

鉛直加振を受ける杭の応答特性に関する研究

STUDY ON RESPONSE CHARACTERISTICS OF A PILE
UNDER VERTICAL EXCITATION小長井 男*
By Kazuo KONAGAI

1. 緒 言

杭基礎の水平方向振動特性に関しては、地震工学の分野で地盤と杭基礎の相互作用を解明する観点から Penzien¹⁾以来枚挙に暇のないほど多くの研究がなされ、大きな成果が得られているが、鉛直方向の振動特性に関しては、Nogami と Novak²⁾の論文を皮切りに数年ようやく詳細に立ち入った研究^{3)~5)}がなされるようになった観がある。

水平、鉛直を問わず、このような杭基礎の振動特性に関する既往の研究は大きく 2 つの手法に分類できる。第 1 は弾性波動論を用い、杭基礎および地盤を一体として連続系のまま解析する方法であり、第 2 は杭基礎と地盤を、それぞれ質量、ばね、ダッシュポットから成る多質点系に置換するか、あるいは有限要素法により解析するものである。

第 1 の手法では、モデルが 2 次元、ないし 3 次元的に無限の広がりをもつことから波動の地下逸散による諸現象をかなり厳密に表現し得る反面、解析解を求め得る系の境界条件が、きわめて単純で特殊なものに限定される。Nogami や Novak²⁾による研究も、この第 1 の手法に属するものであり、地盤を剛体基盤上に一樣な厚さの線形粘弾性体とみなせる表層を載せたものとし、そこに打ち込まれた杭に解析の対象を絞っている。その他、田治見⁶⁾、土岐⁷⁾、堯天ほか⁸⁾、原田・久保⁹⁾等々、同じくこの第 1 の手法に属する数々の研究も、地盤の取扱いは Nogami と Novak²⁾ 同様か、あるいはこれを半無限等方弾性体とみなしているものが多い。

これに対し第 2 の手法では複雑な地盤の層構造、非線形性等の条件を容易にモデルに組み入れることができ、簡便で適用性に富んだものとして広く用いられている(たとえば文献 9), 10) 等)。しかしこの手法では有限な

モデルの解析を行うために、波動の地下逸散を合理的に表現し得る数値計算上の諸定数の設定が困難である。

以上 2 つの手法は、互いに相反する特徴を有するが、それぞれの欠点を克服しようとする試みにも近年めざましいものがある。田村・中村・加藤¹¹⁾や赤尾・伯野¹²⁾は、有限要素法において衝撃波入力の場合、解析上有害な境界面での反射波を除去する手法を提唱し、有限要素法の適用の可能性をより広い分野に拡張した。また地盤は連続体とみなすが杭は多質点系とすることで、簡便な多質点系の解析に波動逸散の効果をも含ませようとする試みが伯野¹³⁾によりなされている。伯野は、Penzien¹⁾の提唱した手法に用いられている Mindlin¹⁴⁾の式を動的なものに置き換えることで、先に述べた 2 つの手法それぞれの長所を結びつけた杭の水平方向周波数応答特性の解析法を提示した。しかしこの方法では Penzien¹⁾の手法と同様、各質点を支持する地盤の反力係数を求めるうえで、弾性体内の点載荷に伴う弾性体内変位を用いることになり、反力係数値の妥当性に疑問が残る^{15)~16)}。

著者は、この伯野¹³⁾の発想を踏まえ、さらに新たな地盤反力係数の設定法を導入し、第 1 の手法と第 2 の手法の長所を併せもった杭の鉛直方向周波数応答解析モデルを提唱する。本論文はこのモデルの詳細に触れるとともに、ある特殊な境界条件下の杭の変位応答について、本手法による近似解と厳密解の比較、および実地盤に打ち込まれている PC 杭杭頭加振に伴う加速度応答について、近似解と実測値の比較を行い、その適用上の妥当性、限界等を検討したものである。

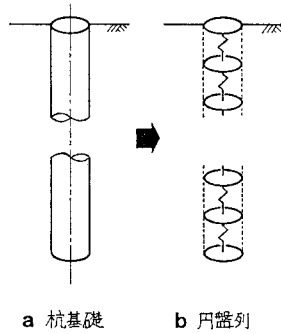
2. 杭の鉛直方向周波数応答解析モデル

(1) 概 要

本論文で提唱する杭基礎の鉛直方向周波数応答解析モデルでは、波動の地下逸散の影響を組み入れるため、地

* 正会員 工博 長岡技術科学大学助教授

盤は3次元的な広がりをもつ連続体とし、杭本体は多質点系とする。この多質点系は図-1(b)に示すように、線形なばねで結合され、対象とする杭(図-1(a))と同じ半径を有する有限個の円盤の列である。この地盤内に挿入された円盤列の長さは対象とする杭の長さ



a 杭基礎 b 円盤列
図-1 杭基礎のモデル化

等しく、したがって底部の円盤に関する地盤の反力係数が、この杭の先端支持力に深く関わることになる。各円盤の質量、および各円盤を結ぶばねのばね定数は従来の多質点系のモデルと異なり、この円盤列にさらに図-1(b)に破線で囲んだ土の円柱をも付加した状態で初めて対象とする杭と等価な力学的特性を有するように設定される。さらに各円盤は剛体であることが肝要である。円盤が剛であれば円盤の間に挟まれた土の円柱は円盤に拘束され一様に軸方向に振動し、この土の円柱を付加した円盤列の半径方向にはせん断波が逸散するので、杭柱表面より放射されるせん断波の影響をモデルに組み入れることが可能となる。

したがって本モデルにおいては、1枚の剛体円盤を支持する地盤の反力係数、あるいはその逆数である地盤の変形係数を求めることができれば、以後周知の多質点系の解析手法で杭の鉛直方向の周波数応答特性を解明することが可能となる。本論文ではこの円盤を支持する地盤の変形係数を求めるうえで、地盤を無限等方弾性体と仮定する。この際地表面の影響は円盤の鏡像を置くことで表現する。またこのような仮定から本手法は本質的には半無限等方弾性体内の周辺摩擦抗とみなせる系に対し適用すべきであるが、支持層をもつ地盤内の杭基礎等への適用に関しては、その状況に応じた修正を施す必要があり、その詳細に関しては3., 4.で言及することにする。

(2) 剛体円盤を支持する地盤の変形係数

前節の仮定に基づき無限等方弾性体内の1枚の剛体円盤に焦点を絞り変形係数の誘導を行う。このためには、無限弾性体内の質量0の剛体円盤の中心に軸方向振動荷重 $Qe^{i\omega t}$ が加わったとき、これが接地面内にどのような分布形で伝わるのか知る必要がある。このような荷重分布の形状は本来振動数に依存して変化し、これを厳密に算定することはきわめて困難である。したがってここでは振動数

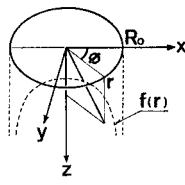


図-2 円筒座標と $f(r)$ の概形

の影響は無視し、円筒座標 (r, ϕ, z) 表示でこの分布形 $f(r)$ を次のように定める(図-2 および式(1)).

$$f(r) \cdot e^{i\omega t} = \begin{cases} \frac{Qe^{i\omega t}}{2\pi R_0} \frac{1}{\sqrt{R_0^2 - r^2}} & |r| < R_0 \dots (1) \\ 0 & |r| > R_0 \end{cases}$$

