して扱うこと自体には問題がない。用いた積分公式では外乱項の積分についての評価も高精度に行われ、かつ式 (20) の左辺に関する積分作用素の評価精度との相対的な対比も明確であるから、式 (26) のように非線形項  $\bar{K}u$  を外乱項に含めた扱いが可能である。

3. の最後に述べたように、式 (26) のベクトル  $u$ ,  $f$  は流速の境界条件から区別される既知の成分と未知の成分とを両方ともに含んでいる。境界条件から既知となる節点流速を  $\bar{u}_n$ 、未知流速を  $u_1$  とすると、系全体の節点流速  $u$  は、

$$u^T = \langle u_1^T \bar{u}_n^T \rangle \dots\dots\dots(27)$$

のように区別され、これと対応して節点力ベクトル  $f$  も、既知の項  $\bar{f}_1$  と未知反力に相当する項  $f_n$  とに分けられる。

$$f^T = \langle \bar{f}_1^T f_n^T \rangle \dots\dots\dots(28)$$

系全体を対象とした式 (26) においては粘性に関するマトリックス  $K$  が特異マトリックスであるから、通常の積分公式では既知流速成分  $\bar{u}_n$  に関する項を右辺に移項し、外乱項として扱うことにより方程式を縮約し、自由度数を  $u_1$ ,  $\bar{f}_1$  に相当する数に減らすことが必要である。しかしここで用いる積分公式では、解かれるべき係数マトリックスは式 (21) の  $k_{11}H_m + k_{12}H_{m-1}$  である。このマトリックスは式 (22) に示すように密度に関するマトリックス  $M$  (式 (22) では  $\alpha$ ) を含んでいる。 $M$  は系全体を対象とした場合でも正則なマトリックスであるから、 $k_{11}H_m + k_{12}H_{m-1}$  も特異にはならず、縮約をしなくても解 ( $u_1$ ,  $f_n$ ) を求めることができる。縮約をしないとき、連続方程式は式 (11) のように右辺がゼロという形で表現されるから、後に示すように解法の展開が

簡潔に行える。この利点はそのまます実際のプログラムにも有効に反映し、プログラムの簡潔な作成が可能である。

式 (26) に積分公式 (21) を適用すると、次式 (29) のような時刻  $t_i$  から  $t_{i+1}$  への関係式が得られる。

$$H \cdot [-Mu_{i+1} + r_{i+1,i}] = Mu_i + r_{i,i+1} \dots (29)$$

ここで、

$$H = k_{11}H_m + k_{12}H_{m-1} \dots (30)$$

である。

$r_{i,i+1}$ ,  $r_{i+1,i}$  は、それぞれ時刻  $t_i$ ,  $t_{i+1}$  において等価外乱として評価されるベクトルである。時刻  $t_i$  におけるベクトル  $r$  の値を  $r_i$  とすると、 $r_i$  の具体的な内容は次のようである。

$$r_i = f_i - K_p p_i - \bar{K}_i u_i \dots (31)$$

ここで  $\bar{K}_i = \bar{K}(u_i)$  は時刻  $t_i$  における流速  $u_i$  の値によって作成されるマトリックスであり、 $f_i$ ,  $p_i$  はそれぞれ時刻  $t_i$  における節点力および圧力のベクトルである。時刻  $t_i$  における値  $r_i$  と時刻  $t_{i+1}$  における値  $r_{i+1}$  の間でこれらの諸量が直線的に変化するものと仮定すると、積分間隔内の  $r$  の分布と等価な両端に集中された値  $r_{i,i+1}$ ,  $r_{i+1,i}$  が式 (24) に従って与えられる (Fig. 1 参照)。1 つの積分ステップにおいて、 $u_i$ ,  $r_i$  は既知、 $u_{i+1}$ ,  $r_{i+1}$  は未知である。式 (29) は既知項と未知項が混在しているから式 (24) を用いてこれを整理すると次式 (32) を得る。

$$HMu_{i+1} - H_{II}(f_{i+1} - K_p p_{i+1} - \bar{K}_{i+1} u_{i+1})$$

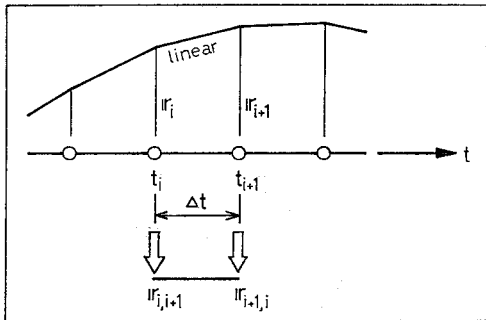
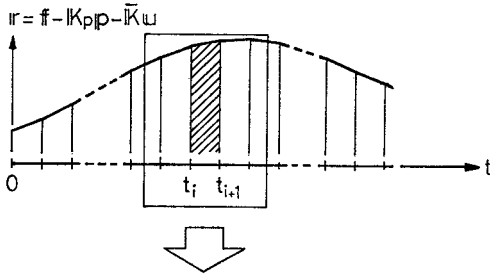


Fig. 1 Idealization of the Time-varying Forcing Term  $r$  and Equivalent Nodal Loadings  $r_{i,i+1}$  and  $r_{i+1,i}$ .

$$= -Mu_i + H_I(f_i - K_p p_i - \bar{K}_i u_i) \dots (32)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} H_I &= \frac{t_m}{6} \left[ \left( \frac{1}{m} \right) H - \left( \frac{3m-1}{m} \right) I \right. \\ &\quad \left. + 6 \left\{ k_{11} \sum_{j=1}^{m-1} H_j + k_{12} \sum_{j=1}^{m-1} H_{j-1} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6}{m} \left\{ k_{11} \sum_{j=1}^{m-1} j H_j + k_{12} \sum_{j=1}^{m-1} j H_{j-1} \right\} \right] \\ H_{II} &= \frac{t_m}{6} \left[ \left( \frac{3m-1}{m} \right) H - \left( \frac{1}{m} \right) I \right. \\ &\quad \left. + \frac{6}{m} \left\{ k_{11} \sum_{j=1}^{m-1} j H_j + k_{12} \sum_{j=1}^{m-1} j H_{j-1} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

