

一厚板理論による扇形平板の解析について

ON AN ANALYSIS FOR CIRCULAR RING SECTOR PLATES
BY ONE THEORY OF MODERATELY THICK PLATES

奥村 勇*・本多 祐也**・芳村 仁***

By Isamu OKUMURA, Yuya HONDA and Jin YOSHIMURA

1. 緒 言

板厚が比較的大きい厚板とよばれる平板に関する研究は、3次元弾性論による研究および数人の研究者によって提示された厚板理論による研究の2つの大きな系統の中で、今日まで進展してきている。しかしながら、後者の厚板理論については、現時点でも最良と目されるそれは見当たらず、それぞれ一長一短を含んでいる。また、従来の厚板に関する研究が主として長方形板を対象にし、曲線橋の鉄筋コンクリート床版に見受けられる扇形平板と称される形状の平板に関するデータは現時点でも不足している。

厚板といえども、境界条件が変位成分あるいは応力成分によって厳密に規定される3次元弾性論による解析が最も望ましい方法であるが、一般的には、板厚の減少に伴い数値計算がだんだん困難となり、3次元弾性論による方法では、収束のよい結果を得ることが難しくなる。この難点が、3次元弾性論による解析上の複雑さ以上に、その適用性を制限する大きな原因となり、現在見受けられるような種々の厚板理論を生み出し、簡明でしかも精度の高い解析方法を求めて研究を進展せしめてきた1つの動機ともなっている。

本論文は、以上の視点から、比較的重い扇形平板あるいは円形板を解析する際に有効となる一厚板理論を提案し、その理論に基づいて解析した扇形平板の基礎的データを提示したものである。ここで提案する円柱座標系における一厚板理論は、その考え方の本質的な基礎を、後述する長方形板に関して展開された Love の理論に置くものであるが、Love の理論に見受けられる2つの難点を克服した一改良理論を意味する。すなわち、板の表面

における荷重条件を満たす特殊解には、3次元応力解の一部を当てることにより、任意の荷重条件に対処できるようにし、さらに、同次解としての平面応力解および一般化平面応力解の2つの解に板の中央面に対して反対称の応力状態に関する解を新たに追加することにより、曲げに関する境界条件が3つ規定され得るように試みた一改良理論である。特殊解として3次元応力解の一部を用いることは、板の表面に作用する荷重が垂直荷重の場合あるいはせん断荷重の場合においても、1つの特殊解で処理できるという長所を有している。また、曲げに関する境界条件を3つ規定できる方法は、2つの条件しか規定できない方法に比較して、厚板としての3次元な境界条件をより正確に満足するはずであり、当然ではあるが、3つの条件を規定した方が、3次元弾性論による解析結果とよく合致することは、後述する数値計算例において示す。

もう1つの目的である比較的重い扇形平板に関するデータの提示は、曲線橋の鉄筋コンクリート床版を、近似的に等方・等質の弾性体とみなして解析し、主として、部分分布荷重を担った周辺単純支持の扇形平板に関する基礎的データを示すものであり、現時点での扇形平板に関するデータがきわめて少ないことを考慮すると、工学的に十分意義あると考えられる。

2. 厚板に関する既往の研究

前述した2つの系統のうち、1つの系統である3次元弾性論による平板の解析には、Fourier 有限変換により長方形板を取り扱った Nomachi¹⁾、周辺単純支持の長方形板および積層板に関する Srinivas^ら²⁾、一数值解法による周辺固定長方形板に関する 島田・岡村³⁾、周辺単純支持の長方形2層板に関する 園田・堀川⁴⁾、体積力がある周辺単純支持の直交異方性長方形板に関する Sonoda および Horikawa⁵⁾ および部分分布荷重を担った扇形平

* 正会員 工修 北見工業大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 北海学園大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科

板に関する Okumura および Miyake⁹⁾ らの研究が見受けられる。3次元弾性論による厚板の解析において、周辺単純支持の長方形板が多い理由は、この境界条件の場合には、薄板に関する Navier の解のように、特殊解そのものが、板の境界条件をも満たす解となるため、前述した3次元弾性論を用いた解析における数値計算の困難さがなくなるためと考えられる。

もう一つの系統である厚板理論による平板の解析には、古くより多くの研究が見受けられ、Woinowsky-Krieger⁷⁾、Love⁸⁾、Reissner⁹⁾、Hencky¹⁰⁾、Mindlin¹¹⁾、Kromm¹²⁾、Ambartsumyan¹³⁾、Panc¹⁴⁾ および Donnell¹⁵⁾ らの研究が見受けられる。これらの研究の理論には、共通した仮定が多く含まれているので、冗長を避けるために、それらを、① 板厚方向の垂直ひずみを0とする仮定、② 2つの面外せん断応力を板厚に沿って放物線分布とする仮定、③ 板厚方向の垂直ひずみと垂直応力との間の応力-ひずみ関係式を無視する仮定、④ 曲げ応力の板厚に沿っての変化を線形とする仮定、⑤ 2つの面内変位の板厚に沿っての変化を線形とする仮定の5つに分類しておき、以下に、これらの研究の理論に見受けられるおもな特徴とこれらの理論を拡張した理論あるいは改良した理論について述べる。なお、上記の仮定のうち、②と④の仮定は、応力成分のつり合い方程式より等価となることもあるが、等価とならない弾性解も存在するので、ここでは、両者を独立の仮定として置く。

Woinowsky-Krieger⁷⁾ の研究は、前述した長方形板の3次元弾性論による解析の範ちゅうに入るが、荷重条件を満たす特殊解に関する研究と考えてよい。

Love⁸⁾ の研究は、平面応力解、一般化平面応力解および特殊解の3つの解を重ね合わせて、板の境界条件および荷重条件を満たす方法である。最初の2つの解は、板の境界条件を満たすための同次解であり、最後の特殊解は、板の表面における荷重条件を満たすための解である。しかしながら、一般的荷重条件に関しては、この特殊解を求めることが難しく、Loveの理論を応用する際の1つの難点になっていたが、この難点は、本研究においては、前述したように、特殊解として3次元応力解を用いることにより解決されている。また、Hata¹⁶⁾ は、板の表面に作用する荷重の性質に着目してこの難点を解決し、Loveの理論を拡張している。この拡張されたLoveの理論による長方形板の解析には、片持長方形板に関する小林ら¹⁷⁾の研究が見受けられる。Loveの理論におけるもう1つの難点は、同次解としての2つの解のみでは、厚板の境界条件として通常見受けられる曲げに関する3つの条件を規定することができず、薄板理論と同様に、2つの条件しか規定できない点である。この難点は、Hata¹⁶⁾、¹⁸⁾ および小林ら¹⁷⁾の研究においても解決されて

いないが、本研究においては、前述したように、3つの解を同次解として用いることにより解決されている。

Reissner⁹⁾ の研究は、②、③ および ④ の仮定に基づいているが、④ の仮定は、厚板理論とみなすには、あまりにも大胆な仮定であり、Reissner自身が述べているように、せん断変形を考慮した薄板の曲げ理論としてとらえる方が妥当と考えられるが、この理論を厚板の解析に応用した研究は多数見受けられる¹⁹⁾。また、Sonoda および Horikawa²⁰⁾ は、同次解としてのReissnerの解と特殊解としての3次元応力解とを併せ用いてReissnerの理論の改良を試み、並列縦げたを有する長方形板を解析している。Hencky¹⁰⁾ および Mindlin¹¹⁾ らの研究には、①、③ および ⑤ の仮定が含まれ、さらに、板厚方向の垂直応力の曲げに及ぼす効果が無視されている。後者のMindlinの理論を平板の曲げ振動解析に応用した研究は多数見受けられる²¹⁾。Kromm¹²⁾ の研究は、応力成分により表わされたつり合い方程式および応力-ひずみ関係式を厳密に満たすことを主眼とした研究であり、① および ③ の仮定以外には、変位および応力成分についての仮定は設けられていない。しかしながら、板の表面に作用する荷重が等分布荷重以外の平面調和関数となる場合には、6つの支配方程式の間に矛盾を来している。Ambartsumyan¹³⁾ および Panc¹⁴⁾ らの研究には、①、② および ③ の仮定が含まれており、比較的薄い厚板の解析に応用される理論となっている。前者の理論における① および ③ の仮定を除外し、応力-ひずみ関係式を逐次近似的に満たすことを試みた改良理論として、平島・村松²²⁾の研究が見受けられる。Donnell¹⁵⁾ の研究は、荷重関数を項とする無限級数解であるが、実際的には、有限項で打ち切った解を用いるために、弾性論的には近似解となっており、また、曲げに関する境界条件を2つしか規定できないという短所を含んでいる。上述した厚板理論のほかに、板厚方向の座標変数のべき級数展開により、3つの変位成分を近似的に表わした高次理論とよばれる解法が多数見受けられるが²³⁾、文献22)に詳述されているので、ここでは言及しない。

ここまで述べてきた研究の多くは、長方形板に関する研究であり、本研究が課題としている比較的厚い扇形平板あるいは円形板の非軸対称曲げに関する研究は、現在でもそれほど多くはない。比較的厚い円形板あるいは円形盤の軸対称曲げあるいは曲げ振動に関しては、3次元弾性論による斎藤²⁴⁾の研究以来、最近のGupta および Mishra²⁵⁾の研究に至るまで、3次元弾性論、初期関数法(MIF)あるいはMindlinの理論などを用いた研究が数多く報告されている。

一方、非軸対称曲げあるいは曲げ振動に関しては、古くに、Loveの理論の拡張によるHata¹⁸⁾の研究、最近

の Mindlin の理論による Prasad および Gupta²⁶⁾ の研究に至るまで、いくつかの研究が見受けられるが、比較的厚い扇形平板に関しては、3次元弾性論により解析した Okumura および Miyake⁶⁾ の研究、Mindlin の理論を用いて有限要素法により解析したくさび形の扇形積層板に関する Cheung および Kwok²⁷⁾ の研究および Ambartsumyan¹³⁾ の著書に記述されている全面等分布荷重を受けたくさび形の扇形平板に関する研究などを著者らは知るのみであり、現在でもきわめて少ないようである。

3. 同次解

扇形平板の座標系は、図-1 に示したものとし、円柱座標系 (r, θ, z) において、 r, θ および z 方向の変位成分をそれぞれ u, v および w 、垂直応力成分をそれぞれ $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ および σ_{zz} およびせん断応力成分をそれぞれ $\sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}$ および $\sigma_{\theta z}$ で表わす。また、ヤング率を E およびポアソン比を ν で表わす。以下に示す同次解としての3つの解の導出過程および解の形式については、著者らの1人²⁸⁾がすでに報告しているので、ここでは、応力関数を決めて、変位および応力成分を具体的に表すのが、紙面を節約するために、応力成分については、2円弧辺の境界条件に直接関係した応力成分のみを示す。