ここに、 R_0 : 円盤の半径、 i : 虚数単位 ($=\sqrt{-1}$)、 ω : 円振動数、 t : 時間、 π : 円周率

式(1)は $\omega=0$ のとき、Boussinesq によって解かれた半無限等方弾性体上の剛体円形フーチング底面での接地圧分布と等しい。したがって式(1)の分布形は、弾性体内の剛体円盤加振に伴う波動伝播の低振動数領域における近似解を与えることになる。

この種の問題では、 z 軸に対称な波動を考えているため ϕ 方向への変化は生じない。いま z 軸方向への変位を u_z 、半径方向への変位を u_r とすると波動方程式は次のように書ける。

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \cdot \left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} \right) \dots \dots \dots (2)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\Omega}{r^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right) \dots (3)$$

ここに、 ρ : 弾性体の密度

λ, μ : Lamé の定数 (μ : せん断弾性係数)

Δ : 体積ひずみ成分 ($=\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$)

Ω : 回転成分 ($=\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$)

この解は z 軸に直交する面内で境界条件を考える場合、次のように与えられる。

$$u_r = (k \cdot B \cdot e^{-n_1 z} + n_2 \cdot C \cdot e^{-n_2 z}) \cdot J_1(kr) \cdot e^{i\omega t} \dots \dots \dots (4)$$

$$u_z = (n_1 \cdot B \cdot e^{-n_1 z} + k \cdot C \cdot e^{-n_2 z}) \cdot J_0(kr) \cdot e^{i\omega t} \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 $k^2 = \frac{\rho \omega^2}{(\lambda + 2\mu)} + n_1^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu} + n_2^2$

$J_\nu(x)$: ν 階の第1種 Bessel 関数

B, C : 未定係数

k : 任意定数 (1/(長さ) の次元を有する)

またせん断応力 σ_{zr} 、および直応力 σ_{zz} は Hooke の法則により

$$\sigma_{zr} = -\mu \{ 2kn_1 \cdot B \cdot e^{-n_1 z} + (2k^2 - j^2) \cdot C \cdot e^{-n_2 z} \} \cdot J_1(kr) \cdot e^{i\omega t} \dots \dots \dots (6)$$

$$\sigma_{zz} = -\mu \{ (2k^2 - j^2) \cdot B \cdot e^{-n_1 z} + 2kn_2 \cdot C \cdot e^{-n_2 z} \} \cdot J_0(kr) \cdot e^{i\omega t} \dots \dots \dots (7)$$

ここに、 $j = \omega/V_S$ (V_S : 弾性体内のS波速度) と与えられる。式(4)~(7)において $z \rightarrow +\infty$ のとき変位が0に収斂し、かつ後退波は存在しないので、式中の n_1, n_2 は正の実数、もしくは正の虚数をとらなければならない。また $z \rightarrow -\infty$ においても同様に変位が0

で、かつ負方向への進行波に限られるので、 n_1, n_2 が正の実数、正の虚数をとる限り、式(4)~(7)は $z < 0$ の場合次のように書き直す必要がある。なお、先ほどの $z > 0$ の領域における解との判別のため、変位、応力の解には '(ダッシュ) を付けておく。

$$u_r' = (k \cdot B' \cdot e^{n_1 z} - n_2 \cdot C' \cdot e^{n_2 z}) \cdot J_1(kr) \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$u_z' = (-n_1 \cdot B' \cdot e^{n_1 z} + k \cdot C' \cdot e^{n_2 z}) \cdot J_0(kr) \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\sigma_{zr}' = -\mu \{ -2kn_1 \cdot B' \cdot e^{n_1 z} - (2k^2 - j^2) \cdot C' \cdot e^{n_2 z} \} \cdot J_1(kr) \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\sigma_{zz}' = -\mu \{ (2k^2 - j^2) \cdot B' \cdot e^{n_1 z} - 2kn_2 \cdot C' \cdot e^{n_2 z} \} \cdot J_0(kr) \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(1)に示す分布形の振動外力の加わる円盤を含んだ平面を $z=0$ とすると、この面における4つの境界条件から、式(4)~(11)に含まれる4つの未定係数 B, C, B', C' を決定できる。4つの境界条件は、次のように定式化される。すなわち $z=0$ において

- ① $u_r - u_r' = 0$
- ② $u_z - u_z' = 0$
- ③ $\sigma_{zr} - \sigma_{zr}' = 0$
- ④ $\sigma_{zz} - \sigma_{zz}' = f(r) \cdot e^{i\omega t}$

このうち境界条件④に示した $f(r)$ はすでに式(1)に用いた $f(r)$ とまったく同じものである。境界条件①, ②, ③より、 $B' = -B, C' = C, C = -k \cdot B/n_2$ が導かれる。この結果を境界条件④に用いることで

$$B = \frac{1}{2\rho\omega^2} \frac{f(r)}{J_0(kr)} \quad \dots\dots\dots (12)$$

を得ることができる。さらに境界条件④において $\sigma_{zz}, \sigma_{zz}'$ の解が式(7), 式(11)に示すように第1種 Bessel 関数を含んでいることを考慮して、円盤内の荷重分布形 $f(r)$ を Fourier-Bessel の積分定理を用いて表示する。

$$f(r) = \int_0^\infty k \cdot F(k) \cdot J_0(kr) dk \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} F(k) &= \int_0^\infty r \cdot f(r) \cdot J_0(kr) dr \\ &= \frac{Q}{2\pi} \frac{\sin kR_0}{kR_0} \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

式(12)中の $f(r)$ の代わりに式(13)右辺の積分の被積分関数を用いると

$$dB = \frac{1}{2\rho\omega^2} k \cdot F(k) \cdot dk \quad \dots\dots\dots (15)$$

さらに

$$dC = -\frac{1}{2\rho\omega^2} \frac{k^2}{n_2} F(k) dk \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。これを式(5)に代入することで

$$du_z = \frac{Qe^{i\omega t}}{2\rho\omega^2} \left(kn_1 e^{-n_1 z} - \frac{k^3}{n_2} e^{-n_2 z} \right) \cdot F(k) \cdot J_0(kr) dk$$

$$\begin{aligned} \therefore u_z &= \frac{Qe^{i\omega t}}{2\rho\omega^2} \int_0^\infty \left(kn_1 e^{-n_1 z} - \frac{k^3}{n_2} e^{-n_2 z} \right) \\ &\quad \cdot F(k) \cdot J_0(kr) dk \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

が得られ、 $f(r)$ を決めれば $F(k)$ が決定し、 u_z が求まることになる。したがって $F(k)$ に式(14)の右辺を代入すれば、弾性体内の軸方向変位 u_z は最終的に

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{Qe^{i\omega t}}{4\pi R_0 \rho \omega^2} \int_0^\infty \left(n_1 e^{-n_1 z} - \frac{k^2}{n_2} e^{-n_2 z} \right) \\ &\quad \cdot \sin kR_0 \cdot J_0(kr) dk \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

と求めることができる。式(18)をあらためて

$$u_z = Qe^{i\omega t} \cdot W(r, z, \omega) \quad \dots\dots\dots (19)$$

と書き、地表面から円盤までの深さを H としたとき

$$W' = W(0, 0, \omega) + W(0, 2H, \omega) \quad \dots\dots\dots (20)$$

がこの円盤を支持する地盤の変形係数となる。式(20)右辺の $W(0, 2H, \omega)$ は $z=H$ なる面を地表面と見立て、これを鏡としたときの円盤の鏡像の影響を表現するものである。