$I$  は単位マトリックスである。式 (32) の右辺は積分ステップの始端における既知の値のみから成っており、そのステップの計算過程では不変であるから、これをまとめて  $\bar{q}_i$  と表わす。すなわち、

$$\bar{q}_i = -Mu_i + H_I(f_i - K_p p_i - \bar{K}_i u_i) \dots (34)$$

これを用いて式 (32) を改めて示すと、

$$HMu_{i+1} - H_{II}(f_{i+1} - K_p p_{i+1} - \bar{K}_{i+1} u_{i+1}) = \bar{q}_i \dots (35)$$

式 (35) が、離散化された Navier-Stokes 運動方程式 (10) に時間積分公式 (21) を適用して導かれた、時刻  $t_i$  の状態から時刻  $t_{i+1}$  の状態を評価する関係式である。

連続方程式 (11) については、1 つの積分ステップにおいて始端での流速  $u_i$  は既知であり、すでに連続条件を満足した解になっているものとすれば、未知流速  $u_{i+1}$  に関する次式 (36) が実際に解くべき方程式となる。

$$K_p^T u_{i+1} = 0 \dots (36)$$

すなわち、式 (35), (36) が1つの積分ステップを支配する方程式である。

### 6. 漸化方程式の解法

これまでの過程を要約すると、支配方程式 (1), (2) に有限要素法を適用して空間に関する離散化を行い、得られたマトリックス方程式 (10), (11) に直接時間積分法を適用して時間方向に離散化し、これを1つの積分ステップに関する方程式 (35), (36) に変換したことになる。流速と圧力が連成し、流速に関して非線形である方程式 (35), (36) の解を求めるために、いったん圧力を消去することを考える。まず、連続方程式 (36) によって圧力  $p_{i+1}$  を求める方程式を導く。

式 (35) より、

$$u_{i+1} = M^{-1} H^{-1} [\bar{q}_i + H_{II}(f_{i+1} - K_p p_{i+1} - \bar{K}_{i+1} u_{i+1})] \dots (37)$$

であるから、式 (37) を連続式 (36) に代入して整理すると次式 (38) が得られる。

$$[K_p^T M^{-1} H^{-1} K_p] p_{i+1} = K_p^T M^{-1} H^{-1} \cdot [H_{II} (f_{i+1} - \bar{K}_{i+1} u_{i+1}) + \bar{q}_i] \dots\dots\dots (38)$$

式 (38) において圧力  $p_{i+1}$  の係数マトリックス  $K_p^T \cdot M^{-1} H^{-1} K_p$  は、系を構成する全要素数を  $M$  とすると  $M \times M$  の正方マトリックスになり、式 (38) は流速の拘束条件に影響を受けることなく常に解ける。なお、式 (37) から式 (38) への展開の中で非線形項  $\bar{K}_{i+1} u_{i+1}$  を別扱いしているのは、逆マトリックスを求めたり、連立方程式を解いたりする対象となるマトリックスの中に非線形な  $\bar{K}_{i+1}$  が含まれることを避けるためである。

式 (38) より、圧力  $p_{i+1}$  は次式 (39) で表わされる。

$$p_{i+1} = R \cdot [H_{II} (f_{i+1} - \bar{K}_{i+1} u_{i+1}) + \bar{q}_i] \dots\dots\dots (39)$$

ここで、

$$R = [K_p^T M^{-1} H^{-1} K_p]^{-1} \cdot K_p^T M^{-1} H^{-1} \dots\dots\dots (40)$$

式 (39) を式 (35) に代入すると、次のような圧力  $p_{i+1}$  が消去された方程式 (41) が得られる。

$$A \cdot u_{i+1} + B \cdot f_{i+1} = C \cdot \bar{q}_i + B \bar{K}_{i+1} u_{i+1} \dots\dots\dots (41 \cdot a)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} A &= H \cdot M \\ B &= [H_{II} K_p R - I] \cdot H_{II} \\ C &= I - H_{II} K_p R \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41 \cdot b)$$

式 (27)、(28) に示したように、変数  $u_{i+1}$ 、 $f_{i+1}$  は境界条件として既知の項と未知項とに分けられる。式 (27)、(28) に順じて式 (41) を改めて書くと、

$$\left[ \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ \bar{u}_{II} \end{array} \right\}_{i+1} + \left[ \begin{array}{cc} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \bar{f}_1 \\ f_{II} \end{array} \right\}_{i+1} = C \bar{q}_i + B \bar{K}_{i+1} u_{i+1} \dots\dots\dots (42)$$

したがって、実際に解かれる方程式は、次のようなものである。

$$\left[ \begin{array}{cc} A_{11} & B_{12} \\ A_{21} & B_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ f_{II} \end{array} \right\}_{i+1} = C \bar{q}_i + B \bar{K}_{i+1} u_{i+1} - \left[ \begin{array}{cc} B_{11} & A_{12} \\ B_{21} & A_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \bar{f}_1 \\ \bar{u}_{II} \end{array} \right\}_{i+1} \dots\dots\dots (43)$$

式 (43) および (39) が提案する解法で最終的に到達した方程式である。しかし式 (43) はなお、流速  $u_{i+1}$  に関して非線形な方程式であるから、式 (43) を解いて流速  $u_{i+1}$  を求めるためには繰返し計算が必要である。繰返し計算のアルゴリズムを具体的に説明する。