図-1 に示したように、荷重は部分分布荷重を考慮することにし、 $\theta=0$ に関して対称に分布しているものとする。また、変位および応力成分には、それぞれ、1, 2 および 3 の肩添字を付し、それらの量が3つの解のいずれに属する量であるかを明示する。

(1) 平面応力解

$$z_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \cos m\theta (P_t^{(1)} r^m + P_t^{(2)} r^{-m} + P_t^{(3)} r^{m+2} + P_t^{(4)} r^{-m+2})$$

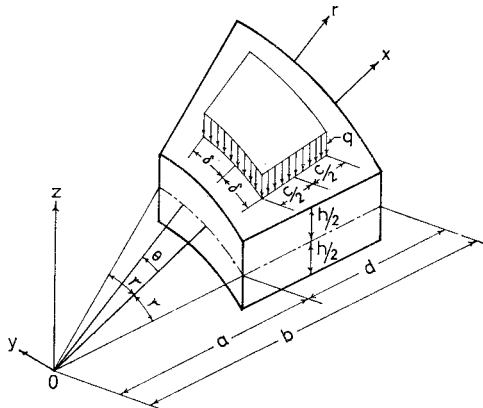


図-1 扇形平板の座標系

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= \sum_{t=1}^{\infty} \cos m\theta \{ 4(m+1)P_t^{(3)} r^m - 4(m-1)P_t^{(4)} r^{-m} \} \\ z &= \sum_{t=1}^{\infty} \cos m\theta \{ P_t^{(1)} r^m + P_t^{(2)} r^{-m} + P_t^{(3)} r^m [r^2 - \{2\nu(m+1)/(1+\nu)\} z^2] + P_t^{(4)} r^{-m} [r^2 + \{2\nu(m-1)/(1+\nu)\} z^2] \} \\ \xi &= \sum_{t=1}^{\infty} \cos m\theta \{ 4P_t^{(3)} r^{m+1} + 4P_t^{(4)} r^{-m+1} \} \\ \eta &= \sum_{t=1}^{\infty} \sin m\theta \{ 4P_t^{(3)} r^{m+1} - 4P_t^{(4)} r^{-m+1} \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} m &= t\pi/(2r), \quad m \equiv 1 \quad (t=1, 3, \dots) \\ a \leq r \leq b, \quad -r \leq \theta \leq r, \quad -h/2 \leq z \leq h/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

また、 $P_t^{(1)}, \dots, P_t^{(4)}$ は境界条件によって定まる未定数である。

$$\left. \begin{aligned} u^1 &= -\frac{1}{E} \sum_{t=1}^{\infty} \cos m\theta \{ m(1+\nu)P_t^{(1)} r^{m-1} - m(1+\nu)P_t^{(2)} r^{-m-1} - P_t^{(3)} \cdot r^{m-1} [r^2 \{4 - (1+\nu)(m+2)\} + 2\nu m(m+1)z^2] - P_t^{(4)} \cdot r^{-m-1} [r^2 \{4 + (1+\nu)(m-2)\} + 2\nu m(m-1)z^2] \} \\ v^1 &= \frac{1}{E} \sum_{t=1}^{\infty} \sin m\theta \{ m(1+\nu)P_t^{(1)} r^{m-1} + m(1+\nu)P_t^{(2)} r^{-m-1} + P_t^{(3)} \cdot r^{m-1} [r^2 \{4 + m(1+\nu)\} - 2\nu m(m+1)z^2] - P_t^{(4)} \cdot r^{-m-1} [r^2 \{4 - m(1+\nu)\} - 2\nu m(m-1)z^2] \} \\ w^1 &= -\frac{\nu z}{E} \sum_{t=1}^{\infty} \cos m\theta \{ 4(m+1)P_t^{(3)} r^m - 4(m-1)P_t^{(4)} r^{-m} \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^1 &= -\sum_{t=1}^{\infty} \cos m\theta \{ m(m-1)P_t^{(1)} r^{m-2} + m(m+1)P_t^{(2)} r^{-m-2} + (m+1) \cdot P_t^{(3)} r^{m-2} [r^2(m-2) - \{2\nu m(m-1)/(1+\nu)\} z^2] + (m-1) \cdot P_t^{(4)} r^{-m-2} [r^2(m+2) + \{2\nu m(m+1)/(1+\nu)\} z^2] \} \\ \sigma_{r\theta}^1 &= \sum_{t=1}^{\infty} m \sin m\theta \{ (m-1)P_t^{(1)} r^{m-2} - (m+1)P_t^{(2)} r^{-m-2} + (m+1) \cdot P_t^{(3)} r^{m-2} [r^2 - \{2\nu(m-1)/(1+\nu)\} z^2] - (m-1) \cdot P_t^{(4)} r^{-m-2} [r^2 + \{2\nu(m+1)/(1+\nu)\} z^2] \} \\ \sigma_{zz}^1 &= 0, \quad \sigma_{rz}^1 = 0, \quad \sigma_{\theta z}^1 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$\sigma_{\theta\theta}^1$ については省略した。

(2) 一般化平面応力解

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= \sum_{i=1}^{\infty} \cos m\theta \{ Q_i^{(1)} r^m + Q_i^{(2)} r^{-m} \\ &\quad + Q_i^{(3)} r^{m+2} + Q_i^{(4)} r^{-m-2} \} \\ \theta_1 &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \sum_{i=1}^{\infty} \cos m\theta \{ 4(m+1) Q_i^{(3)} r^m \\ &\quad - 4(m-1) Q_i^{(4)} r^{-m} \} \\ x' &= z \sum_{i=1}^{\infty} \cos m\theta \{ Q_i^{(1)} r^m + Q_i^{(2)} r^{-m} \\ &\quad + Q_i^{(3)} r^m \{ r^2 - [2(2-\nu)(m+1) \\ &\quad / 3(1-\nu)] z^2 \} + Q_i^{(4)} r^{-m} \{ r^2 \\ &\quad + [2(2-\nu)(m-1)/3(1-\nu)] z^2 \} \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 m は式 (2) に示したものであり、 $Q_i^{(1)}, \dots, Q_i^{(4)}$ は境界条件によって定まる未定定数である。

$$\left. \begin{aligned} u^2 &= -\frac{1+\nu}{E} z \sum_{i=1}^{\infty} \cos m\theta \{ m Q_i^{(1)} r^{m-1} \\ &\quad - m Q_i^{(2)} r^{-m-1} + Q_i^{(3)} r^{m-1} \\ &\quad \cdot \{ (m+2) r^2 - [2(2-\nu)m(m+1) \\ &\quad / 3(1-\nu)] z^2 \} - Q_i^{(4)} \\ &\quad \cdot r^{-m-1} \{ (m-2) r^2 + [2(2-\nu)m(m-1) \\ &\quad / 3(1-\nu)] z^2 \} \} \\ v^2 &= \frac{1+\nu}{E} z \sum_{i=1}^{\infty} m \sin m\theta \{ Q_i^{(1)} r^{m-1} \\ &\quad + Q_i^{(2)} r^{-m-1} + Q_i^{(3)} r^{m-1} \\ &\quad \cdot \{ r^2 - [2(2-\nu)(m+1) \\ &\quad / 3(1-\nu)] z^2 \} + Q_i^{(4)} r^{-m-1} \\ &\quad \cdot \{ r^2 + [2(2-\nu)(m-1)/3(1-\nu)] z^2 \} \} \\ w^2 &= \frac{1+\nu}{E} \sum_{i=1}^{\infty} \cos m\theta \{ Q_i^{(1)} r^m + Q_i^{(2)} r^{-m} \\ &\quad + Q_i^{(3)} r^m \{ r^2 - [2(m+1)/(1-\nu)] \\ &\quad \cdot (h^2/2 - \nu z^2) \} + Q_i^{(4)} r^{-m} \{ r^2 \\ &\quad + [2(m-1)/(1-\nu)] (h^2/2 - \nu z^2) \} \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^2 &= -z \sum_{i=1}^{\infty} \cos m\theta \{ m(m-1) Q_i^{(1)} r^{m-2} \\ &\quad + m(m+1) Q_i^{(2)} r^{-m-2} \\ &\quad + (m+1) Q_i^{(3)} r^{m-2} \{ r^2 [m-2+4/(1-\nu)] \\ &\quad - [2(2-\nu)m(m-1)/3(1-\nu)] z^2 \} \\ &\quad + (m-1) Q_i^{(4)} r^{-m-2} \{ r^2 [m+2 \\ &\quad - 4/(1-\nu)] + [2(2-\nu)m(m+1) \\ &\quad / 3(1-\nu)] z^2 \} \} \\ \sigma_{r\theta}^2 &= z \sum_{i=1}^{\infty} m \sin m\theta \{ (m-1) Q_i^{(1)} r^{m-2} \\ &\quad - (m+1) Q_i^{(2)} r^{-m-2} + (m+1) \\ &\quad \cdot Q_i^{(3)} r^{m-2} \{ r^2 - [2(2-\nu)(m-1) \\ &\quad / 3(1-\nu)] z^2 \} - (m-1) \\ &\quad \cdot Q_i^{(4)} r^{-m-2} \{ r^2 + [2(2-\nu)(m+1) \\ &\quad / 3(1-\nu)] z^2 \} \} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rz}^2 &= -\frac{h^2-4z^2}{2(1-\nu)} \sum_{i=1}^{\infty} m \cos m\theta \{ (m+1) \\ &\quad \cdot Q_i^{(3)} r^{m-1} + (m-1) Q_i^{(4)} r^{-m-1} \} \\ \sigma_{zz}^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$\sigma_{\theta\theta}^2$ および $\sigma_{\theta z}^2$ については省略した。

(3) 板の中央面に対して反対称の応力状態に関する解

$$\theta_n = \sum_{i=1}^{\infty} \sin m\theta \{ F_{in} I_m(\beta_n r) + E_{in} K_m(\beta_n r) \} \dots\dots (8)$$