(3) 地盤の変形係数の数値解析

地盤の変形係数を算出するためには、前節の式(18)の右辺に示した複雑な複素積分を実行する必要があるので、いまここで式(18)の積分について少し詳細に触れておく。式(18)は無次元化した諸量を用いて次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \left[\frac{u_z}{4\pi R_0 \mu} \right] &= \int_0^\infty \left(\sqrt{\zeta^2 - \bar{r}^2} e^{-b\sqrt{\zeta^2 - \bar{r}^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-b\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) \cdot \sin \zeta A \cdot J_0(\zeta a) d\zeta \\ &\quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここに、 $a=rj, b=zj, A=R_0j, \bar{r}=V_S/V_P$

$\zeta=k/j$ (k は式(4), 式(5)で用いられた k に等しい)

V_P : 弾性体内のP波速度

式(21)は、 A が a, b に比べて十分小さい場合に、 $\sin \zeta A \approx \zeta A$ とおくことにより、

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_z}{4\pi \mu R_0} \right) &= R_0 j \int_0^\infty \left(\zeta \sqrt{\zeta^2 - \bar{r}^2} e^{-b\sqrt{\zeta^2 - \bar{r}^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\zeta^3}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-b\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) J_0(\zeta a) d\zeta \quad \dots\dots (22) \end{aligned}$$

となる。これは無限等方弾性体の一点を $Qe^{i\omega t}$ なる力で加振したときの弾性体の変位を表現するものであり、解析的にこの積分を実行することで、P波、S波の寄与に相応する初等関数の線形和として表現される¹³⁾。したがって、 $a \gg A, b \gg A$ なる条件を満たすほど、円盤から遠く隔たった地点の変位は容易に求めることができる。しかし円盤の近傍の変位を求めるためには、やはり式(21)の右辺の積分を数値的に実行しなければならない

い。式(21)の右辺の被積分関数は、 ζ, a, b, r の関数であるので、これを便宜上次のように書き換える。

$$\frac{u_z}{\left(\frac{Qe^{i\omega t}}{4\pi\mu R_0}\right)} = \int_0^\infty I_1(\zeta, A, a, b, r) d\zeta + \int_0^\infty I_2(\zeta, A, a, b, r) d\zeta \dots (23)$$

ここに

$$I_1 = \sqrt{\zeta^2 - r^2} e^{-b\sqrt{\zeta^2 - r^2}} \sin \zeta A \cdot J_0(\zeta a) \dots (24)$$

$$I_2 = -\frac{\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-b\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sin \zeta A \cdot J_0(\zeta a) \dots (25)$$

この積分には、 $\zeta=r$ 、と $\zeta=1$ なる2つの分岐点が存在する。波動の逸散、ならびに無限遠点において変位が0となることを考慮すると、積分路はこの2つの分岐点に対して図-3に示すような経路をとることになる。また $\zeta=1$ なる分岐点周辺で式(25)の I_2 の分母が0に近づくので、このままの形での数値計算は困難であり、そのため次に示すような変形を施す。

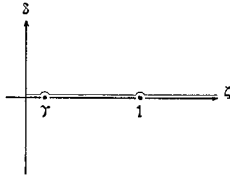


図-3 ζ - δ 面内の積分路

$$\frac{u_z}{\left(\frac{Qe^{i\omega t}}{4\pi\mu R_0}\right)} = \int_0^\infty I_1(\zeta, A, a, b, r) d\zeta + \int_0^\infty I_2(\zeta, A, a, b, r) d\zeta + \int_0^\infty I_3(\xi, A, a, b, r) d\xi - \sin A \cdot \frac{e^{-i\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} \dots (26)$$

ここに

$$I_3 = \sin A \cdot \frac{\xi e^{-b\sqrt{\xi^2-1}}}{\sqrt{\xi^2-1}} J_0(\xi a)$$

このようにすると式(26)の右辺の第3項と第4項の和が0となり、当然式(26)と式(23)は等値となるのみならず、第2項と第3項の和が、 ζ が1に近づくにつれて $\sqrt{\zeta-1}$ に比例して0に近づくので数値計算が容易になる。さらに積分の収束を早めるため $\zeta \rightarrow +\infty$ における被積分関数 $I_1+I_2+I_3$ の極限值を求めておく。

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} (I_1+I_2+I_3) = L_1+L_2+L_3 \dots (27)$$

ここに

$$L_1 = \frac{b}{2}(r^2-1)e^{-b\zeta} \cdot \sin \zeta A \cdot J_0(\zeta a)$$

$$L_2 = \left\{ \frac{b^2}{8}(r^4-1) - \frac{1}{2}(r^2+1) \right\} \frac{e^{-b\zeta}}{\zeta} \sin \zeta A \cdot J_0(\zeta a)$$

$$L_3 = \sin A \cdot e^{-b\zeta} \cdot J_0(\zeta a)$$

式(27)を用いて式(21)をさらに次のように書き換える。

$$\frac{u_z}{\left(\frac{Qe^{i\omega t}}{4\pi\mu R_0}\right)} = \int_0^\infty \{ (I_1+I_2+I_3) - (L_1+L_2+L_3) \} d\zeta$$

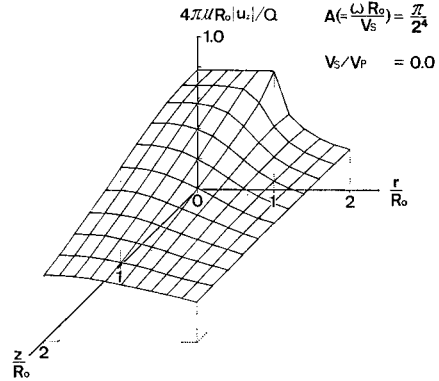
$$\begin{aligned} &+ \frac{b}{2}(r^2-1) \left(\frac{Y}{X^2+Y^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(r^2+1) \left\{ \frac{b}{4}(r^2-1) - 1 \right\} \cdot \tan^{-1} \frac{A}{X} \\ &+ \frac{\sin A}{\sqrt{a^2+b^2}} (1 - e^{-i\sqrt{a^2+b^2}}) \dots (28) \end{aligned}$$

ここに

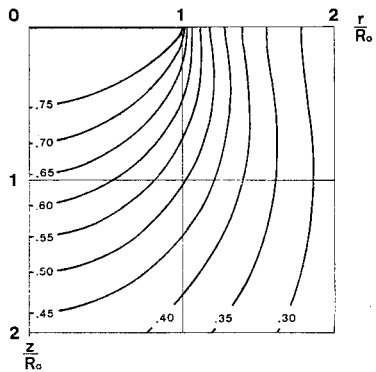
$$X+iY = \sqrt{a^2+b^2} - A^2 + 2ibA$$

式(28)の右辺の被積分関数は、式(27)により急速に0に収束することは明らかであり、この変形によって計算の能率は著しく向上する。 L_1, L_2 の定積分は、いわゆるWeberの不連続積分であり、円盤の縁で変位に屈曲が生ずる様子を示唆するものである。