まず、非線形項  $\bar{K}_{i+1} u_{i+1}$  を積分ステップ始端で評価される値  $\bar{K}_i u_i$  によって近似し、式 (43) を解いて第1近似解  $u_{i+1}^{(1)}$ 、 $f_{i+1}^{(1)}$  を求める。次に  $u_{i+1}^{(1)}$  によって非線形項を評価し直し ( $\bar{K}_{i+1}^{(1)} u_{i+1}^{(1)}$ )、改めて式 (43) を解き第2近似解  $u_{i+1}^{(2)}$ 、 $f_{i+1}^{(2)}$  を求める。以後この過程を繰り返し、 $u_{i+1}$  と  $f_{i+1}$  がそれぞれ収束するまで続ける。収束の判定規準には次式を用いた。

$$\left. \frac{\|u_{i+1}^{(n+1)} - u_{i+1}^{(n)}\|}{\|u_{i+1}^{(n+1)}\|} < \varepsilon_u^2 \right\}$$

$$\left. \frac{\|f_{i+1}^{(n+1)} - f_{i+1}^{(n)}\|}{\|f_{i+1}^{(n+1)}\|} < \varepsilon_f^2 \right\} \dots\dots\dots (44)$$

$\varepsilon_u$ 、 $\varepsilon_f$  は設定した判定規準値である。 $u_{i+1}^{(n+1)}$ 、 $f_{i+1}^{(n+1)}$  が式 (44) を満足した段階でこれを式 (39) に代入し、圧力  $p_{i+1}$  が得られる。以上の過程によって1つの積分ステップの計算が完結し、求めた  $u_{i+1}$ 、 $f_{i+1}$ 、 $p_{i+1}$  によって次の積分段階における  $\bar{q}_i$  が構成され、次のステップへ進む。

なお、式 (43) および (39) に現われる  $\bar{K}_{i+1}$  以外の諸係数マトリックスは、その定義から明らかなように、積分間隔  $\Delta t$  が変わらない限り、step-by-step に解を求めていく過程において不変のマトリックスである。

## 7. 解析例

### (1) 潤滑面の問題

この問題は、図-2 に示すようなきわめて狭隘な領域を形成する、平行でない2つの壁面にはさまれた流体が、壁面の相対運動によって高压の状態になるという問題である。長さに比べて非常に幅が狭い領域であるため、幅方向の流速成分、圧力勾配を長さ方向の流速成分、圧力勾配に比べて無視することができ、そのような1次元問題への理想化をしたうえで、領域内での定常状態における流速分布と圧力分布の理論解が与えられている。ここでは Fig. 2 に示した境界条件と諸定数を用い、2次元問題として解析した。計算上、流速・圧力等に初期値を設定する必要があるが、これらの分布が運動方程式 (10) と連続方程式 (11) を満足するものでなければならぬから、

$$u = f = p = 0 \text{ at } t = 0 \dots\dots\dots (45)$$

として計算を開始した。壁面上の流速もこれに従い、初期においてゼロであるので、作用流速は、Fig. 3 の囲みの中に図示したように、最初の5stepの間に速度ゼロから目標値  $U$  まで直線的に変化させ、以後一定値  $U$  を保ったまま積分を行った。作用流速が直線的に変化する時間は、解が定常状態になるような時間長さに比べると非常に短いものである。積分公式には4要素公式 ( $m=4$ ) を用い、積分時間間隔は  $\Delta t = 2 \times 10^{-6}$  秒とした。

Fig. 3 は圧力の値が時間とともに変化していく状態

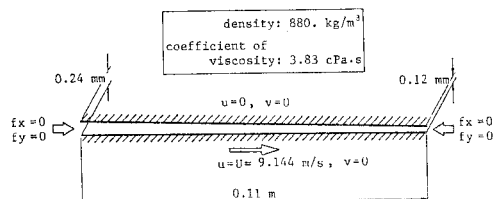


Fig. 2 The Lubrication Problem.

を示したものである。先に述べたような初期操作の影響で、積分開始後しばらくの間、圧力の値が step ごとに振動するが、この振動はすぐに収束する。最終的には圧力の値は1次元問題としての理論値より若干高い値でほとんど定常になる。Fig. 4 (a) は時刻  $4 \times 10^{-4}$  秒における領域内の圧力分布と、壁面において流体が受けている

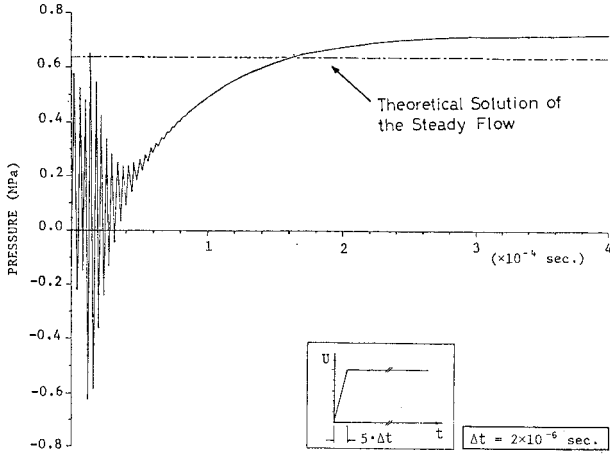
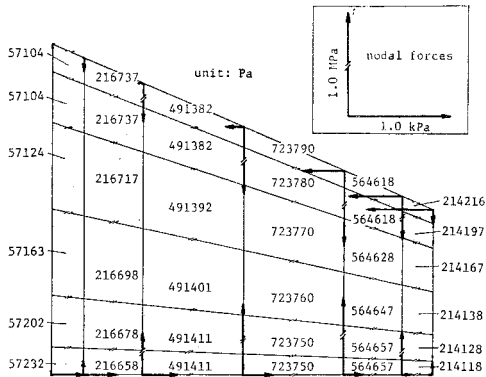
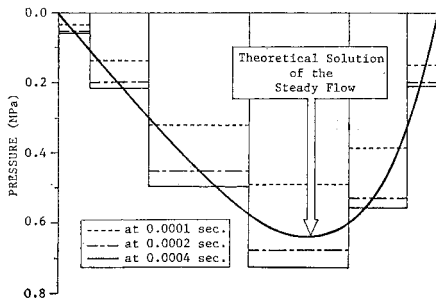


Fig. 3 Time History of Pressure at the Middle of the Analysed Domain.