ここで、

$$\beta_n = n\pi/h \quad (n=1, 3, \dots) \dots\dots\dots (9)$$

また、 m は式 (2) に示したものとし、 F_{in} および E_{in} は境界条件によって定まる未定定数、 $I_m(\beta_n r)$ および $K_m(\beta_n r)$ は、それぞれ、 m 位の第1種および第2種の変形 Bessel 関数である。

$$\left. \begin{aligned} u^3 &= \frac{1+\nu}{E} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (m\beta_n) (-1)^{(n-1)/2} \\ &\quad \cdot \cos m\theta \sin \beta_n z \{ F_{in} I_m(\beta_n r) / (\beta_n r) \\ &\quad \cdot E_{in} K_m(\beta_n r) / (\beta_n r) \} \\ v^3 &= -\frac{1+\nu}{E} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (-1)^{(n-1)/2} \\ &\quad \cdot \sin m\theta \sin \beta_n z \{ F_{in} \{ m I_m(\beta_n r) \\ &\quad / (\beta_n r) + I_{m+1}(\beta_n r) \} \\ &\quad + E_{in} \{ m K_m(\beta_n r) / (\beta_n r) - K_{m+1}(\beta_n r) \} \} \\ w^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^3 &= -\sigma_{\theta\theta}^3 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (m\beta_n^2) (-1)^{(n-1)/2} \\ &\quad \cdot \cos m\theta \sin \beta_n z \{ F_{in} \{ (m-1) \\ &\quad \cdot I_m(\beta_n r) / (\beta_n r)^2 + I_{m+1}(\beta_n r) / (\beta_n r) \} \\ &\quad + E_{in} \{ (m-1) K_m(\beta_n r) / (\beta_n r)^2 \\ &\quad - K_{m+1}(\beta_n r) / (\beta_n r) \} \} \\ \sigma_{r\theta}^3 &= -\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n^2/2) (-1)^{(n-1)/2} \\ &\quad \cdot \sin m\theta \sin \beta_n z \{ F_{in} \{ I_m(\beta_n r) \\ &\quad \cdot [2m(m-1)/(\beta_n r)^2 + 1] \\ &\quad - 2 I_{m+1}(\beta_n r) / (\beta_n r) \} + E_{in} \\ &\quad \cdot \{ K_m(\beta_n r) [2m(m-1)/(\beta_n r)^2 + 1] \\ &\quad + 2 K_{m+1}(\beta_n r) / (\beta_n r) \} \} \\ \sigma_{rz}^3 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (m\beta_n^2/2) (-1)^{(n-1)/2} \\ &\quad \cdot \cos m\theta \cos \beta_n z \{ F_{in} I_m(\beta_n r) / (\beta_n r) \\ &\quad + E_{in} K_m(\beta_n r) / (\beta_n r) \} \\ \sigma_{zz}^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$\sigma_{\theta z}^3$ については省略した。

4. 特殊解および荷重条件

特殊解として3次元応力解を用い、その3次元応力解として拡張された Neuber の解を用いることにする。円柱座標系 (r, θ, z) における物体力が存在しない場合の拡張された Neuber の解は次のとおりである。

$$2Gu = -\text{grad}(\phi_0 + r\Phi) + 4(1-\nu)\Phi + 2\text{rot}\Psi \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= (u, v, w), \quad \mathbf{r} = (r, 0, z), \quad \Phi = (\phi_r, \phi_\theta, \phi_z) \\ \Psi &= (0, 0, \psi_z), \quad \nabla^2\phi_0 = 0, \quad \nabla^2\psi_z = 0, \quad \nabla^2\Phi = \mathbf{0} \\ \nabla^2 &\equiv \partial^2/\partial r^2 + (1/r)\partial/\partial r + (1/r^2)\partial^2/\partial\theta^2 + \partial^2/\partial z^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(13)$$

また、 G および ν は、それぞれせん断弾性係数およびポアソン比を表わすものとする。式 (13) より得られる変位ポテンシャルについては、すでに報告しているところであり⁶⁾、次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{0z} &= -\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta \{ (A_{ts}^{(1)} \cosh \alpha_{ms} z \\ &\quad + L_{ts}^{(1)} \sinh \alpha_{ms} z) J_m(\alpha_{ms} r) \\ &\quad + (A_{ts}^{(2)} \cosh \alpha_{ms} z \\ &\quad + L_{ts}^{(2)} \sinh \alpha_{ms} z) Y_m(\alpha_{ms} r) \} \\ \phi_z &= -\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta \{ (C_{ts}^{(1)} \sinh \alpha_{ms} z \\ &\quad + M_{ts}^{(1)} \cosh \alpha_{ms} z) J_m(\alpha_{ms} r) \\ &\quad + (C_{ts}^{(2)} \sinh \alpha_{ms} z \\ &\quad + M_{ts}^{(2)} \cosh \alpha_{ms} z) Y_m(\alpha_{ms} r) \} \\ \psi_z &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin m\theta \{ (B_{ts}^{(1)} \cosh \alpha_{ms} z \\ &\quad + G_{ts}^{(1)} \sinh \alpha_{ms} z) J_m(\alpha_{ms} r) \\ &\quad + (B_{ts}^{(2)} \cosh \alpha_{ms} z \\ &\quad + G_{ts}^{(2)} \sinh \alpha_{ms} z) Y_m(\alpha_{ms} r) \} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここで、

$$\alpha_{ms} = \lambda_{ms}/a, \quad \alpha_{ms} \neq 0 \quad (t=1, 3, \dots, s=1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots(15)$$

また、 m は式 (2) に示したものであり、 $A_{ts}^{(1)}, \dots, G_{ts}^{(2)}$ は荷重条件によって定まる未定数および λ_{ms} は境界条件によって定まる超越方程式の根である。さらに、 $J_m(\alpha_{ms} r)$ および $Y_m(\alpha_{ms} r)$ は、それぞれ、 m 位の第1種および第2種の Bessel 関数である。式 (14) に示した3つ以外の変位ポテンシャルは、特殊解が荷重条件のみを満たす解であるために、ここでは不要となる。

式 (14) の変位ポテンシャルを式 (12) に代入すると、変位成分が容易に得られ、特殊解であることを示すために、肩添字 p を付して表わすと次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu^p &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (\alpha_{ms}/2) \cos m\theta \{ J_{m-1}(\alpha_{ms} r) f_1(z) \\ &\quad - J_{m+1}(\alpha_{ms} r) f_2(z) + Y_{m-1}(\alpha_{ms} r) g_1(z) \\ &\quad - Y_{m+1}(\alpha_{ms} r) g_2(z) \} \\ 2Gv^p &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-\alpha_{ms}/2) \sin m\theta \{ J_{m-1}(\alpha_{ms} r) f_1(z) \\ &\quad + J_{m+1}(\alpha_{ms} r) f_2(z) + Y_{m-1}(\alpha_{ms} r) g_1(z) \\ &\quad + Y_{m+1}(\alpha_{ms} r) g_2(z) \} \\ 2Gw^p &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta \{ J_m(\alpha_{ms} r) f_3(z) \\ &\quad + Y_m(\alpha_{ms} r) g_3(z) \} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} f_1(z) &= (A_{ts}^{(1)} + 2B_{ts}^{(1)}) \cosh \alpha_{ms} z \\ &\quad + (L_{ts}^{(1)} + 2G_{ts}^{(1)}) \sinh \alpha_{ms} z \\ &\quad + C_{ts}^{(1)} z \sinh \alpha_{ms} z + M_{ts}^{(1)} z \cosh \alpha_{ms} z \\ f_2(z) &= (A_{ts}^{(1)} - 2B_{ts}^{(1)}) \cosh \alpha_{ms} z \\ &\quad + (L_{ts}^{(1)} - 2G_{ts}^{(1)}) \sinh \alpha_{ms} z \\ &\quad + C_{ts}^{(1)} z \sinh \alpha_{ms} z + M_{ts}^{(1)} z \cosh \alpha_{ms} z \\ f_3(z) &= \{ \alpha_{ms} A_{ts}^{(1)} - (3-4\nu) C_{ts}^{(1)} \} \sinh \alpha_{ms} z \\ &\quad + \{ \alpha_{ms} L_{ts}^{(1)} - (3-4\nu) M_{ts}^{(1)} \} \cosh \alpha_{ms} z \\ &\quad + C_{ts}^{(1)} \alpha_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z \\ &\quad + M_{ts}^{(1)} \alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(17)$$

また、 $g_1(z), g_2(z)$ および $g_3(z)$ は、それぞれ、式 (17) の $f_1(z), f_2(z)$ および $f_3(z)$ の式に含まれる未定数肩添字 (1) を (2) に置き換えた式である。

応力成分は、式 (16) の変位成分よりひずみ成分を求め、円柱座標系における応力-ひずみ関係式を用いることにより求められ、肩添字 p を付して表わすと、たとえば、次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz}^p &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{ms} \cos m\theta \{ J_m(\alpha_{ms} r) f_4(z) \\ &\quad + Y_m(\alpha_{ms} r) g_4(z) \} \\ \sigma_{rz}^p &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (\alpha_{ms}/2) \cos m\theta \{ J_{m-1}(\alpha_{ms} r) f_5(z) \\ &\quad - J_{m+1}(\alpha_{ms} r) f_6(z) + Y_{m-1}(\alpha_{ms} r) g_5(z) \\ &\quad - Y_{m+1}(\alpha_{ms} r) g_6(z) \} \\ \sigma_{\theta z}^p &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-\alpha_{ms}/2) \sin m\theta \{ J_{m-1}(\alpha_{ms} r) f_5(z) \\ &\quad + J_{m+1}(\alpha_{ms} r) f_6(z) + Y_{m-1}(\alpha_{ms} r) g_5(z) \\ &\quad + Y_{m+1}(\alpha_{ms} r) g_6(z) \} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(18)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} f_4(z) &= \{ \alpha_{ms} A_{ts}^{(1)} - 2(1-\nu) C_{ts}^{(1)} \} \cosh \alpha_{ms} z \\ &\quad + \{ \alpha_{ms} L_{ts}^{(1)} - 2(1-\nu) M_{ts}^{(1)} \} \sinh \alpha_{ms} z \\ &\quad + C_{ts}^{(1)} \alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z + M_{ts}^{(1)} \alpha_{ms} z \\ &\quad \cdot \cosh \alpha_{ms} z \\ f_5(z) &= \{ \alpha_{ms} (A_{ts}^{(1)} + B_{ts}^{(1)}) - (1-2\nu) C_{ts}^{(1)} \} \\ &\quad \cdot \sinh \alpha_{ms} z + \{ \alpha_{ms} (L_{ts}^{(1)} + G_{ts}^{(1)}) \} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 &-(1-2\nu)M_{ts}^{(1)}\} \cosh \alpha_{ms} z \quad C_{ts}^{(1)} \\
 &\cdot \alpha_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z + M_{ts}^{(1)} \alpha_{ms} z \\
 &\cdot \sinh \alpha_{ms} z \\
 f_6(z) = &\{ \alpha_{ms} (A_{ts}^{(1)} - B_{ts}^{(1)}) - (1-2\nu) C_{ts}^{(1)} \} \\
 &\cdot \sinh \alpha_{ms} z + \{ \alpha_{ms} (L_{ts}^{(1)} - G_{ts}^{(1)}) \\
 &- (1-2\nu) M_{ts}^{(1)} \} \cosh \alpha_{ms} z + C_{ts}^{(1)} \\
 &\cdot \alpha_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z + M_{ts}^{(1)} \alpha_{ms} z \\
 &\cdot \sinh \alpha_{ms} z
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