以上述べた手法により u_z を求めるべく数値計算を実行した結果を図-4、図-5、図-6に示す。図-4(a)、図-4(b)は横軸に円盤の半径で無次元化した半径方向の距離、縦軸にやはり半径で無次元化した軸方向距離をとり、この空間内での無次元化変位 ($u_z / (Qe^{i\omega t} / 4\pi\mu R_0)$) の絶対値を示したものである。なおこの計算において V_S/V_P は0、円盤の半径 R_0 とS波の波長の比は1:32である。この場合円盤内の軸方向変位は予想されたようにほぼ均一であり、円盤近傍の弾性体は、この剛体的な

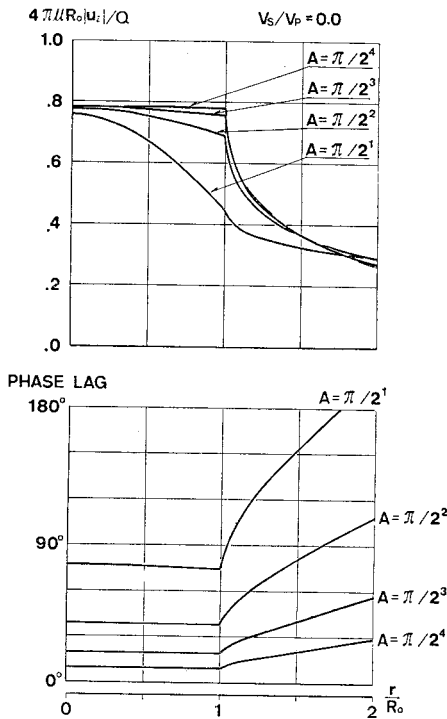


(a) 円盤近傍の変位の絶対値

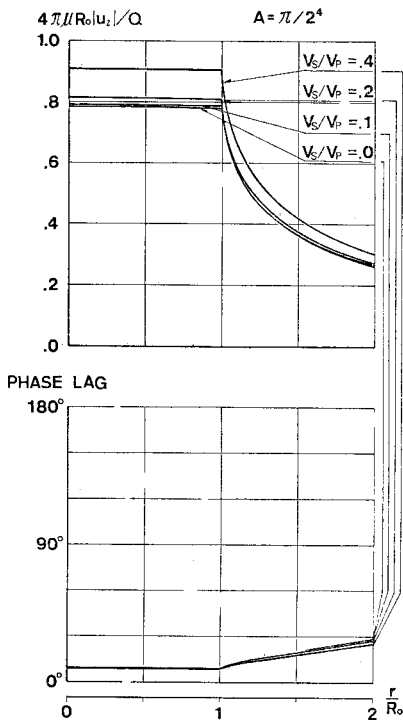


(b) 円盤近傍の無次元化変位の絶対値 ($4\pi\mu R_0 |u_z| / Q$)

図-4



図—5 円盤を含む面 ($z=0$) の変位に及ぼす $A(=\omega \cdot R_0/V_s)$ の影響



図—6 円盤を含む面 ($z=0$) の変位に及ぼす V_s/V_p の影響

挙動をする円盤とほぼ一体の動きをしている様子がわかる。しかしこの円盤の面外変形は、半径がS波の波長に比べ大きくなるにつれ、しだいに大きくなるものと懸念され、この影響をみるべく、 $A(=\omega \cdot R_0/V_s)$ をパラメータとして円盤を含む面 ($z=0$) の無次元化変位の絶対値を図—5に示した。横軸は図—4と同様半径 R_0 で無次元化した半径方向の距離である。この状況から A が $\pi/4$ 、すなわち杭の直径がS波の波長の1/4程度がこの手法の適用し得る限界かと思われる。したがってこれ以上の高周波領域においてこの手法を用いるためには、円盤内にそれなりの分布をもつ外力を改めて設定しなければならない。この点に関しては今後の研究に譲るものとする。図—6は、 A を $\pi/16$ としたときの $z=0$ の面における弾性体の軸方向変位に及ぼすポアソン比 (あるいは V_s/V_p) の影響を示したものである。この図は V_s/V_p が大きくなるほど、すなわちポアソン比が0.5より小さくなるに従い円盤の変位が大きくなることを示している。これは非圧縮性の弾性体から圧縮可能な弾性体への移行に伴う現象と考えれば常識的な結果である。

以上述べてきた、地盤の変形係数を得るための諸手続は、伯野¹³⁾の提唱した杭基礎の水平方向周波数応答解析モデルにおける変形係数の設定法と大きく異なるものであり、以下にこの点に関する検討を行っておく。伯野は地盤の変形係数を算定するため、式(21)の代わりに、無限等方弾性体内の点加振時の変位解である式(22)を用いている。式(22)右辺の積分は解析的に実行でき、式(21)に関して本節でこれまで述べてきたような複雑な数値計算は不要である。しかし Mindlin の変位解同様、加振点での解が無限大となるため、Penzien¹⁾ にならって、杭と地盤の物理定数の違いを無視し、杭を周辺地盤と同等の弾性体とみなし、杭中心位置に加力点を置いたときの杭表面変位 w を基準にして、地盤の変形係数を評価している。したがって伯野にならって、杭の鉛直動を多質点系モデルで解析する際、 w には加振点から加振方向と直角に杭半径 R_0 だけ離れた点の加振方向変位を用いることになる。この w が本節で誘導した円盤の変位 u_z に対応する。

この w に $4\pi\mu R_0/Qe^{i\omega t}$ を乗じ無次元化したものを、円盤の無次元化変位 $4\pi\mu R_0 u_z/Qe^{i\omega t}$ とともに $A(=\omega R_0/V_s)$ の関数として図—7に示す。 A が1より小さい場合、円盤の周内で加振方向変位はほぼ一様であるので、この図においては、円盤中心点の変位を円盤の変位 u_z としている。

A が1より小さい範囲で、 w の絶対値は、 u_z の絶対値の6~7割程度である。したがって伯野にならって地盤の鉛直方向の変形係数を設定した場合、本論文で提示する変形係数を用いる場合より地盤を固く評価すること

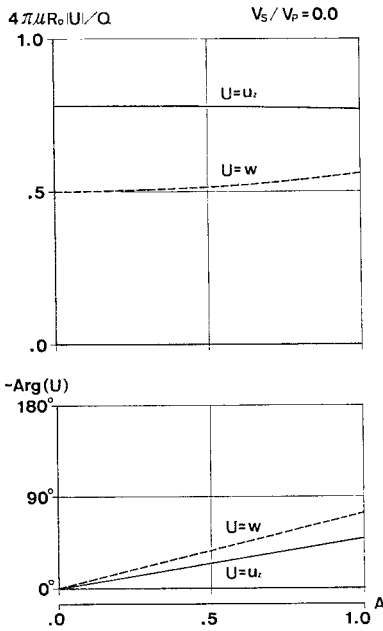


図-7 u_z と w の差異

になる。一般に弾性体内の点載荷による変位解から、Penzien や伯野のように地盤の変形係数を算定すると、地盤をかなり固く評価することが山本¹⁴⁾、梅村ほか¹⁵⁾、伯野¹³⁾らによって指摘されており、図-7 は、少なくとも鉛直方向に関して弾性体内の面加振時の変位解を用いることで、この点がかなり改善されることを示している。

(4) 円盤列の運動方程式

本章(2)の式(20)に準じ、円盤列の一枚 m なる円盤(質量 0)を $Qe^{i\omega t}$ なる力で加振したときの円盤 j の位置の変位を $W_{jm}' \cdot Qe^{i\omega t}$ と書く。このとき W_{jm}' には加振源である円盤 m の、地表面の位置を鏡面としたときの鏡像をすでに重ね合わせてあるものとする。また W_{jm}' を算出する段階では、円盤の間に線形ばねを介在させていない。このとき円盤列に加わる力のベクトル $\{F_1, F_2, \dots, F_N\}^T$ と、円盤列の変位ベクトル $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}^T$ の間には