(a) Pressure Distribution and Nodal Forces on the Boundaries.



(b) Comparison with the Theoretical Distribution of Pressure.

Fig. 4 Calculated Pressure and Nodal Forces.

る反力の分布を示すものである。反力分布が圧力分布と対応したものであることがわかる。Fig. 4 (b) は長さ方向の圧力分布を、1次元問題として理想化することで求められている理論定常解と比較して示す。ここに得られた結果は理論解に比べ全体に高めの値を示しているが、分布形状は妥当であるといえる。領域内の流速分布の推移を Fig. 5 に示す。最終的に理論定常解と一致し、そこに至るまでの途中の変化もきわめて自然である。これらの結果によって、本解法により、圧力分布、反力分布についても妥当な解が得られることがわかる。

(2) 正方形キャビティ内を循環する流れ

キャビティ内を循環する流れは、対流項の非線形性が強く影響する問題として、多くの研究者によって取り上げられている<sup>(6),(8),(16)</sup>。対象とする流れの場は、正方形領域の一辺に一樣流速が与えられることによって生ずるものである。本研究では Fig. 6 に示すような境界条件を設定することにより、目的とする流れの場を実現した。ここでキャビティ上辺の両隅の節点におけるx方向の流速は拘束せず、連続条件から結果的に定まるよう設定しているが、解析の結果はいずれの計算例においてもこの2つの節点の流速は作用流速と等しい値となった。解析の結果得られた両隅の流速の値が等しいことは、ここに得られた解が連続条件を満足していることを示している。この境界条件のもとで、Reynolds 数 ( $R_e$ ) が 400, 1000, 10000 に相当する3種類の解析を行った。(1)で述べたように初期条件は、時刻  $t=0$  において  $u=f=p=0$  とした。作用流速は Fig. 7 に示すように与えるものとし、例(1)よりもいくぶんだらかに変化して、10ステップで目標値に達するようにした。積分公式は4要素公式を用い、積分間隔はそれぞれ 100, 50, 10秒である。Fig. 8 は  $R_e=400$  の場合の時刻 1000, 10000,

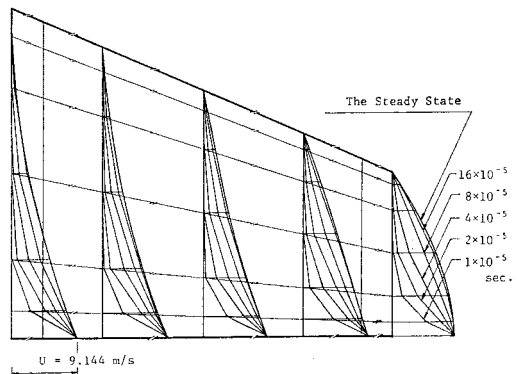


Fig. 5 Velocity Profiles at Various Time Points.

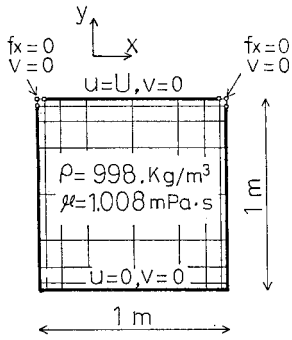


Fig. 6 The Finite Element Idealization for the Flow in a Square Cavity (Case A).

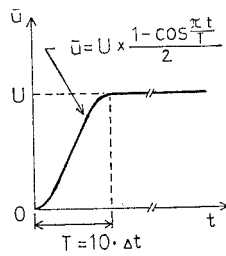


Fig. 7 Time History of the Applied Velocity.

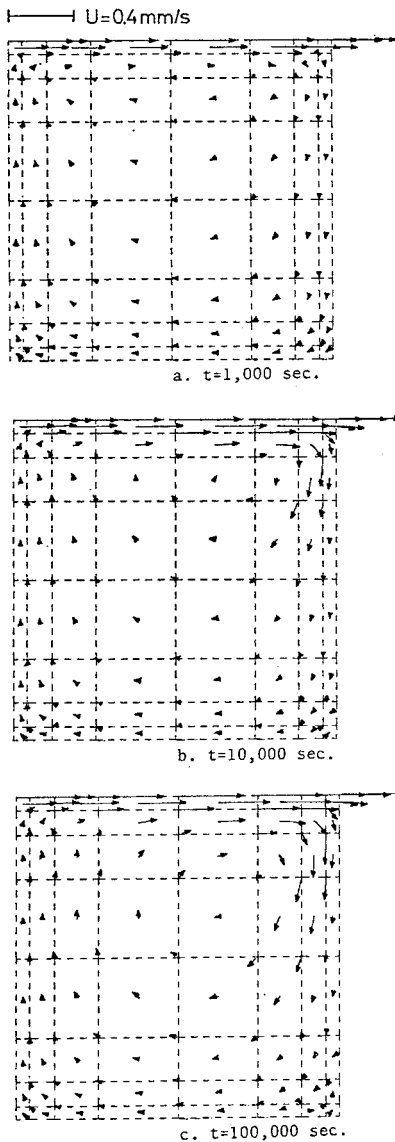


Fig. 8 Calculated Velocity at  $Re=400$  (Case A).