また、 $g_4(z)$, $g_5(z)$ および $g_6(z)$ は、それぞれ、式 (19) の $f_4(z)$, $f_5(z)$ および $f_6(z)$ の式に含まれる未定定数の肩添字 (1) を (2) に置き換えた式である。

求める変位および応力成分は、3. に示した 3 つの解と本節の特殊解とを相加したものであり、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 &u = u^1 + u^2 + u^3 + u^p \\
 &\sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}^1 + \sigma_{\theta z}^2 + \sigma_{\theta z}^3 + \sigma_{\theta z}^p
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

表面荷重は、図-1 に示したように、板の上面の中央に部分分布荷重が作用する場合を考えると、荷重条件は次のとおりである。

$$z = h/2 \text{ において} \\
 \sigma_{rz} = 0, \sigma_{\theta z} = 0, \sigma_{zz} = -p(r, \theta) \dots\dots\dots (21)$$

ここで、

$$p(r, \theta) = \begin{cases} q [(a+b-c)/2 < r < (a+b+c)/2 \\ \text{かつ } -\delta < \theta < \delta] \\ 0 \text{ [上記以外の場合]} \end{cases} \dots\dots\dots (22)$$

$$z = -h/2 \text{ において} \\
 \sigma_{rz} = 0, \sigma_{\theta z} = 0, \sigma_{zz} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

$\sigma_{rz}^1, \sigma_{rz}^2, \sigma_{rz}^3, \sigma_{\theta z}^1, \sigma_{\theta z}^2$ および $\sigma_{\theta z}^3$ が $z = \pm h/2$ において 0 となることに留意して、式 (21) および式 (23) の最初の 2 つの条件を式 (18) の σ_{rz}^p および $\sigma_{\theta z}^p$ に課すると、未定定数の間に次の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 &A_{ts}^{(1)} = C_{ts}^{(1)} (1-2\nu - \zeta_{ms} \coth \zeta_{ms}) / \alpha_{ms} \\
 &L_{ts}^{(1)} = M_{ts}^{(1)} (1-2\nu - \zeta_{ms} \tanh \zeta_{ms}) / \alpha_{ms} \\
 &A_{ts}^{(2)} = C_{ts}^{(2)} (1-2\nu - \zeta_{ms} \coth \zeta_{ms}) / \alpha_{ms} \\
 &L_{ts}^{(2)} = M_{ts}^{(2)} (1-2\nu - \zeta_{ms} \tanh \zeta_{ms}) / \alpha_{ms} \\
 &G_{ts}^{(1)} = 0, B_{ts}^{(1)} = 0, G_{ts}^{(2)} = 0, B_{ts}^{(2)} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

ここで、

$$\zeta_{ms} = \alpha_{ms} h/2 \dots\dots\dots (25)$$

式 (24) の最後の 4 つの式に示されているように、変位ポテンシャル ϑ_z に含まれていた未定定数がすべて 0 となったので、 ϑ_z は最初から除外しても解は得られることになるが、このことは、板の表面に作用する荷重が垂直荷重の場合に限り得られる結果であり、板の表面にせん断荷重が作用する場合には、重要な変位ポテンシャルとなる。板の表面にせん断荷重が作用する場合におい

ても、式 (12) から式 (19) に示した特殊解はなんら変わることなく、式 (24) に示した未定定数の関係式が単に異なるのみであり、特殊解として 3 次元応力解を用いたことがきわめて有利な結果をもたらしている。また、特殊解の導出において、Love⁹⁾ の理論あるいはその拡張理論である Hata^{16), 18)} および小林¹⁷⁾ の研究に見受けられる σ_{zz} の z に関する導関数を板の上、下面において 0 とする条件を用いる必要もない。

式 (24) の関係式により、特殊解に含まれていた未定定数は、 $C_{ts}^{(1)}$, $M_{ts}^{(1)}$, $C_{ts}^{(2)}$ および $M_{ts}^{(2)}$ の 4 つに減少したが、6. において述べる 2 円弧辺の境界条件を考慮して、ここで、さらに次の関係を設ける。

$$C_{ts}^{(2)} = -\epsilon_{ms} C_{ts}^{(1)}, M_{ts}^{(2)} = -\epsilon_{ms} M_{ts}^{(1)} \dots\dots\dots (26)$$

上式に含まれる ϵ_{ms} は、2 円弧辺の境界条件に応じて定められる定数であり、6. において具体化する。式 (24) から式 (26) の関係を用いて、式 (18) の σ_{zz}^p を書き直すと次式となる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}^p = &\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-\alpha_{ms}) \cos m\theta C_m(\alpha_{ms} r) \\
 &\cdot [C_{ts}^{(1)} \{ (1 + \zeta_{ms} \coth \zeta_{ms}) \cosh \alpha_{ms} z \\
 &- \alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z \} \\
 &+ M_{ts}^{(1)} \{ (1 + \zeta_{ms} \tanh \zeta_{ms}) \sinh \alpha_{ms} z \\
 &- \alpha_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z \}] \dots\dots\dots (27)
 \end{aligned}$$

ここで、 $C_m(\alpha_{ms} r)$ は次式で定義される m 位の円柱関数である。

$$C_m(\alpha_{ms} r) = J_m(\alpha_{ms} r) - \epsilon_{ms} Y_m(\alpha_{ms} r) \dots\dots (28)$$

$\sigma_{zz}^1, \sigma_{zz}^2$ および σ_{zz}^3 が恒等的に 0 であることに留意して、式 (21) および式 (23) の最後の条件を、式 (27) の σ_{zz}^p に課すると、未定定数 $C_{ts}^{(1)}$ および $M_{ts}^{(1)}$ が次式のように定められる。

$$C_{ts}^{(1)} = e_{ts} \varrho_{ms} / \alpha_{ms}, M_{ts}^{(1)} = e_{ts} \Gamma_{ms} / \alpha_{ms} \dots\dots\dots (29)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \varrho_{ms} = &\sinh \zeta_{ms} / \{ 2(\cosh \zeta_{ms} \sinh \zeta_{ms} + \zeta_{ms}) \} \\
 \Gamma_{ms} = &\cosh \zeta_{ms} / \{ 2(\cosh \zeta_{ms} \sinh \zeta_{ms} - \zeta_{ms}) \}
 \end{aligned} \dots\dots\dots (30)$$

さらに、 e_{ts} は、表面荷重 $p(r, \theta)$ を Fourier-Bessel 展開あるいは Fourier-Dini 展開したときの係数

$$p(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e_{ts} C_m(\alpha_{ms} r) \cos m\theta \dots\dots\dots (31)$$

ここで、

$$e_{ts} = \frac{\int_{-r}^r \int_a^b p(r, \theta) r C_m(\alpha_{ms} r) \cos m\theta dr d\theta}{\int_{-r}^r \int_a^b r C_m^2(\alpha_{ms} r) \cos^2 m\theta dr d\theta} \dots\dots\dots (32)$$

であり、超越方程式の根 λ_{ms} の選び方によって具体的

に表現されるので、6. において述べることにする。したがって、特殊解に含まれていた未定定数は、式 (24)、(26) および式 (29) によりすべて厳密に求められたことになり、変位および応力成分についての最終的な表現が得られるが、ここでは、3 つの変位成分と 2 円弧辺の境界条件に直接関係した応力成分 σ_{rr}^p 、 $\sigma_{r\theta}^p$ および σ_{rz}^p について示すことにする。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu^p &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (e_{ts}/\alpha_{ms}) \cos m\theta \{mC_m(\alpha_{ms}r) \\ &\quad /(\alpha_{ms}r) - C_{m+1}(\alpha_{ms}r)\} f_7(z) \\ 2Gv^p &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-e_{ts}/\alpha_{ms}) \sin m\theta (m/\alpha_{ms}r) \\ &\quad \cdot C_m(\alpha_{ms}r) f_7(z) \\ 2Gw^p &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-e_{ts}/\alpha_{ms}) \cos m\theta C_m(\alpha_{ms}r) \\ &\quad \cdot [\mathcal{Q}_{ms} \{ (2-2\nu + \zeta_{ms} \coth \zeta_{ms}) \\ &\quad \cdot \sinh \alpha_{ms}z - \alpha_{ms}z \cosh \alpha_{ms}z \} \\ &\quad + \Gamma_{ms} \{ (2-2\nu + \zeta_{ms} \tanh \zeta_{ms}) \\ &\quad \cdot \cosh \alpha_{ms}z - \alpha_{ms}z \sinh \alpha_{ms}z \}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^p &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e_{ts} \cos m\theta \{ [m(m-1)C_m(\alpha_{ms}r) \\ &\quad /(\alpha_{ms}r) + C_{m+1}(\alpha_{ms}r)] /(\alpha_{ms}r) f_7(z) \\ &\quad - C_m(\alpha_{ms}r) [\mathcal{Q}_{ms} \{ (1 - \zeta_{ms} \coth \zeta_{ms}) \\ &\quad \cdot \cosh \alpha_{ms}z + \alpha_{ms}z \sinh \alpha_{ms}z \} + \Gamma_{ms} \\ &\quad \cdot \{ (1 - \zeta_{ms} \tanh \zeta_{ms}) \sinh \alpha_{ms}z \\ &\quad + \alpha_{ms}z \cosh \alpha_{ms}z \}] \} \\ \sigma_{r\theta}^p &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-e_{ts}) \sin m\theta (m/\alpha_{ms}r) \\ &\quad \cdot \{ (m-1)C_m(\alpha_{ms}r) /(\alpha_{ms}r) \\ &\quad - C_{m+1}(\alpha_{ms}r) \} f_7(z) \\ \sigma_{rz}^p &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-e_{ts}) \cos m\theta \{ mC_m(\alpha_{ms}r) \\ &\quad /(\alpha_{ms}r) - C_{m+1}(\alpha_{ms}r) \} \\ &\quad \cdot \{ \mathcal{Q}_{ms} (\zeta_{ms} \coth \zeta_{ms} \sinh \alpha_{ms}z - \alpha_{ms}z \\ &\quad \cdot \cosh \alpha_{ms}z) + \Gamma_{ms} (\zeta_{ms} \tanh \zeta_{ms} \\ &\quad \cdot \cosh \alpha_{ms}z - \alpha_{ms}z \sinh \alpha_{ms}z) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