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}' & W_{12}' & \dots & W_{1N}' \\ W_{21}' & W_{22}' & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ W_{N1}' & & & W_{NN}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} \dots\dots(29)$$

なる関係が成立する。式(29)の右辺のマトリックスを $[W']$ と略記し、この逆マトリックス $[W']^{-1}$ を地盤の反力マトリックスと称することにする。また円盤列を結んでいるばねにのみ着目すると、円盤に加わる力のベクトルと変位ベクトルの間には

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & & \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 & & \\ & -K_2 & K_2+K_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & -K_{N-2} & K_{N-2}+K_{N-1} & -K_{N-1} \\ & & & -K_{N-1} & K_{N-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{Bmatrix} \dots\dots(30)$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \vdots \\ \ddot{z}_N \end{Bmatrix} + [[S] + [W']^{-1}] \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} \dots\dots(31)$$

なる関係が成立する。 K_m は m 番目と $m+1$ 番目の円盤を結ぶばねのばね定数である。式(30)の右辺のステイフネス・マトリックスは $[S]$ と略記する。するとこの円盤列の運動方程式は最終的に

と書くことができる。ただし M_1, M_2, \dots, M_N は各円盤(質量 0)に付加する質量である。各円盤に付加する質量 M_m 、および円盤間のばねのばね定数 K_m は以下の手順を踏んで算定される。

$$M_m = M_c - \rho_{em} \cdot \pi R_0^2 \cdot \Delta l \dots\dots(32)$$

$$K_m = K_c - E_{em} \cdot \pi R_0^2 / \Delta l \dots\dots(33)$$

ここに、 $M_c = \rho_c \cdot S \cdot \Delta l$ $K_c = E_c \cdot S / \Delta l$

- ρ_{em} : m 番目の円盤付近の土の密度
- ρ_c : 杭材の密度
- E_{em} : m 番目の円盤付近の土のヤング率
- E_c : 杭材のヤング率
- Δl : 円盤の間隔
- S : 杭の断面積

式(32)から円盤間に土の円柱を付加した円盤列は、解析の対象とする杭と等しい質量を有するようになり、また式(33)から、土の円柱を付加した円盤列が杭と等しい軸方向ばね定数を有するようになる。したがって式(31)を近似的に杭基礎の運動方程式とみなすことができる。

3. 特殊な境界条件をもつ杭の周波数応答の厳密解との比較による近似解の検討

2.で述べたモデルによる杭基礎の周波数応答の近似解の妥当性を検証するために、ある特殊な境界条件をもつ杭の周波数応答の厳密解との比較を行うことにする。対象とする杭の境界条件は以下のように定める。

(イ) 杭は互いに平行な不動の無限剛体平面 α_1, α_2 に扶まれた, 内径 $2a$, 外径 $2b$, 長さ l の弾性体である。

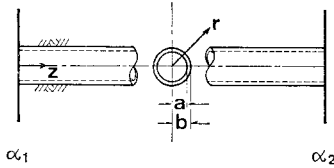


図-8 両端固定杭

(ロ) 杭の周囲には2枚の剛体平面に扶まれて無限の広がりをもつ等方弾性体とみなせる土が存在する。

(ハ) 剛体壁面 α_1, α_2 上では, この壁によって杭および地盤の軸 (z) 方向の変位が完全に拘束されるが,

半径 (r) 方向の変位は滑動が自由であり拘束されない。

(ニ) 杭と地盤の付着は完全である。

以上の境界条件は次のように定式化される。

$$z=0, l \text{ にて } u_z=0 \quad u_z'=0 \dots\dots\dots (34 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ にて } \sigma_{rr}=0 \quad \sigma_{zr}=f(z) \\ r=b \text{ にて } u_r=u_r' \quad u_z=u_z' \\ \sigma_{rr}=\sigma_{rr'} \quad \sigma_{zr}=\sigma_{zr'} \end{aligned} \right\} \dots\dots (34 \cdot b)$$

(ダッシュ (') のあるものが地盤, ないものが杭に対応する量である)

式(34・a)のような境界条件を満たす杭, および地盤の変位, 応力は以下のように与えられる。

$$u_r = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \{k_{1m} \cdot H_1^{(2)}(k_{1m}r) \cdot A_m + n_m \cdot H_1^{(2)}(k_{2m}r) \cdot B_m + k_{1m} \cdot H_1^{(1)}(k_{1m}r) \cdot C_m + n_m \cdot H_1^{(2)}(k_{2m}r) \cdot D_m\} \cos n_m z \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots (35)$$

$$u_z = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \{n_m \cdot H_0^{(2)}(k_{1m}r) \cdot A_m - k_{2m} \cdot H_0^{(2)}(k_{2m}r) \cdot B_m + n_m \cdot H_0^{(1)}(k_{1m}r) \cdot C_m - k_{2m} \cdot H_0^{(1)}(k_{2m}r) \cdot D_m\} \sin n_m z \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots (36)$$

$$\sigma_{rr} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \{[\lambda \bar{l}^2 + 2\mu k_{1m}^2] \cdot H_0^{(2)}(k_{1m}r) - 2\mu k_{1m} \cdot H_1^{(2)}(k_{1m}r)/r\} \cdot A_m + 2\mu n_m k_{2m} \{H_0^{(2)}(k_{2m}r) - H_1^{(2)}(k_{2m}r)/(k_{2m}r)\} \cdot B_m + \{[\lambda \bar{l}^2 + 2\mu k_{1m}^2] \cdot H_0^{(1)}(k_{1m}r) - 2\mu k_{1m} \cdot H_1^{(1)}(k_{1m}r)/r\} \cdot C_m + 2\mu n_m k_{2m} \{H_0^{(1)}(k_{2m}r) - H_1^{(1)}(k_{2m}r)/(k_{2m}r)\} \cdot D_m\} \cdot \cos n_m z \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots (37)$$

$$\sigma_{zr} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \{-2\mu n_m k_{1m} \cdot H_1^{(2)}(k_{1m}r) \cdot A_m + \mu(j^2 - 2n_m^2) \cdot H_1^{(2)}(k_{2m}r) \cdot B_m - 2\mu n_m k_{1m} \cdot H_1^{(1)}(k_{1m}r) \cdot C_m + \mu(j^2 - 2n_m^2) \cdot H_1^{(1)}(k_{1m}r) \cdot D_m\} \cdot \sin n_m z \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots (38)$$

$$u_r' = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \{k_{1m}' \cdot H_1^{(2)}(k_{1m}'r) \cdot E_m + n_m \cdot H_1^{(2)}(k_{2m}'r) \cdot F_m\} \cos n_m z \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots (39)$$

$$u_z' = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \{n_m \cdot H_0^{(2)}(k_{1m}'r) \cdot E_m - k_{2m}' \cdot H_0^{(2)}(k_{2m}'r) \cdot F_m\} \sin n_m z \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots (40)$$

$$\sigma_{rr}' = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \{[\lambda' \bar{l}'^2 + 2\mu' k_{1m}'^2] \cdot H_0^{(2)}(k_{1m}'r) - 2\mu' k_{1m}' \cdot H_1^{(2)}(k_{1m}'r)/r\} \cdot E_m + 2\mu' n_m k_{2m}' \{H_0^{(2)}(k_{2m}'r) - H_1^{(2)}(k_{2m}'r)/(k_{2m}'r)\} \cdot F_m\} \cos n_m z \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots (41)$$

$$\sigma_{zr}' = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \{-2\mu' n_m k_{1m}' \cdot H_1^{(2)}(k_{1m}'r) \cdot E_m + \mu'(j'^2 - 2n_m^2) \cdot H_1^{(2)}(k_{2m}'r) \cdot F_m\} \sin n_m z \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots (42)$$