100 000 秒における流速分布を示す。時間の経過とともに、流れの中心が移動していく様子が得られている。

Fig. 9 はキャビティの中央線上での  $x$  方向流速  $u$  の分布を時間を追って示したものである。流れ関数で記述された定常方程式を差分法で解いた Burggraf (16) の解

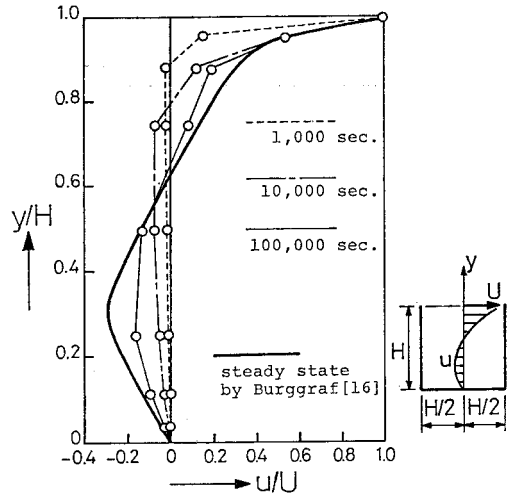


Fig. 9 Midplane Velocity Profiles.

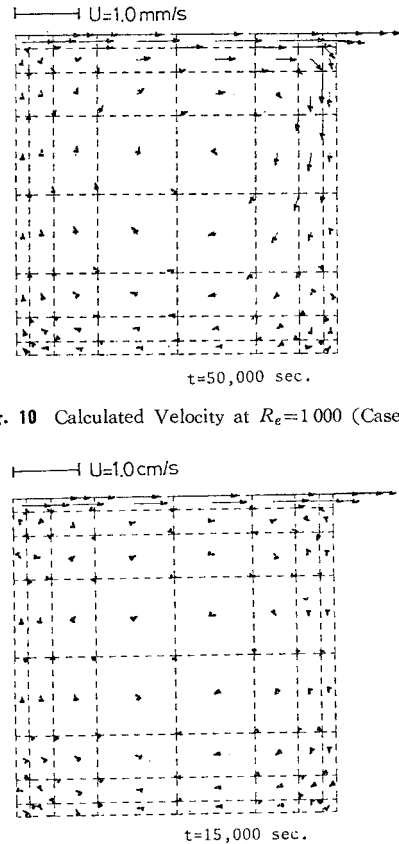


Fig. 10 Calculated Velocity at  $Re=1000$  (Case A).

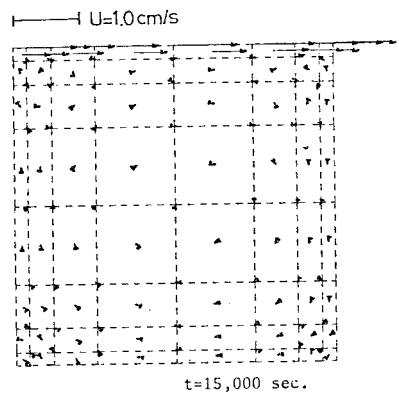


Fig. 11 Calculated Velocity at  $Re=10000$  (Case A).



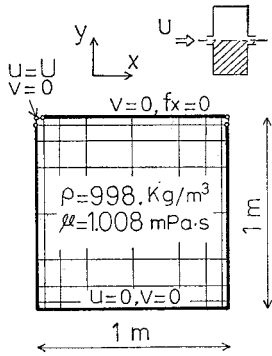


Fig. 12 The Finite Element Idealization for the Flow in a Square Cavity (Case B).

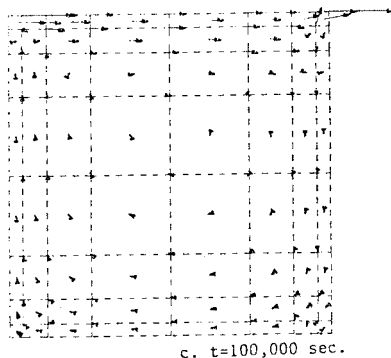
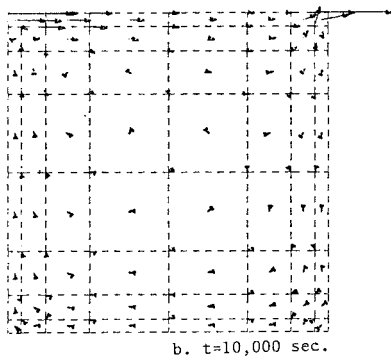
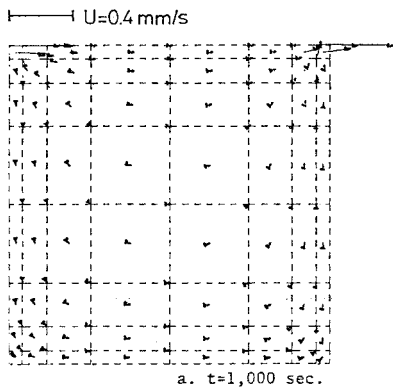
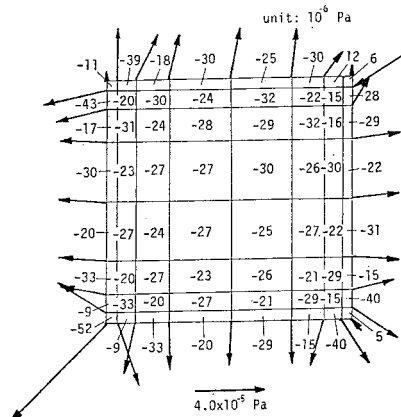
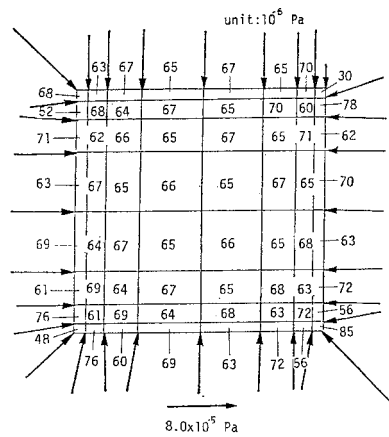


Fig. 13 Calculated Velocity (Case B).