ここで、

$$\begin{aligned} f_7(z) &= \mathcal{Q}_{ms} \{ (1-2\nu - \zeta_{ms} \coth \zeta_{ms}) \cosh \alpha_{ms}z \\ &\quad + \alpha_{ms}z \sinh \alpha_{ms}z \} + \Gamma_{ms} \{ (1-2\nu \\ &\quad - \zeta_{ms} \tanh \zeta_{ms}) \sinh \alpha_{ms}z + \alpha_{ms}z \cosh \alpha_{ms}z \} \end{aligned} \dots\dots\dots (35)$$

5. 合応力および合モーメント

3. および 4. において求めた応力成分は、3 次元弾性論による解析と異なり、その成分によって境界条件を厳密に満足することは困難であるので、Saint-Venant の原理に基づいて、合応力および合モーメントにより境界

条件を規定することを考える。合応力および合モーメントは次式で定義される量とする。

$$\left. \begin{aligned} T_{rr}^q &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr}^q dz, \quad T_{\theta\theta}^q = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta}^q dz \\ S_{r\theta}^q &= -S_{\theta r}^q = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\theta}^q dz \\ Q_r^q &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rz}^q dz, \quad Q_\theta^q = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta z}^q dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

$$\left. \begin{aligned} M_r^q &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{rr}^q dz, \quad M_\theta^q = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{\theta\theta}^q dz \\ M_{r\theta}^q &= -M_{\theta r}^q = \int_{-h/2}^{h/2} (-z \sigma_{r\theta}^q) dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

ここで、肩添字 q は、1, 2, 3 および p を表わし、それぞれ、4 つの解に属する量であることを示す。これらの量の正の規約は、肩添字 q を落として 図-2 に示した。

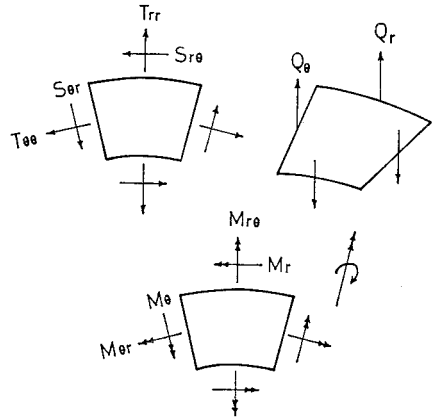


図-2 合応力および合モーメント

式 (36) の Q_r^q および Q_θ^q は、せん断力とよばれる合応力であり、式 (37) の M_r^q 、 M_θ^q および $M_{r\theta}^q$ 、 $M_{\theta r}^q$ は、それぞれ曲げモーメントおよびねじりモーメントとよばれる合モーメントである。

3. および 4. において求めた応力成分を式 (36) に代入すると、それぞれの合応力が求められる。一例として、 Q_r^p について示せば次のとおりである。

$$Q_r^p = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-e_{ts}/\alpha_{ms}) \cos m\theta \{ mC_m(\alpha_{ms}r) /(\alpha_{ms}r) - C_{m+1}(\alpha_{ms}r) \} \dots\dots\dots (38)$$

また、それぞれの応力成分を式 (37) に代入すると、それぞれの合モーメントが求められる。求める合応力および合モーメントは、肩添字 1 から p を付したそれぞれの量を相加したものであり、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} T_{rr} &= T_{rr}^1 + T_{rr}^2 + T_{rr}^3 + T_{rr}^p \\ M_r &= M_r^1 + M_r^2 + M_r^3 + M_r^p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

6. 境界条件

扇形平板の境界条件のうち、相対する2直線辺に関する条件は単純支持とする。厚板の単純支持とよばれる境界条件には、2様の規定の仕方があり、Donnell¹⁵⁾の著書に、両者とも薄板にちなんで単純支持の条件とよばれているが、実際的には、両者は性質の異なる条件であると記述されており、また、Nomachi¹⁾は、この両者をそれぞれヒンジ支持と単純支持とに区別しているが、ここでは、単純支持と通常よばれている2様の規定の仕方のうち、次の条件を採用する。

$$\theta = \pm r \text{ において} \\ T_{\theta\theta} = 0, u_0 = 0, (\partial u / \partial z)_{z=0} = 0, w_0 = 0, M_\theta = 0 \dots\dots\dots (40)$$

ここで、
 $u_0 \equiv u(r, \theta, 0), w_0 \equiv w(r, \theta, 0) \dots\dots\dots (41)$
 式(40)の最後の3つの条件が曲げに関する条件である。変位に関する条件は、いずれも板の中央面、すなわち、 $z=0$ において規定されているが、2直線辺に関する限りでは、式(2)に示したパラメーター m をもった余弦関数の特性によって任意の z に関して満足されるので、 z を規定する必要はない。式(40)の最初の条件および最後の条件もパラメーター m をもった余弦関数により満足されている。

2円弧辺の境界条件は、以下の3つの場合を考慮することにし、同次解としての(3)の解の n に関する級数は、Kromm¹²⁾ および Donnell¹⁵⁾ に従って、最初の項のみを用い、 $n=1$ と置く。

(1) 2円弧辺が自由の場合

$$r=a \text{ および } r=b \text{ において} \\ T_{rr} = 0, S_{r\theta} = 0, M_r = 0, Q_r = 0, M_{r\theta} = 0 \dots\dots\dots (42)$$

上式の最後の3つの条件が曲げに関する条件であり、Love⁹⁾の理論に見受けられる自由辺に関するKirchhoffの定理を用いる必要はない。この事実も、同次解に(3)の板の中央面に対して反対称の応力状態に関する解を追加して、未定定数の数を2つ増したことに起因している。式(42)の第4番目の条件に留意して、4.においてまだ定まっていなかった定数 ϵ_{ms} を

$$\epsilon_{ms} = [J_m'(\alpha_{ms}r)]_{r=a} / [Y_m'(\alpha_{ms}r)]_{r=a} \\ = J_m'(\lambda_{ms}) / Y_m'(\lambda_{ms}) \text{注1)} \dots\dots\dots (43)$$

と定め、 λ_{ms} を次の超越方程式

$$\left. \begin{aligned} J_m'(\kappa\lambda_{ms})Y_m'(\lambda_{ms}) - J_m'(\lambda_{ms})Y_m'(\kappa\lambda_{ms}) = 0 \\ \kappa = b/a \end{aligned} \right\}$$

注1) プライムは、 $\alpha_{ms}r$ あるいは λ_{ms} に関する対応した Bessel 関数の導関数を意味する。

$$\dots\dots\dots (44)$$

を満足する根として選ぶと、

$$C_m'(\lambda_{ms}) = 0, C_m'(\kappa\lambda_{ms}) = 0 \dots\dots\dots (45)$$

となり、式(38)に示した Q_r^p が $r=a$ および $r=b$ において0となるので都合がよい。 λ_{ms} が式(44)の根として定められたので、表面荷重 $p(r, \theta)$ の展開係数 e_{ts} は式(32)および式(45)より次のように求められる。

$$e_{ts} = (8q/t\pi) \sin(t\pi\delta/2r) [(\lambda_{ms}/2)(1+\kappa+\omega) \\ \cdot C_{m+1}\{(\lambda_{ms}/2)(1+\kappa+\omega)\} \\ - (\lambda_{ms}/2)(1+\kappa-\omega) C_{m+1}\{(\lambda_{ms}/2)(1+\kappa-\omega)\} \\ + m \int_{(a+b-c)/2}^{(a+b+c)/2} C_{m+1}(\alpha_{ms}r) d(\alpha_{ms}r)] / A_{ms}^1 \dots\dots\dots (46)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} A_{ms}^1 &= (\kappa^2\lambda_{ms}^2 - m^2) C_m^2(\kappa\lambda_{ms}) \\ &\quad - (\lambda_{ms}^2 - m^2) C_m^2(\lambda_{ms}) \\ \omega &= c/a \\ &\int_{(a+b-c)/2}^{(a+b+c)/2} C_{m+1}(\alpha_{ms}r) d(\alpha_{ms}r) \\ &= \left[\frac{\alpha_{ms}r}{2} \{ C_{m+1}(\alpha_{ms}r) S_m(\alpha_{ms}r) \right. \\ &\quad \left. - C_m(\alpha_{ms}r) S_{m+1}(\alpha_{ms}r) \right]_{(a+b-c)/2}^{(a+b+c)/2} \\ &\dots\dots\dots (47) \end{aligned} \right\}$$

ただし、上式中の m は偶数とし、 $S_m(\alpha_{ms}r)$ および $S_{m+1}(\alpha_{ms}r)$ は、それぞれ Schläfli の多項式であり、次式で表わされる。

$$S_p(\alpha_{ms}r) = \pi \sum_{r=p}^p [J_p(\alpha_{ms}r) Y_r(\alpha_{ms}r) \\ - J_r(\alpha_{ms}r) Y_p(\alpha_{ms}r)] \dots\dots\dots (48)$$

ただし、上式における p は m あるいは $m+1$ を表わす。

すでに示した $\sigma_{rr}^q, \sigma_{r\theta}^q$ および σ_{rz}^q を式(36)および式(37)に代入して得られた $T_{rr}^q, S_{r\theta}^q, Q_r^q, M_{r\theta}^q$ および M_r^q を式(39)に代入し、式(42)の境界条件を課すると、 $P_i^{(1)}, \dots, P_i^{(4)}$ に関する4元連立1次方程式と $Q_i^{(1)}, \dots, E_{t1}$ に関する6元連立1次方程式との独立な2組の連立1次方程式が得られるが、紙面数に限りがあるため、それらについての表示は省略する。

(2) 2円弧辺が単純支持の場合

単純支持の条件として、前述の条件を用いることにすると、次のとおりである。

$$r=a \text{ および } r=b \text{ において} \\ T_{rr} = 0, v_0 = 0, (\partial v / \partial z)_{z=0} = 0, w_0 = 0, M_r = 0 \dots\dots\dots (49)$$