ここに, $n_m = m\pi/l$, $\bar{l}^2 = (\omega/V_P)^2$, $j^2 = (\omega/V_S)^2$, $k_{1m}^2 = \bar{l}^2 - n_m^2$, $k_{2m}^2 = j^2 - n_m^2$, $\bar{l}'^2 = (\omega/V_P')^2$, $j'^2 = (\omega/V_S')^2$, $k_{1m}'^2 = \bar{l}'^2 - n_m^2$, $k_{2m}'^2 = j'^2 - n_m^2$

ω : 加振円振動数

l : 杭長

V_S : 杭内S波速度

V_S' : 地盤内S波速度

V_P : 杭内P波速度

V_P' : 地盤内P波速度

$H_\nu^{(i)}$: ν 階の第 i 種ハンケル関数

(ダッシュ (') のあるものが地盤, ないものが杭に対応する量である)

これらの式中 $A_m, B_m, C_m, D_m, E_m, F_m$ は未定係数であり, すでに式 (34・b) に示した6個の境界条件式により決定される¹⁶⁾. 杭内の $r=a$ の内壁に働く $f(z)$ と

して

$$f(z) = \sin n_m z \dots\dots\dots (43)$$

を用いると式(35)~(42)の $\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty}$ 内は特定の m に関する項しか残らないので計算が容易になる. 仮に $n_m (= m\pi/l)$ の m を1として, このときの杭の軸方向変位の厳密解を求めることにする. 数値計算上の入力データは以下のとおりである.

[杭]

杭長(l): 40 m

外径(2**b**): 2 m

内径(2**a**): 1 m

P波速度(V_P): 4 600 m/s

S波速度(V_S): 2 900 m/s

杭材の密度(ρ): 2.4×10^3 kg/m³

[地盤]

- P波速度 (V_P') : 1500 m/s
- S波速度 (V_S') : 125 m/s(CASE 1)
250 m/s(CASE 2)
500 m/s(CASE 3)

土の密度 (ρ') : $1.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

これと比較する近似解を求めるにあたり次のような計算上の仮定を設ける。

① この杭のモデルである円盤列の隣接する円盤間の距離を dz とすると、 m 番目の円盤には

$$F_j = 2\pi b \cdot dz \cdot \sin \frac{\pi m \cdot dz}{l}$$

$$= 2\pi b \cdot dz \cdot \sin \frac{\pi m}{(N+1)} \dots\dots\dots(44)$$

N : 円盤の枚数

なる力が働くものとする。

② この手法は離散的に重ねられた円盤の間に挟まれた土円柱がほぼ一様に、同位相で動くことを期待するものである。円盤の間隔は大きくしない方が望ましい。したがって分割数を増していったときの収斂値をもって、周波数応答の近似解とする。

③ すでに前章で述べたように円盤の半径と地盤内のS波の波長との比から、この手法を適用し得る周波数領域が決定する。ここでは $A(=\omega R_0/V_S) < \pi/4$ という条件から計算し得る周波数の上限を定める。

④ 1枚の円盤を支える地盤の変形係数の近似解として著者が提示したものは、本来地盤を無限等方弾性体と仮定して得られたものである。杭両端の固定壁面 α_1, α_2 の影響は、これを鏡と見立てて逆位相の鏡像を置くことで代用する。

以上の条件、仮定をもとに、この杭の中央 ($l/2$ 点) の変位の近似解を計算し、厳密解と比較したものを 図-9 に示す。近似解を求める際の杭の分割数 (円盤の枚数に1を加えたもの) は20以上でほぼ一定値に収斂するので分割数が20の場合の計算値のみ示してある。厳密解をみると、地盤内のS波速度が小さくなるほど、波動の逸散が杭の共振曲線に及ぼす影響は小さくなり、杭の中を伝播するP波の固定壁間での重複反射による共振点 (約55 Hz) が明瞭になる。これより低い振動数領域で2つの小尖点が存在するが、これは固定壁間の地盤内を重複反射するS波、P波に起因するものである。地盤のポアソン比が0.5に近い値であるため、振動数の低い方の、地盤内のS波の重複反射による小尖点に比べ、地盤内のP波の重複反射による小尖点はかなり小さい。この2つの小尖点を含む低振動数領域で、厳密解と円盤列を用いた近似解はよく符合する。

本手法の欠点としては、まず第1に先程述べた ③ の条件から、与えられた系に対して計算可能な周波数に上

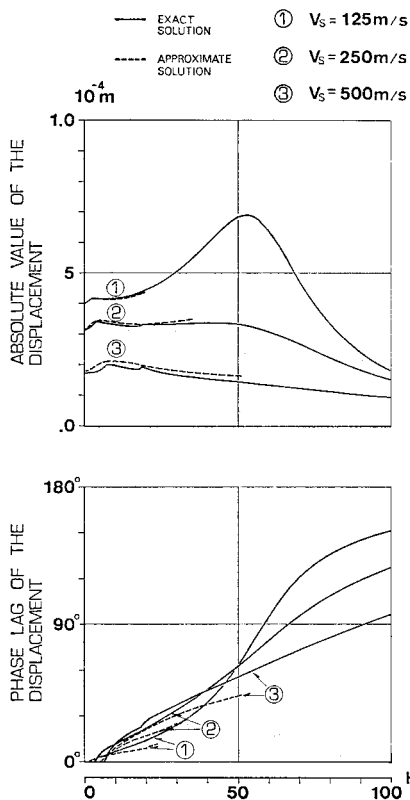


図-9 両端固定杭の中央 ($l/2$) 点の軸方向変位応答

限のあること、第2に、この周波数の上限以下でも、円盤の間に挟まれた土が均一に動くためには ② で述べたように周波数の増加に伴い円盤の枚数を増加させるのが望ましく、これにより計算が煩雑になるという2点が挙げられる。

4. 現場試験結果との対比

(1) 杭頭鉛直加振時の杭頭の加速度応答

本論文で提示した杭基礎の鉛直方向の周波数応答解析モデルの妥当性、および周辺地盤の振動予測の可能性を検討することを目的とし、埼玉大学構内に打ち込まれているPC杭の加振試験を行った。現場の詳細を 図-10、杭の諸元を 図-11、測定点を 図-12 に示す。

これに対し本論文で提示した手法により杭頭加速度応答の近似解を計算し実測値と比較してみることにする。この計算を実施する際、地盤が地下5mを境に2つの異なる層に分かれていることに留意する必要がある。そこで円盤を支持する地盤の変形係数を以下の仮定に基づき設定する。