を合わせて示す。得られた解は、本解析の範囲ではまだ定常状態に達してはいないが、定常解との比較において、得られている流速分布は妥当なものであるといえよう。Fig. 10, 11 はそれぞれ  $Re=1000$  の時刻 50000 秒,  $Re=10000$  の時刻 15000 秒における流速分布である。正方形領域の右上部分を中心とした渦と隅角部での渦が形成されている。特に Fig. 11 では 4 隅ともにそれぞれ渦ができています。Fig. 8, 10 および 11 の結果はいずれも定常状態にまでは至っていないが、いずれの



(a) Case A ( $Re=400, t=50000$  s)



(b) Case B ( $Re=400, t=50000$  s)

Fig. 14 Pressure Distribution and Nodal Forces on the Boundaries.

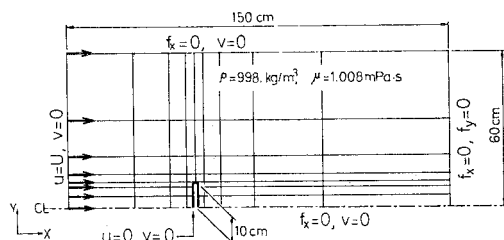


Fig. 15 Problem of the Flow Past a Flat Plate.

計算範囲においても計算の状況は安定している。

本解法が圧力と流速を変数としているので物理的意味が明確な境界条件の設定ができるということを示す意味で、同じ正方形領域に異なる境界条件を与えた結果を示す。設定した境界条件を Fig. 12 に示す。これは同図右上に示すように流路の幅が突然に広がっている領域の流れを対称性を考慮して表現したことに相当する。 $Re=400$  の場合の流速分布の変化を Fig. 13 に示す。初期において流路の拡幅に従って広がった流れが、時間の経過とともに逆流し、最後には領域の中心部に渦を形成する様相が得られている。Fig. 14 には、ここで示した2種類の境界条件の場合のそれぞれの圧力分布、反力分布を示す。対応する流れの分布に従い、負圧、正圧の分布が得られている。

### (3) 流れに垂直におかれた平板まわりの流れ

流れの中に物体がおかれている問題の1つとして、平板が流れに垂直におかれている問題を選んだ。解析に用いた要素分割と境界条件を Fig. 15 に示す。対称条件を導入しているため、物理的に意味のある Reynolds 数はたかだか数十程度である。ここでは  $Re=6$  と  $30$  の場合の結果を示す。いずれの場合も積分公式は4要素公式を用い、積分時間間隔は100秒とした。また、初期条件は、例(2)と同じく、時刻  $t=0$  において  $u=f=p=0$  とし、作用流速は Fig. 7 に示すように与えた。

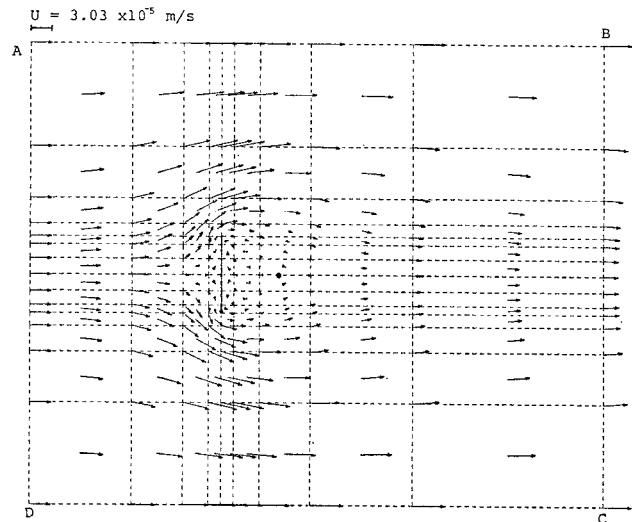
#### a) 流速分布

Fig. 16 (a) には  $Re=6$  の場合の、ほとんど定常状態に相当する時刻 50 000 秒における流速分布を示す。図中の・印は、対称軸上で流速がゼロとなる位置を節点流速から線形補間して求めたものを示している。 $Re=6$  の場合は山本ら<sup>17)</sup>が流れ関数で記述された方程式を対象として重ね合せ法によって解析しており、同図 (b) にその流線を比較のために示す。山本らの方法は無限遠での条件を満足する解析解との接続を図ったものであるのに対し、本解析では比較的狭い有限領域を対象としているという違いがある。Fig. 17 は  $Re=30$  の場合の時刻 50 000 秒における流速分布である。下流側の境界における流速分布が一樣流と大きく異なっていることがいっそうはっきりと示されている。Fig. 18 (a), (b), (c) は平板近傍の流れを拡大し、時間の経過とともに示したものである。流れが

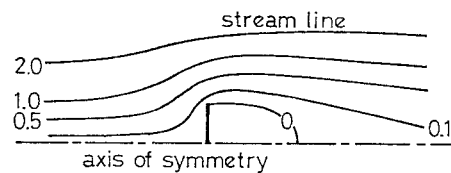
始まった直後の流れ(同図(a))は理論的に予想されているように渦なしの流れになっており、時間がたつにつれ平板背後に双子渦が形成され、渦の大きさが変化していく様相が得られている。

#### b) 抗力

流れの中の物体に働く抗力は、通常的手法では、物体



(a) Calculated Velocity at  $t=50000$  s



(b) Stream Line by Yamamoto, et al.<sup>17)</sup>

Fig. 16 The Flow Past a Flat Plate ( $Re=6$ );

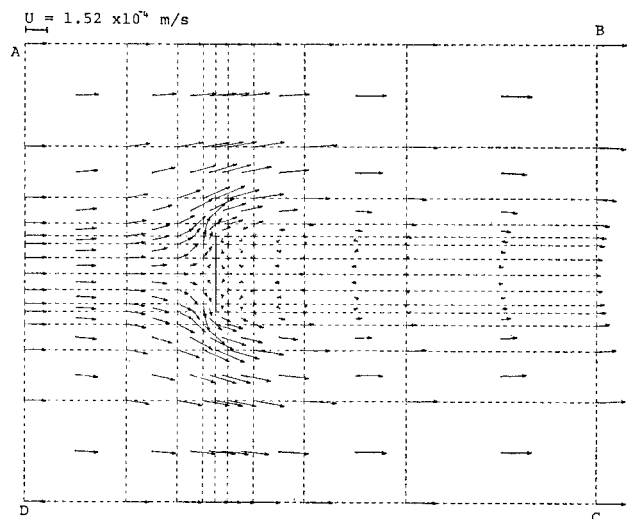


Fig. 17 The Flow Past a Flat Plate ( $Re=30$ );  
Calculated Velocity at  $t=50000$  s.