ここで、

$$v_0 \equiv v(r, \theta, 0) \dots\dots\dots (50)$$

式 (49) における最後の 3 つの条件が曲げに関する条件である。第 3 番目の条件は、同次解に (3) の解を追加したために規定できるようになった条件である。式 (49) の第 4 番目の条件に留意して、未定定数 ϵ_{ms} を

$$\epsilon_{ms} = J_m(\lambda_{ms})/Y_m(\lambda_{ms}) \dots\dots\dots (51)$$

と定め、 λ_{ms} を次の超越方程式

$$J_m(\kappa\lambda_{ms})Y_m(\lambda_{ms}) - J_m(\lambda_{ms})Y_m(\kappa\lambda_{ms}) = 0 \dots\dots\dots (52)$$

の根として選ぶと、

$$C_m(\lambda_{ms}) = 0, C_m(\kappa\lambda_{ms}) = 0 \dots\dots\dots (53)$$

となり、式 (33) に示した w^p および v^p が $r=a$ および $r=b$ において 0 となるので都合がよい。 λ_{ms} が式 (52) の根であるときには、 $p(r, \theta)$ の展開係数 e_{ts} は、式 (32) および式 (53) より次のように求められる。

$$\begin{aligned} e_{ts} = & (8q/t\pi) \sin(t\pi\delta/2r) [(\lambda_{ms}/2)(1+\kappa+\omega) \\ & \cdot C_{m+1}\{(\lambda_{ms}/2)(1+\kappa+\omega)\} - (\lambda_{ms}/2)(1+\kappa-\omega) \\ & \cdot C_{m+1}\{(\lambda_{ms}/2)(1+\kappa-\omega)\} \\ & + m \int_{(a+b-c)/2}^{(a+b+c)/2} C_{m+1}(\alpha_{ms}r) d(\alpha_{ms}r)] / A_{ms}^2 \dots\dots\dots (54) \end{aligned}$$

ここで、

$$A_{ms}^2 = \lambda_{ms}^2 \{ \kappa^2 C_{m+1}^2(\kappa\lambda_{ms}) - C_{m+1}^2(\lambda_{ms}) \} \dots (55)$$

また、式 (54) に含まれる定積分は、式 (47) の第 3 式に示したものである。式 (3), (6), (10) および式 (33) に示した 4 つの解の変位成分、すでに示した σ_{rr}^q を式 (36) および式 (37) に代入して得られた T_{rr}^q および M_r^q を、それぞれ式 (20) および式 (39) に代入し、式 (49) の境界条件を課すると、(1) の場合と同じように、 $P_t^{(1)}, \dots, P_t^{(4)}$ に関する 4 元連立 1 次方程式と $Q_t^{(1)}, \dots, E_{t1}$ に関する 6 元連立 1 次方程式とが得られるが、それらについての表示は省略する。

(3) 2 円弧辺が固定の場合

$r=a$ および $r=b$ において

$$\left. \begin{aligned} u_0 = 0, v_0 = 0, w_0 = 0, (\partial u / \partial z)_{z=0} = 0 \\ (\partial v / \partial z)_{z=0} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (56)$$

上式における最後の 3 つの条件は、曲げに関する条件である。上式の第 3 番目の条件に留意すると、 ϵ_{ms} を式 (51) に示したように定め、 λ_{ms} を式 (52) の根とするのが都合よい。また、 $p(r, \theta)$ の展開係数 e_{ts} は、式 (54) に示したものとす。式 (3), (6), (10) および式 (33) に示した 4 つの解の変位成分を式 (20) に代入して、式 (56) の境界条件を課すると、先の 2 つの場合と同じように、 $P_t^{(1)}, \dots, P_t^{(4)}$ に関する 4 元連立 1 次方程式と $Q_t^{(1)}, \dots, E_{t1}$ に関する 6 元連立 1 次方程式とが得られるが、それらについての表示は省略する。

7. 数値計算例および考察

数値計算例として、中心角 $2r$ が $\pi/2$ 、円弧辺の外側半径 b と内側半径 a との比 b/a が 8.0、直線辺長 d および板厚 h の扇形平板が、中心角 2δ が $\pi/8$ および縦幅 c と直線辺長 d との比 c/d が 0.25 の扇形領域上に部分分布した強度 q の荷重を担った場合を取り扱った。2 円弧辺の境界条件として自由および単純支持の両者を扱い、直線辺長 d と板厚 h との比 (板厚比) $e = d/h$ を種々変化させ、ポアソン比 ν は 0.17 を取り、級数の項数は、 t については奇数のみ 14 項および s については 70 項取り計算した。

(1) 本厚板理論の精度の検証

最近では、2. において述べた種々の厚板理論の精度に関する検証が進み、たとえば、文献 2), 22) および文献 23) において、厳密な 3 次元弾性論による解析との比較を通して詳しく検討されている。したがって、ここでは、本厚板理論とすでに見受けられる種々の厚板理論との比較を行い、その優劣について論ずることは避ける。しかしながら、前節までに述べてきた一厚板理論は、その本質的な考え方を Love の理論に負い、さらに、その Love の理論の一改良理論とも目されるので、ここでは、すでに報告している厳密な 3 次元弾性論による解析⁶⁾、Love の理論による解析および本厚板理論による解析の 3 者の比較を通して、本厚板理論の精度および改良性について検討する。2 円弧辺の境界条件は自由とし、前述した荷重条件、形状比およびポアソン比をもった扇形平板を対象にする。

図-3 および 図-4 には、それぞれ、 $e=5.0$ の場合の $\theta=\pi/8$ におけるねじりモーメント $M_{\theta r}$ および $\theta=0$ におけるせん断力 Q_r の比較を示した。Love の理論による Q_r の $r=a$ における値は、有限値ではあるが、図には示されていない。これらの図から、Love の理論と本厚板理論とにおける自由辺の境界条件の相違が、自由辺はもとより、自由辺よりかなり離れた板内部における $M_{\theta r}$ および Q_r の値に対しても少なからぬ影響を及ぼしていることがわかる。図-5 から 図-8 には、本厚板理論がどの程度の板厚をもった平板に実際に適用できるのかを検討する意味もあり、 $e=2.0$ の極度に厚い扇形平板の解析結果を示した。図-5 には、 $\theta=0$ および $r/a = 9/2$ における σ_{r2} の比較を示した。Love の理論による結果が、3 次元弾性論による結果と大きな相違を示すのに反し、本厚板理論による結果はきわめてよく一致していることがわかる。 $z=0$ において、3 次元弾性論による結果と比較すると、Love の理論による結果が 33%

の大きな相違を示すのに対し、本厚板理論による結果は、わずかに -0.6% の相違を示すに過ぎない。図-6には、 $\theta=\pi/8$, $r/a=11/4$ における $\sigma_{r\theta}$ の比較を示した。この図においても、Love の理論による結果が、3次元弾性論による結果と大きな相違を示すのに反し、本厚板理論による結果はきわめてよく合致していることがわかる。 $z=h/2$ において、3次元弾性論による結果と比較すると、Love の理論による結果が -18% の相違であるのに対し、本厚板理論による結果は 1% の相違である。

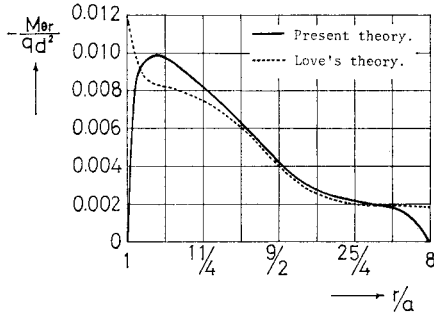


図-3 $M_{\theta r}$ の比較 ($\theta=\pi/8$, $e=5.0$)

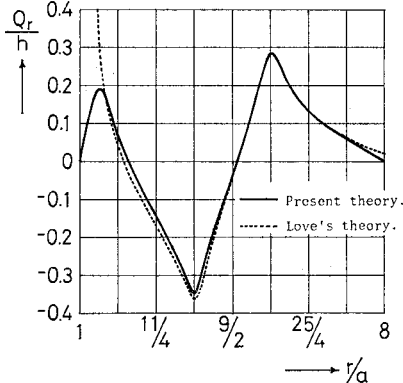


図-4 Q_r の比較 ($\theta=0$, $e=5.0$)

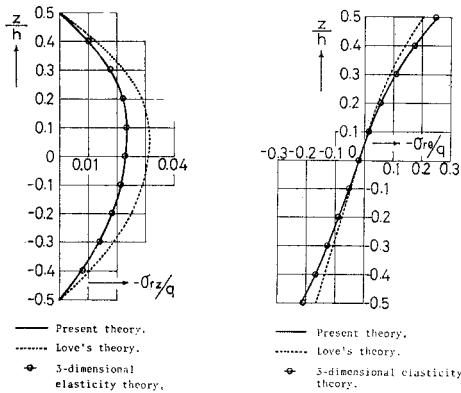


図-5 σ_{rz} の比較 ($\theta=0$, $r/a=9/2$, $e=2.0$)

図-6 $\sigma_{r\theta}$ の比較 ($\theta=\pi/8$, $r/a=11/4$, $e=2.0$)

図-7には、 $r/a=9/2$ における σ_{rr} の比較を示した。本厚板理論による結果が、3次元弾性論による結果ときわめてよく合致していることがわかる。荷重の作用している板の上面 ($z=h/2$) における応力成分の値は、3次元弾性論による解析の場合においても、収束がきわめて遅く、その結果に数%の誤差を含んでいるとみられ、板の上面においては、両者の結果に少々の相違がでている。図-8には、 $\theta=0$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の比較を示した。この図においても、本厚板理論による結果が、3次元弾性論による結果ときわめてよく合致していることがわかる。板の上面における両者の相違は、図-7において述べた原因によるものと思われる。図-7および図-8には、Love の理論による結果を示していないが、その結果は、本厚板理論による結果とほぼ同じであり、 σ_{rr} および $\sigma_{\theta\theta}$ に及ぼす自由辺の条件の相違の影響は、比較的小さいようである。図-9には、板の上面に作用する部分分布荷重を Fourier-Dini 展開して、前述した級数の項数を用いて計算したときの、荷重の数値的な分布形状を示した。Fourier 級数展開における Gibbs 現象に類似した現象が現われるが、分布領域の境界より離れた位置においては、きわめてよく収束していることがわかる。

図-3 から図-9 を通し、本厚板理論がきわめて厚い平板にも適用できる精度の高い理論であり、また、Love の理論の難点を改良した理論となっていることを示せたと考える。しかしながら、本厚板理論も他の厚板理論と同様に、Saint-Venant の原理に立脚して境界条件を規

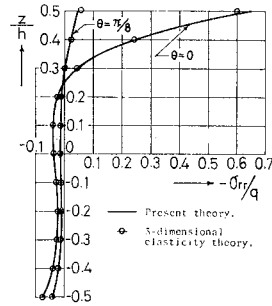


図-7 σ_{rr} の比較 ($r/a=9/2$, $e=2.0$)