- ① 表層内の円盤加振に伴う表層内の各円盤の位置の

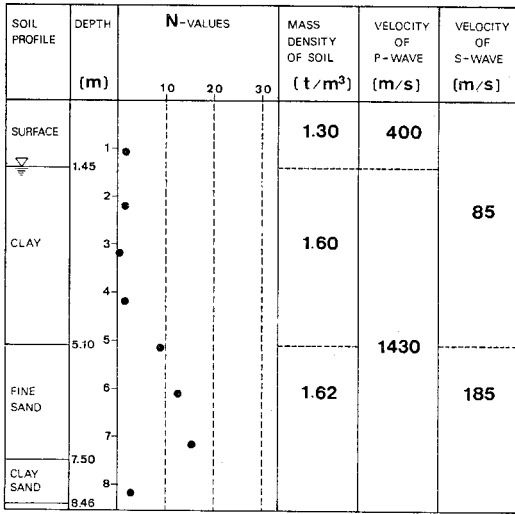


図-10 埼玉大学構内地質柱状図

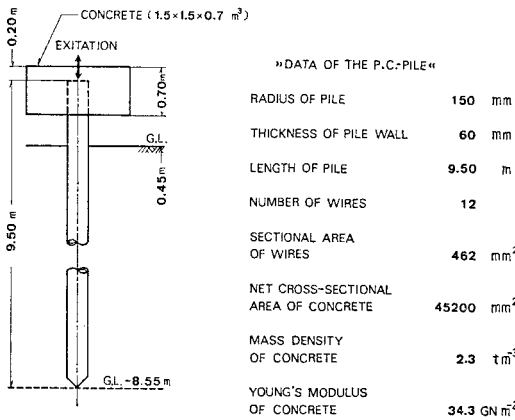


図-11 PC 杭概形

地盤の変位は、地表以下の領域すべてが表層と同じ地盤で構成されているという仮定のもとで計算される。

② 表層内の円盤加振に伴う支持層内の変位、支持層内の円盤加振に伴う表層内の変位、および支持層内の円盤加振に伴う支持層内の変位は、地表以下の領域すべてが支持層と同じ地盤で構成されているという仮定のもとで計算される。

このようにして設定された変形係数を用い杭頭加速度の近似解を円盤の枚数 N を変えて計算し、実測値と比

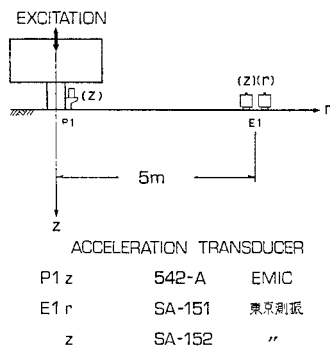


図-12 測定点配置

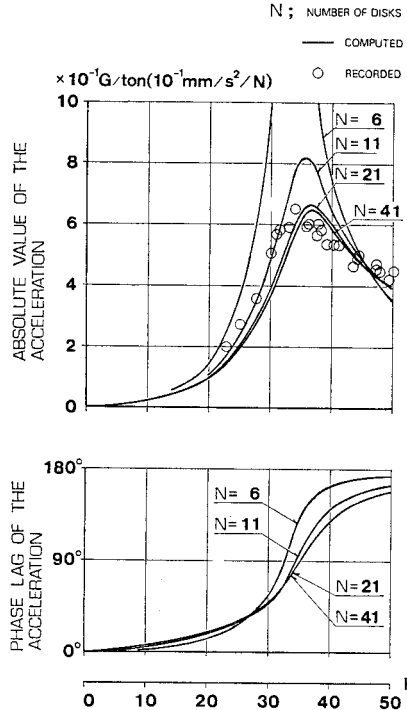
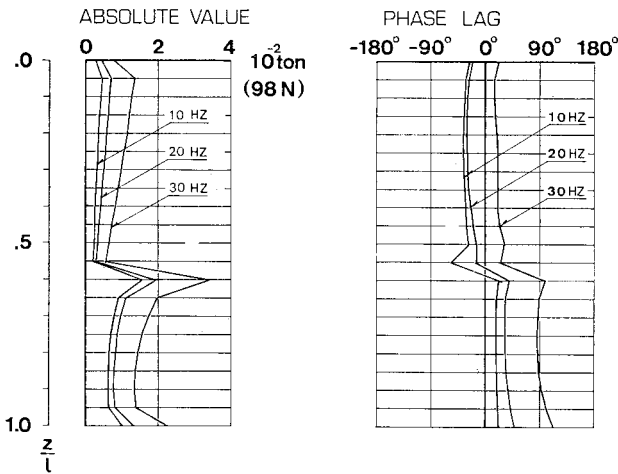


図-13 PC 杭頭加速度応答

較したものを 図-13 に示す。円盤の枚数を増すにつれて、計算値がある一定の値に収斂していく様子が認められる。この計算において、材料（コンクリート、土等）の内部減衰はまったく無視しているにもかかわらず計算値と実測値がよく符合したのは、杭の周波数応答に及ぼす波動の地下逸散の影響が、地盤やコンクリートの内部減衰以上に支配的であることを物語っている。

(2) 地表の加速度応答

すでに算出された円盤列の変位ベクトルに地盤の反力マトリックス (式 (31) 左辺の $[W]^{-1}$) を乗ずることで、各円盤から地盤に加わる力のベクトルを算出することができる (図-14)。これを地盤への入力として、各円盤加振に伴う地表の変位を算出しこれを加算することで、杭加振時の地表の変位の近似解とすることができる。このとき加振源と地表の着目点との距離が大きければ、加振源である円盤は点とみなして差し支えないので、地中の点加振に伴う地表の変位が算出できればこの演算は実行可能となる。地中の点加振に伴う地表の変位を算出する式は、動的な相反定理から、地表の点加振に伴う地中の変位を表現した Lamb¹⁷⁾ の式をもって代用する。ここで Lamb により導かれた式を用いたということは、地盤を半無限等方弾性体と仮定したことになる。このため表層の存在に起因する Rayleigh 波の分散や実体波の地層の境界面での反射等の影響は完全に無視



図一14 円盤列より地盤に加えらるる力

される。したがって波長に比べ表層厚の大きいところか、あるいは表層内の弾性波速度が支持層内のそれと大差ないところでこの手法を適用すべきである。また仮に以上の条件を満たす場所でも、加振源である杭よりの距離の大きいところでは、表層がエネルギー伝播上のチャンネルとして働くことになりこの手法の適用は避けるべきである。埼玉大学構内の PC 杭の杭頭鉛直加振試験では共振振動数は 30~40 Hz となりこの範囲で Rayleigh 波の波長は 2~3 m にすぎず、表層と支持層の境界面の地表の振動に及ぼす影響は杭近傍では比較的小さいものと考えられる。よって上記の手法に基づき、埼玉大学構内の地下をすべて表層と同じ地質 (図一10 参照)と

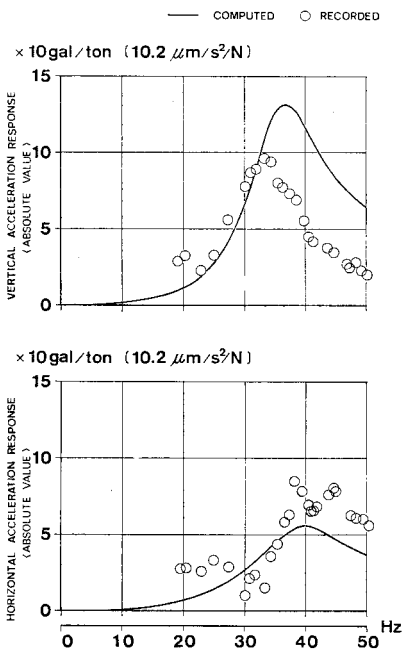
仮定し、杭頭鉛直加振時の地表の換振器設定地点 (杭から 5 m 離れた地点) の加速度応答を算出した。この絶対値と、測定された加速度振幅とを 図一15 に示す。