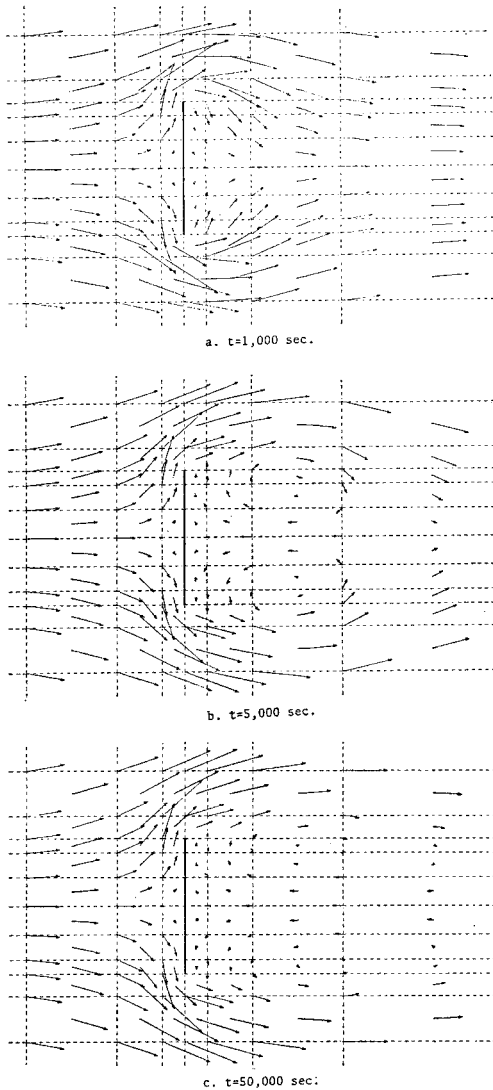


Fig. 18 Calculated Velocity in the Vicinity of the Plate ( $Re=30$ ).

を内部を含む領域を考え、その領域の表面（検査面）での運動量方程式を解くという間接的な手法により算定される。本解析では、物体表面での力が節点力として計算されるため、抗力の値を直接求めることができる。したがって、運動量のつり合いから間接的に求まる値と、節点力から直接求まる値とを比較することにより、力の評価に関する本解法の信頼性を検証することができる。比較検討した結果を具体的な数値によって以下に示す。なお、検査面は Fig. 16 (a) に示される長方形領域の外周 ABCD とした。実際の解析は、対称条件を導入した領域 (Fig. 15) で行ったものであるが、Table 1 に示す運動量などの数値は、領域 ABCD に対応する値に換算している。

この検査面での一様流れ方向 ( $x$  方向) の運動量のつり合いを考える。解析で設定した境界条件より、流れに平行な 2 辺, AB, CD の上では  $x$  方向の力の成分はゼロであり、これらの面から領域外への流出もない。したがって運動量方程式は流れに垂直な 2 つの検査面, AD, BC 上の成分からたてられることになる。上流 AD 上では、境界条件として与えられている一様流速  $U$  による面 AD 上の全運動量を  $M_i$  とする。また AD 上に作用する  $x$  方向の力は、節点力  $f_x$  として求められ、面 AD 全体での総和を  $F_i$  とする。下流 BC 上では、領域外へ流出する運動量  $M_o$  は、面 BC 上の流速分布を、節点流速の値から線形補間して定め、これによって算出する。また、面 BC 上の節点力成分は設定した境界条件によりゼロである。これらの諸量より定まる、流れの中の平板に作用している  $x$  方向の力  $D^*$  は次式で表わされる。

$$D^* = M_i + F_i - M_o \dots\dots\dots (46)$$

これに対して、平板の表面を構成する節点で求められている節点力の  $x$  方向成分  $f_x$  の総和を  $D$  と示すことにする。 $Re=6$  と  $30$  の 2 つの場合について、それぞれ時刻  $t=50,000$  秒におけるこれら諸量の値を Table 1 に示す。2 つの方法によって算定された抗力  $D$  および  $D^*$  の値は非常によい一致を示しており、本解法によって得られる解の信頼性はきわめて高いものといえる。

なお、作用流速  $U$  と平板全幅 (20 cm) た基準として計算しを抵抗係数  $C_D$  の値が時間とともに変化する状況を Fig. 19 に示す。流れが定常状態に至るまでの間

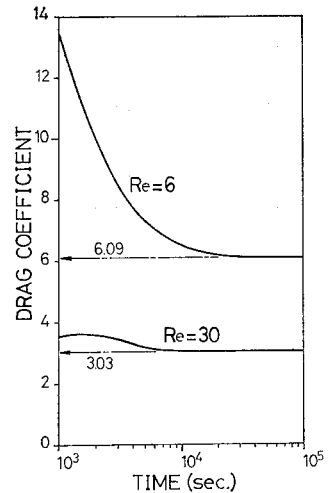


Fig. 19 Variation of Drag Coefficients.

Table 1 Calculations of Drag.