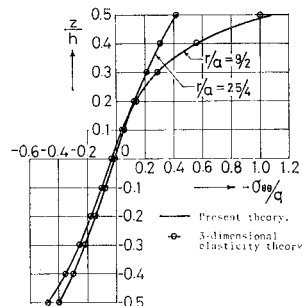
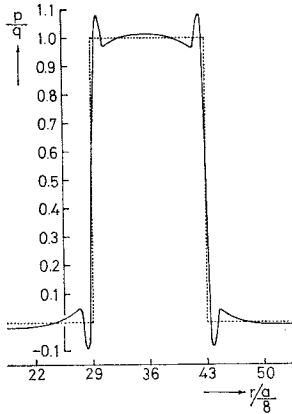
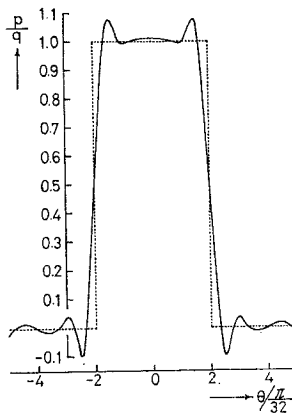


図-8 $\sigma_{\theta\theta}$ の比較 ($\theta=0$, $e=2.0$)



(a) $\theta=0$ における r 方向の形状



(b) $r/a=9/2$ における θ 方向の形状

図—9 表面荷重の分布形状

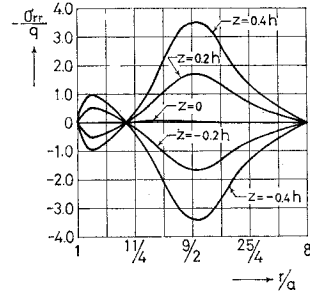
定している以上、板の周辺およびその近傍においては、変位および応力成分の値が不正確になることはない。

(2) 周辺単純支持の扇形平板に関する数値結果

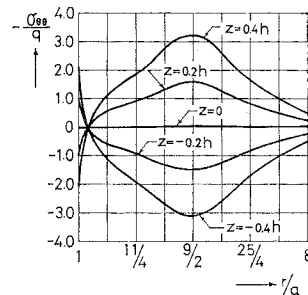
前述した荷重条件、形状比およびポアソン比をもった周辺単純支持の扇形平板の解析結果を以下に示す。

図—10 には、 $e=8.0$ の場合に関する $\theta=0$ における σ_{rr} の r 方向の変化を示した。 $r=a$ および $r=b$ における σ_{rr} の値は、境界条件を合応力で規定しているために、理論的には 0 とならないが、数値的には、内部の最大値と比較して、 $r=a$ において 2 ないし 3 オーダおよび $r=b$ において 3 ないし 4 オーダ落ちたきわめて小さな値であり、図には 0 と表示されている。 $e=8.0$ の板厚が比較的小さい場合であるため、板の中央面 ($z=0$) における値はきわめて 0 に近く、また、その分布は中央面に対してほぼ対称となっている。図—11 には、 $e=8.0$ の場合に関する $\theta=0$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の r 方向の変化を示した。板の中央面における値はきわめて 0 に近く、そ

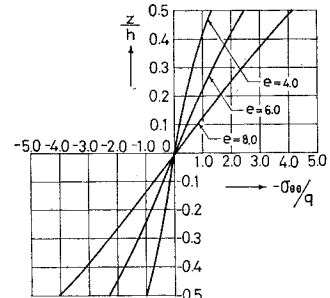
の分布は中央面に対してほぼ対称となっている。また、 $b/a=8.0$ の外側円弧辺長に対し内側円弧辺長がきわめて小さい扇形平板であるために、 $r=a$ における値は、応力集中の傾向を示している。図—12 には、 $\theta=0$ および $r/a=9/2$ における σ_{rr} の z 方向の変化を示した。



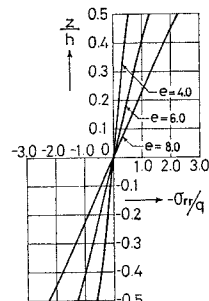
図—10 $\theta=0$ における σ_{rr} の分布 ($e=8.0$)



図—11 $\theta=0$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の分布 ($e=8.0$)



図—12 σ_{rr} の分布 ($\theta=0, r/a=9/2$)



図—13 σ_{rr} の分布 ($\theta=\pi/8, r/a=9/2$)

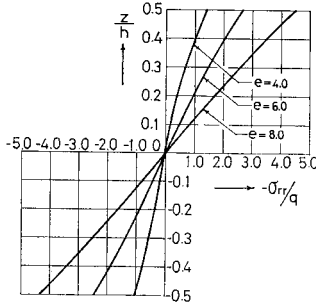


図-14 σ_{00} の分布 ($\theta=0, r/a=9/2$)

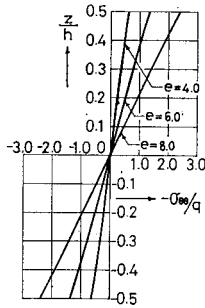


図-15 σ_{00} の分布 ($\theta=0, r/a=11/4$)

$e=8.0$ の場合に関しては、ほぼ直線分布となっているが、 $e=4.0$ および $e=6.0$ の場合に関する分布は、直線分布とある程度のへだたりを示している。図-13 には、荷重領域を離れた、 $\theta=\pi/8$ および $r/a=9/2$ における σ_{rr} の z 方向の変化を示した。図-12 と比較すると、値が少し小さくなっており、また、その分布はいくぶん直線分布に近づいている。この現象は、板の上面に作用している荷重が部分分布荷重であるために生じていると考えられ、厚板理論の適用性が板厚 e のみならず荷重条件によっても制約されることを意味する結果として興味深い。図-14 および 図-15 には、それぞれ、 $\theta=0, r/a=9/2$ および $\theta=0, r/a=11/4$ における σ_{00} の z 方向の変化を示した。図-12 および 図-13 について述べたことが、これらの図においても示されている。図-16 には、 $\theta=0$ および $r/a=9/2$ における σ_{rz} の z 方向の変化を示した。この図には、 $e=8.0$ の場合に関する σ_{rz} の分布はきわめて放物線分布に近いが、 $e=4.0$ および $e=6.0$ の場合に関する分布は、正確には放物線分布になっていないことが示されており、2. において述べた種々の厚板理論に多く見受けられた2つの面外せん断応力の板厚に沿っての分布を放物線分布とする仮定は、比較的薄い厚板に対してでなければ、正確には適用しがいことを示している結果として興味深い。表-1 には、 $\theta=0$ および $r/a=9/2$ の板の中央面 ($x=0$) における面外変位 w_0 および $z=\pm h/2$ における面外変位 w と w_0 との比を種々の e について示した。この表には、

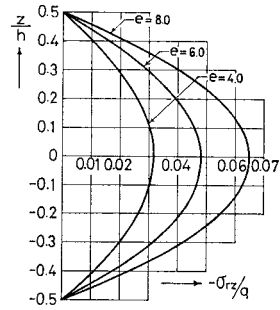


図-16 σ_{rz} の分布 ($\theta=0, r/a=9/2$)

表-1 $z=0$ および $z=\pm h/2$ における w
($\theta=0, r/a=9/2$)

e	w	$-w_0/qd/E$	w/w_0	
			$z=h/2$	$z=-h/2$
2.0	0.135 3		2.160	0.761
4.0	0.661 4		1.120	0.933
6.0	1.901 4		1.019	0.974
8.0	4.216 1		1.002	0.987
10.0	7.965 0		0.998	0.992
12.0	13.507 0		0.998	0.995

$e=6.0$ の場合に関しても、板の中央面と下面 ($z=-h/2$) とにおける w には -3% の相違があることが示されており、2. において述べた種々の厚板理論に多く見受けられた板厚方向の垂直ひずみを0として、 w を板厚に沿って一定とする仮定は、比較的薄い厚板に対してでなければ、正確には適用しがいことを示している結果として興味深い。

(3) 薄板理論との比較

本厚板理論による解析結果と薄板理論によるそれとの比較は、本論文の直接的な目的ではないが、長方形板について一般的にいわれている薄板理論の適用性が、幾何形状が異なる扇形平板においてはいかになるかを検討することは工学的に意義あることと考えられる。2円弧辺の境界条件は単純支持とし、前述した荷重条件、形状比およびポアソン比をもった扇形平板を対象にする。

表-2 には、 $r/a=9/2, \theta=0$ あるいは $\theta=\pi/8$ における曲げモーメント M_r 、ねじりモーメント $M_{r\theta}$ およびせん断力 Q_r の薄板理論から得られたそれらによる比を種々の e に関して示した。ここで、薄板理論による断面力は、

$$M_{r,cl} = -0.011 10 qd^2$$

$$M_{r\theta,cl} = -0.001 335 qd^2$$

$$Q_{r,cl} = -0.005 543 qd$$

である。 $e=10.0$ の場合に関する M_r および $M_{r\theta}$ の比はきわめて1.0に近く、 Q_r がわずかに -2% 異なるのみである。表-3 には、 $r/a=9/2, \theta=0$ あるいは $\theta=\pi/8$

表-2 断面力の薄板理論との比較
($r/a=9/2$)

断面力の比 e	$(M_r/M_{r,cl.})_{\theta=0}$	$(M_{r\theta}/M_{r\theta,cl.})_{\theta=\pi/8}$	$(Q_r/Q_{r,cl.})_{\theta=0}$
4.0	1.049	1.011	0.939
6.0	1.021	1.011	0.961
8.0	1.012	1.003	0.974
10.0	1.008	1.003	0.981
12.0	1.005	1.003	0.986

表-3 応力成分の薄板理論との比較
($r/a=9/2$)

応力成分の比 e	$(\sigma_{rr}/\sigma_{rr,cl.})_{\theta=0, z=h/2}$	$(\sigma_{r\theta}/\sigma_{r\theta,cl.})_{\theta=\pi/8, z=h/2}$	$(\sigma_{rz}/\sigma_{rz,cl.})_{\theta=0, z=0}$
4.0	1.331	1.120	0.950
6.0	1.110	1.039	0.965
8.0	1.054	1.021	0.975
10.0	1.033	1.014	0.983
12.0	1.023	1.010	0.987

表-4 w_0 の薄板理論との比較
($\theta=0, r/a=9/2$)

e	$w_0/w_{cl.}$	単純支持	自由
4.0		1.383	1.135
6.0		1.178	1.070
8.0		1.102	1.044
10.0		1.066	1.031
12.0		1.046	1.024