鉛直方向の加速度の計算値が測定値を上回る傾向がみられるが、これには以下の理由が挙げられる。

- ① 地下をすべて表層と同じ地質と仮定したことにより地盤の剛性を過小評価したため。
- ② 土の内部減衰を無視したため。

これに対し水平方向の加速度応答の計算値は逆に実測値をやや下回る。これは、杭頭の加振にわずかながらも偏心があるために本来鉛直動を励起すべきエネルギーの一部が水平動を励起するために使われたことによると思われる。地盤の鉛直方向

加速度応答のピークの出現する振動数は 32~33 Hz であり杭頭の鉛直方向加速度応答の共振振動数、すなわち逸散エネルギーが最大となる振動数に一致する。ところが水平方向の加速度応答の絶対値は、この周波数をやや上回る 40 Hz 付近で極大値をとっている。この原因の一つとして、杭の地表付近の周辺摩擦力の影響が挙げられるが、この点に関し少し詳細に触れておく。地盤を半無限等方弾性体とみなし、その表面上の一点を鉛直方向に加振した場合、加振点から S 波の波長の偶数倍離れた地点では、地盤の水平動が極小値、鉛直動が極大値を取り、また S 波の波長の奇数倍離れた地点では、水平動が極大値、鉛直動が極小値をとる¹⁸⁾。埼玉大学構内の地盤の S 波速度は表層で 85 m/s であり、加振源である杭から 5 m 離れた地点は、32~33 Hz の周波数において S 波波長の約 2 倍離れていることになる。したがってこの周波数で杭の地表付近の周辺摩擦力は、杭から 5 m 離れた地点の水平動を減ずる方向に働き、その結果この地点の水平方向加速度応答曲線のピークが、杭の共振振動数 32~33 Hz を上回る 40 Hz で出現したと考えられる。



図一15 杭より離れた 5 m 地点の地表の加速度応答

5. 結 語

この研究で提示した杭基礎の鉛直方向周波数応答解析モデルは、特殊な境界条件下の杭の変位応答の厳密解のみならず、実地盤に打ち込まれた杭の挙動ともよく符合することが認められた。これら一連の研究によって得られた結論をとりまとめると、以下ようになる。

- (1) 本手法は、杭基礎を地盤内に挿入された線形なばねで結ばれた円盤列と等価な周波数応答特性を有するものとして、この円盤列の解析を行うものであり、この置換は工学的に十分な精度をもつものであることが認め

られた。

(2) 本手法には適用可能な周波数の上限があり、この上限は $A(=\omega R_0/V_S) < \pi/4$ で示される。これを越えた周波数領域では、円盤の面外変形が大きくなり、この円盤を剛体とみなせなくなる。

(3) 本手法により杭の周波数応答を求める際、円盤の間隔を小さくすればだいに一定の値に収斂するので、これをもって近似解とするのが妥当である。しかし状況によってはこの分割数は非常に大きくなり、計算が煩雑になる。

(4) この手法から円盤が地盤に加える力が算出できるので、 $\text{Lamb}^{13)}$ による半無限等方弾性体表面の点加振による変位の解、および動的相反定理を用いて、杭頭加振時の地表の振動をも算出することができるが、 Lamb の変位解を用いた場合この方法は表層の存在による影響が大きくないところで用いるべきである。

以上、適用し得る周波数の上限が存在するなど、解決すべき点はあるが、本手法をたとえば杭打ちや交通による杭基礎および地盤の振動の予測、解析の手段として用いる見通しがついたものと考えられる。

おわりに本研究は東京大学工学部、松本嘉司教授のご指導によりまとめられたものであり、また本研究の遂行にあたって、特に剛体円盤を支持する地盤の変形係数の件で貴重なご助言を賜った東京大学生産技術研究所の田村重四郎教授、同地震研究所、伯野元彦教授に深甚なる謝意を表する次第である。

参考文献

- 1) Penzien, J., C.F. Scheffey and R.A. Parmelee: Seismic analysis of bridges on long piles, Proc. of ASCE, Vol. 90, No. EM3, June, 1964.
- 2) Nogami, T. and M. Novak: Soil-pile interaction in vertical vibration, Int. Jour. Earthquake engineering and structural dynamics, Vol. 4, pp. 277~293, 1976.
- 3) Gyoten, Y. et al.: Study on soil-pile interaction in vertical vibration, Proc. of the 5th JEES, pp. 377~384, 1978.
- 4) Fujimoto, Y. et al.: Soil-pile interaction in vertical

vibration Fall annual meeting of the AIJ, pp. 611~612, 1977.

- 5) Okamoto, T. et al.: Soil-pile groups interaction in vertical vibration, Annual meeting of the Kinki branch, AIJ, pp. 365~368, 1978.
- 6) Tajimi, H.: Dynamic analysis of a structure embedded in an elastic stratum, Proc. 4th WCEE, Vol. 3, pp. 53~69, 1969.
- 7) 土岐憲三・小松昭雄: 井筒基礎の地震応答解析に関する研究, 土木学会論文報告集, No. 281, pp. 29~40, 1979.
- 8) Harada, T. and K. Kubo: Dynamic (complex) stiffness and vibration of embedded cylindrical rigid foundation, Proc. of 5th JEES, 1978.
- 9) 後藤尚男・亀田弘行: 杭基礎上の橋脚の地震応答について, 土木学会論文集, No. 131, 1966.
- 10) 南 和夫・桜井譲爾: 地盤・基礎・建物連成系の耐震設計に関する研究, 第5回日本地震工学シンポジウム論文集, pp. 465~471, 1978.
- 11) 田村重四郎・中村 豊・加藤勝行: 地中坑道に発振源がある場合の周辺地盤の震動の解析方法, 土木学会論文報告集, No. 281, pp. 41~53, 1979.
- 12) 赤尾嘉彦・伯野元彦: 有限要素法の波動逸散境界についての一つの試み, 第15回地震工学研究発表会講演概要, pp. 33~36, 1971.
- 13) Hakuno, M.: Evaluation of dynamic properties of pile foundation based on wave dissipation theory, Proc. of 5th WCEE, 1973.
- 14) 山本鎮男: 杭のある構造物のロッキング振動, その1~5, 日本建築学会論文報告集, 第125号, pp. 24~29; 第129号, pp. 15~21; 第130号, pp. 18~23; 第131号, pp. 24~31; 第132号, pp. 32~40.
- 15) 梅村 魁・大沢 胖・河村社一: 埋立軟弱地盤にたつ杭支持建物の地震動観測, 関東地震50周年記念地震工学シンポジウム論文集, pp. 125~131, 1973.
- 16) 後藤尚男・土岐憲三・高田至郎: 地中埋設管の振動性状について, 第11回地震工学研究発表会講演概要, pp. 33~36, 1971.
- 17) Lamb, H.: On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, Philosophical Trans., Royal Society, London, Ser. A, Vol. 203, pp. 1~42, 1904.
- 18) 野嶋 治: 建物と地盤の相互作用に関する基礎的研究, 関東地震50周年記念地震工学シンポジウム論文集, pp. 221~228, 1973.

(1981.9.21・受付)