Reynolds number	6	30
$M_i$ : the total inward flux of $x$ -momentum across the control surface AD	10.992 8	2.720 6
$F_i$ : the total normal forces acting on the control surface AD	6.052 0	1.157 3
$M_o$ : the total outward flux of $x$ -momentum across the control surface BC	11.469 4	3.173 8
$D^* = M_i + F_i - M_o$	5.575 4	0.704 1
$D$ : $x$ -direction resultant of the total forces acting on the plate surface	5.574 4	0.693 2
unit	$\times 10^{-7}N$	$\times 10^{-5}N$

に抗力の値が減少していくものであること、減少の割合は  $R_0=30$  の流れに比べて  $R_0=6$  の方が相当大きいこと、が示されている。

## 8. おわりに

流速と圧力を基本的な変数とする有限要素方程式に高精度な直接時間積分法を適用することで構成した非圧縮粘性流体の流れの問題の新しい解法について説明し、具体的な数値解析例を通して、この解法が Reynolds 数の高い領域でも安定に計算することができ、さらに圧力や物体と接する境界における反力の評価についても妥当に行えるものであることを示した。

解法を構成する前提として、圧力変数と連続方程式との関係に関する基本的な考察から、基礎とする有限要素方程式に対して修正を行うことにより、圧力を妥当に評価し、連続条件を精度よく満足する解法を導くことが可能となったものである。流速と圧力をとを基本的な変数とする方法では、流速の補間関数を圧力の補間関数に対し 1 次以上高くする必要があるとされ、従来、流速について 2 次以上の要素を用いることがほとんどであったが、3. で示した考察により、3 角形線形要素という最も簡単な要素を用いることができたため、境界条件の取扱いを含め、解法の展開がより簡潔になった。Reynolds 数の高い領域においても安定して解が求められることは、用いた直接時間積分公式の高精度な特性によるものである。特に、積分間隔内に分布する外乱を積分点における等価量として明確に評価していることが、圧力項および非線形項を外乱項に含めるという取扱いを可能にしている。

ここで示した解法は計算法としては相当複雑で、特に計算機の記憶容量についてはかなり多くを必要とする。

7. で示した解析例における結果も、このような制限の中で行われたものであり、要素分割の細かさや積分ステップ数において十分とはいえない点もあるが、本論文の結論を損なうものではないと考える。アルゴリズムをさらに効果的に改良し、より大きく複雑な問題に耐えられるよう修正していくことを今後の課題とするものである。

なお、本論文の計算はすべて、東京工業大学総合情報処理センターの計算機 M 200-H によった。また、本研究の基礎的な段階において、卒論学生 大下武志君（現・建設省勤務）の献身的な努力によるところが非常に大きかった。ここに記して、深く謝意を表するものである。

## 参 考 文 献

- 1) Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method, 3rd edn., Chap. 22, McGraw-Hill, London, 1977.
- 2) Huebner, K.H. : The Finite Element Method for Engineers, Chap. 9, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- 3) Connor, J.J. and C.A. Brebbia : Finite Element Techniques for Fluid Flow, Butterworth & Co., London, 1976.
- 4) Norrie, D.H. and G. de Vries : A Survey of the Finite Element Applications in Fluid Mechanics, Finite Elements in Fluids, Vol. 3, Chap. 21, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- 5) Tong, P. : On the Solution of the Navier-Stokes Equations in Two Dimensional and Axial Symmetric Problems, Finite Element Methods in Flow Problems, University of Alabama, Huntsville Press, pp. 57~66, 1974.
- 6) Ikegawa, M. : A New Finite Element Technique for the Analysis of Steady Viscous Flow Problem, Int. J. for Numer. Meth. in Engng., Vol. 14, pp. 103~113, 1979.
- 7) Baker, A.J. : Finite Element Solution Algorithm for Viscous Incompressible Fluid Dynamics, Int. J. for Numer. Meth. in Engng., Vol. 6, pp. 89~103, 1973.
- 8) Dhatt, G., B.K. Fomo and C. Bourque : A  $\psi$ - $\omega$  Finite Element Formulation for the Navier-Stokes Equations, Int. J. for Numer. Meth. in Engng., Vol. 17, pp. 199~212, 1981.
- 9) Finlayson, B.A. : The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, New York, 1972.
- 10) Oden, J.T. and L.C. Wellford, Jr. : Analysis of Flow of Viscous Fluids by Finite-Element Method, AIAA Journal, Vol. 10, No. 12, pp. 1590~1599, 1972.
- 11) Olson, M.D. and S.Y. Tuann : Primitive Variables versus Stream Function Finite Element Solution of the Navier-Stokes Equations, Finite Elements in Fluids, Vol. 3, Chap. 4, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- 12) Hughes, T.J.R., R.L. Taylor and J.-F. Levy : High Reynolds Number, Steady, Incompressible Flows by a Finite Element Method, Finite Elements in Fluids, Vol. 3, Chap. 3, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- 13) Hood, P. and C. Taylor : Navier-Stokes Equations Using Mixed Interpolation, Finite Element Methods in Flow Problems, University of Alabama, Huntsville Press, pp. 121~132, 1974.
- 14) Kawahara, M., N. Yoshimura and K. Nakagawa : Analysis of Steady Incompressible Viscous Flow, Finite Element Methods in Flow Problems, University of Alabama, Huntsville Press, pp. 107~120, 1974.
- 15) 吉田 裕・藤原 亨・野村卓史 : 熱伝導型方程式の直接時間積分法と高精度化のアルゴリズム, 土木学会論文報告集, 第 313 号, pp. 23~36, 1981 年 9 月.
- 16) Burggraf, O.R. : Analysis and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flows, J. Fluid Mech., Vol. 24, Part 1, pp. 113~151, 1966.
- 17) 山本善之・大和裕幸 : 重ね合せ法による粘性流場の解析, 日本鋼構造協会第 13 回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集, pp. 453~458, 1979.

(1981.10.2・受付)