および $z=0$ あるいは $z=h/2$ における σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ および σ_{rz} に関する両者の比を示した。ここで、薄板理論による値は、

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,cl.}/q &= -0.01110 \times 6 e^2 \\ \sigma_{r\theta,cl.}/q &= 0.001335 \times 6 e^2 \\ \sigma_{rz,cl.}/q &= -0.005543 \times 1.5 e \end{aligned}$$

である。応力成分に及ぼす e の影響は、比較的顕著であり、 $e=10.0$ の場合に関しても、 σ_{rr} については3%の相違が見受けられる。表-2 および 表-3 に対応した2円弧辺自由の場合に関する表の提示は省略するが、この境界条件の場合の $e=10.0$ に関する $r/a=9/2$ における両者の比を示すと、

$$\begin{aligned} (M_r/M_{r,cl.})_{\theta=0} &= 1.004 \\ (M_{r\theta}/M_{r\theta,cl.})_{\theta=\pi/8} &= 1.018 \\ (Q_r/Q_{r,cl.})_{\theta=0} &= 0.913 \\ (\sigma_{rr}/\sigma_{rr,cl.})_{\theta=0, z=h/2} &= 1.055 \\ (\sigma_{r\theta}/\sigma_{r\theta,cl.})_{\theta=\pi/8, z=h/2} &= 1.016 \\ (\sigma_{rz}/\sigma_{rz,cl.})_{\theta=0, z=0} &= 0.914 \end{aligned}$$

となり、 Q_r および σ_{rz} については -9% の相違が見受けられ、2円弧辺単純支持の場合に比較して、 e の影響がいくぶん強く現われている。この結果は、薄板理論の適用性が板厚比 e のみならず境界条件によっても制約されることを示しており、1つの興味ある解析結果と思われる。表-4 には、 $\theta=0$ および $r/a=9/2$ における w_0

と薄板理論による $w_{cl.}$ との比を、2円弧辺単純支持および2円弧辺自由の両者について示した。ここで、薄板理論による $w_{cl.}$ は、

$$w_{cl.} = \begin{cases} -6.4112 \times 10^{-4} \times 11.653 e^3 qd/E \\ \quad [2 \text{円弧辺単純支持}] \\ -2.9544 \times 10^{-3} \times 11.653 e^3 qd/E \\ \quad [2 \text{円弧辺自由}] \end{cases}$$

である。この表から、 w_0 に及ぼす e の影響はきわめて大きく、また、断面力および応力成分の場合とは逆に、2円弧辺単純支持の w_0 の方がいくぶん強く影響されており $e=10.0$ の場合に関しても6%の相違があることがわかる。

表-2 から 表-4 を通して、ここで解析した扇形平板に限っては、薄板理論が、10以上の板厚比 e をもった扇形平板に比較的正確に適用され得ることが示され、薄板理論の板厚比に関する適用限界として、長方形板に関して一般的にいわれている $e \geq 10$ を裏付ける結果が得られた。しかしながら、周辺固定の長方形板に関する島田・岡村³⁾の研究に見受けられるように、 $e \geq 5$ とする報告もあり、板厚比、荷重条件、境界条件およびポアソン比などの因子をさまざまに変えあるいは組み合わせ、もし可能であるならば3次元弾性論による解析との比較を通して、まことに広範でしかも精密な研究を行わねば、薄板理論の実用的な適用限界については明言できないように思われる。

8. 結 語

比較的厚い扇形平板あるいは円形板の非軸対称問題を解析する際に有効となる一厚板理論を提案し、その理論に基づいて、上面に部分分布荷重を受けた扇形平板の曲げを解析し、工学的に有用と思われる2,3のデータを提示した。

本論文で提案した一厚板理論の本質的な考え方は、直交座標系において展開されたLoveの理論に負うものであることは前述したが、Loveの理論に見受けられる1つの難点が、3次元応力解の一部を用いることにより容易にしかも有利に解決されることを4.において示し、もう1つの難点が、同次解としての2つの解にさらにもう1つの解を追加することにより解決され、その結果がLoveの理論を著しく改良するものであることを7.において示した。本論文で述べた円柱座標系におけるこの厚板理論は、もちろん、Loveの理論の長所に反するものではなく、同次解としての3つの解および特殊解としての3次元応力解は、すべてのつり合い方程式、適合条件式および応力-ひずみ関係式を満足しており、変位あるいは応力成分に関するなんらの仮定も含んでいない。

また、厚板として考慮されるべき板厚方向の垂直ひずみ、垂直応力および2つの面外せん断応力の曲げに及ぼす効果は、同次解および特殊解において取り入れられており、この事実が、仮定を含まない弾性論的に厳密な解であることと相まって、板厚比 d/h が2となるほどのきわめて厚い平板に対してもこの厚板理論が適用できた要因となっている。すでに報告されている種々の厚板理論に多く見受けられる板厚方向の垂直ひずみを0とする仮定および2つの面外せん断応力の板厚に沿った分布を放物線分布とする仮定は、板厚比 d/h が6以上の比較的薄い厚板に対してでなければ、正確には適用しがたいことを7.において示した。

また、この厚板理論による解析と薄板理論によるそれとの比較においては、薄板理論の板厚比に関する適用限界として、長方形板について一般的にいわれている板厚比10以上の目安は、長方形板と幾何形状が異なる扇形平板についても、実用的には一往の目安となることを7.において示し、境界条件の相違がその適用限界にある種の影響を及ぼすことも併せて示した。さらに、7.において提示した2円弧辺が単純支持あるいは自由の比較的厚い扇形平板に関するデータは、鉄筋コンクリート床版のもつ弾性的異方性、材料的不均質性およびひびわれの影響などを考慮していない近似のおよび巨視的な基礎データであるが、扇形平板に関するデータが、現時点においてきわめて少ないことを考えると、十分に意義あると考えている。

参 考 文 献

- 1) Nomachi, S. : On elastic behavior along simply supported edges of rectangular plates, *Memoirs of the Muroran Institute of Technology*, Vol. 3, No. 2, pp. 349~371, 1959.
- 2) Srinivas, S., A.K. Rao and C.V.J. Rao : Flexure of simply supported thick homogeneous and laminated rectangular plates, *Z.A.M.M.*, Band 49, pp. 449~458, 1969.
- 3) 島田 功・岡村宏一 : 厚い長方形スラブの応力と変形, *土木学会論文報告集*, No. 233, pp. 13~23, 1975.
- 4) 園田恵一郎・堀川都志雄 : 道路橋床版の輪荷重直下の応力の算定について, *土木学会論文報告集*, No. 273, pp. 15~22, 1978.
- 5) Sonoda, K. and T. Horikawa : Displacement functions for an orthotropic elastic body and their applications to thickplate problems, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 29, pp. 117~126, 1981.
- 6) Okumura, I.A. and K. Miyake : On stresses and displacements in a thick circular ring sector plate based on the three-dimensional theory of elasticity, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 29, pp. 127~138, 1981.
- 7) Woinowsky-Krieger, S. : Der Spannungszustand in dicken elastischen Platten, *Ing.-Arch.*, Band 4, pp. 203~226, 1933.
- 8) Love, A.E.H. : *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Chap. XXII, 4th ed., Dover Pub., 1944.
- 9) Reissner, E. : The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech.*, Vol. 12, pp. A 69~A 77, 1945.
- 10) Hencky, H. : Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten, *Ing.-Arch.*, Band 16, pp. 72~76, 1947.
- 11) Mindlin, R.D. : Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *J. Appl. Mech.*, Vol. 18, pp. 31~38, 1951.
- 12) Kromm, A. : *Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik*, *Ing.-Arch.*, Band 21, pp. 266~286, 1953.
- 13) アムバルツマン, S.A. (神谷紀生訳) : 異方弾性板の理論, 第2章および第3章, 森北出版, 1975.
- 14) Panc, V. : *Theories of Elastic Plates*, Chap. 2, Noordhoff, 1975.
- 15) Donnell, L.H. : *Beams, Plates and Shells*, Chap. 5, McGraw-Hill, 1976.
- 16) Hata, K. : On the thick plate problem, *Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Univ.*, Vol. 9, No. 3, pp. 428~477, 1953 and Vol. 9, No. 4, pp. 487~563, 1954.
- 17) 小林道明・長沢 徹・石川博将・秦 謹一 : 厚板理論による片持長方形板の三次元応力解析, *機械学会論文集*, 第47巻421号(A編), pp. 888~898, 1981.
- 18) Hata, K. : On the circular thick plate stressed by generally distributed load, *Proc. 2nd Japan Nat. Cong. Appl. Mech.*, pp. 117~120, 1952.
- 19) たとえば, Frederick, D. : On some problems in bending of thick circular plates on an elastic foundation, *J. Appl. Mech.*, Vol. 23, pp. 195~200, 1956.
- 20) Sonoda, K. and T. Horikawa : Three-dimensional stress analysis of thick rectangular plate stiffened with beams, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 26, pp. 165~171, 1978.
- 21) たとえば, Deresiewicz, H. and R.D. Mindlin : Axially symmetric flexural vibrations of a circular disk, *J. Appl. Mech.*, Vol. 22, pp. 86~88, 1955.
- 22) 平島健一・村松正重 : 板厚方向の成分を考慮した平板曲げの理論, *土木学会論文報告集*, No. 304, pp. 33~46, 1980.
- 23) たとえば, Lo, K.H., R.M. Christensen and E.M. Wu : A high-order theory of plate deformation, *J. Appl. Mech.*, Vol. 44, pp. 663~668, 1977.
- 24) 斎藤秀雄 : 短円柱および円盤の軸対称変形(続), *機械学会論文集*, 第20巻91号(第1部), pp. 185~190, 1954.
- 25) Gupta, A.P. and Neelam Mishra : Effect of secondary terms on axisymmetric vibration of circular plates, *J. Eng. Math.*, Vol. 14, pp. 101~106, 1980.
- 26) Prasad, C. and A.P. Gupta : Asymmetric vibration of circular sandwich plates, *Indian J. pure appl. Math.*, Vol. 10, pp. 1002~1008, 1979.
- 27) Cheung, Y.K. and W.L. Kwok : Dynamic analysis of circular and sector thick, layered plates, *J. Sound and Vibration*, Vol. 42, pp. 147~158, 1975.
- 28) 奥村 勇 : 円柱座標系における平面応力問題の2, 3の解について, *北見工業大学研究報告*, 第12巻2号, pp. 225~238, 1981.
- 29) 吉田耕作ほか : *応用数学便覧*, p. 408, 丸善, 1967.