土木学会論文報告集
第 325 号・1982 年 9 月
【論　文】

信頼性解析法へのファジィ理論の適用に関する基礎的研究

APPLICATION OF FUZZY SET THEORY TO RELIABILITY ANALYSIS

白 石 成 人*・古 田 均**・池 島 賢 治***
By Naruhito SHIRAISHI, Hitoshi FURUTA and Kenji IKEJIMA

1. まえがき

構造物の設計の際に考慮されるべき不確定性には，種種のものが存在する．これらをいかに定量化し，安全性の評価尺度あるいは設計法に反映させるかが，合理的な設計を行ううえで重要である．現在までに行われてきた信頼性解析あるいは信頼性設計は，主として確率統計理論に基づき，種々の設計パラメーターの不確定因子を確率変数で表わし，設計安全率や設計係数を，これらの確率変数のばらつき度の関数として求めようとするものであった．しかし，実構造物における安全性が，以上のような確率統計理論によって求められた安全性と異なっており，実際の構造安全性に及ぼす要因においては，ヒューマンエラーや施工誤差のような確率統計的に処理できない要因が数多く存在し，それらが非常に重要な働きをすることが指摘されている[1]．そこで，真に合理的な構造物の安全性評価には，そのような確率統計的に取り扱い得ない不確定要因の影響をも考慮できる新しい解析法を開発することが必要となる．このような新しい信頼性解析法に要求される事項として，次の 4 つのものが挙げられる．

① 不確定要因の明確な分類
② 各要因の評価方法および定量化の方法の確立
③ 各要因の影響を安全性評価指標（たとえば，破壊確率，安全性指標）へ正確に反映させる方法の確立
④ 設計への適用方法の確立

以上の点を考慮し，種々の不確定要因の影響が設計過程に無理なく導入でき，しかも，設計思想との整合性を有する設計法が確立されたとき，はじめて，合理的で安全性の高い設計が可能になると考えられる．

本論文では，種々の不確定要因を，その評価方法の違いに応じて，大きく 2 つのグループに分類する．すなわち，客観的に評価ができ，確率変数として表現できる不確定性を，ランダム性（randomness）とよび，確率統計的には表現し得ないその他の不確定性を，設計者の経験と工学的判断によって主観的に評価が行われるものとして，ファジィ性（fuzziness）と定義する．このように不確定性を 2 つのグループに分類することは，Brown[2] によっても指摘されており，より現実的な安全性評価を行うには，ランダム性とファジィ性を同時に考慮することが必要である．客観的，主観的不確定性を同時に考慮する信頼性解析法としては，Bayes の方法[3] や拡張信頼性理論[4] などがある．しかしながら，これらの方法では，主観的不確定性の詳細な分類は行われず，また，その定量化の方法つまり確率変数としての取扱い方に，論理的な不明確さが存在すると考えられる．

そこで，本研究では，各種の不確定要因を細かく分類し，主観的不確定性の影響を，ファジィ理論を用いることにより，安全性評価に反映させることを考える．ファジィ理論を用いた信頼性解析法の特徴を列挙すると，次のようになる．

① ファジィ性の概念を導入することにより，従来はただ曖昧なものと認識されていた不確定要因が明確に定義でき，定量的評価の可能性が開かれる．
② 種々の要因に対する設計者の工学的判断を，言語変数を媒介として反映させることができる．
③ 各要因ごとに与えられた安全性評価を，ファジィ合成などの代数的処理を行うことによって，全体的な安全性の評価尺度（たとえば，破壊確率，安全性指標）に結びつけることができる．
④ ファジィ確率などの概念を導入することにより，ファジィ性とランダム性を同時に取り扱うことが可能になる．

Blockley[5] は，上記の①〜③の特徴に注目をし，構造

* 正会員　工博　京都大学教授　工学部土木工学教室
** 正会員　工博　京都大学助手　工学部土木工学教室
*** 正会員　工修　大阪瓦斯（株）（元・京都大学院生）

工学，特に信頼性解析の分野で，ファジィ性の概念の重要性を指摘するとともに，ファジィ理論に基づく安全性評価法を提案した．しかし，Blockley の方法には，最終的に得られた結果が帰属度関数の形で与えられ，安全性評価尺度の明確な値が求められていない，あるいは，ランダム性とファジィ性を同時に扱う安全性評価手法へのアプローチがまったくなされていない，等の問題点が残されている．そこで，本研究では，ファジィ確率の概念を用いることにより，ランダム性とファジィ性を同時に取り扱うことを試み，主観的不確定性の影響を考慮した破壊確率算定法を提案する．さらに，この考え方を拡張信頼性理論，2次モーメント法に拡張し，ファジィ論的に補正係数を評価することにより，主観的不確定性の影響を安全性指標の計算に導入する．

2．構造信頼性におけるファジィ性とその取扱い方

土木構造物の設計には，種々の不確定性が介在し，それらをいかに定量化し評価するかが，信頼性設計において重要である．しかし，そのような不確定性は，すべて同一の性質を有するものではなく，その性質の違いに応じて，取扱い方もおのずと異なったものにする必要がある．長尾[6]は，現象の不確実問題を，定性的不確実問題と定量的不確実問題に分類を行っている．本研究では，このような評価法による分類の考え方を基盤に，不確定性をランダム性とファジィ性に大きく分類し，それぞれに対応して，客観的評価および主観的評価を行うという立場に立つ．これは，真に統計的な現象および現象自身が複雑すぎて統計的に取り扱わざるを得ない現象は，ランダム性として確率統計的に評価を行い，それ以外の定性的不確定性，機能的不確定性，操作上の不確定性，およびヒューマンエラーなどに関しては，現段階では主観的にしか評価し得ないものとして，ファジィ性と定義しようとするものである．

一般に，構造物の重要度，経験の度合，産業・政治・経済上の要請などは定性的不確定性，これ以外の荷重・抵抗強度のばらつきなどは定量的不確定性と分類される．しかしながら，製作精度・施工上のばらつきなどは，本質的には定量的不確実性に属するが，現段階では定量化が困難であると考えられる．よって，本研究では，このような不確定要因を定性的不確実性に含め，客観的な評価が困難で主観的評価に頼らざるを得ないものとしてファジィ性と定義する．このように分類すると，ファジィ性に含まれる不確定要因は，ランダム性に含まれる不確定要因に比べて，多種多様となる[7]．これらの不確定要因は，ランダム性を有する要因に比べると，個々の要因自身の設計への影響は小さいものの，すべてが組み合わされた場合には大きな影響を及ぼすことになる．

確率統計的に処理し得ない不確定性の重要性は，Ang[8]らによっても指摘されている．彼の拡張信頼性理論では，荷重のモデル化や構造解析上のモデル化に伴う誤差，設計あるいは製作・施工段階で生じる人為的誤差は，主観的不明量として，補正係数とよばれる確率変数を用いることにより考慮されている．しかしながら，この方法の定式化の簡明さあるいは計算の簡単さは評価されるものの，本来確率統計的な性質をもたない不確定要因を確率変数として表現すること，およびそのような不確定要因に合理的な確率分布を与え，その統計的裏付けを与えることは，困難であると思われる．つまり，本来ランダム性を有しない不確定要因を，確率変数として評価することには論理的な矛盾があり，そのような主観的に評価される要因は，ファジィ性をもつとして，ファジィ論的に評価する方が好ましいと考えられる．

Blockley[5]は，ファジィ集合論[9]を用いることにより，設計者の主観的判断を安全性評価に反映さすことを考えている．彼の方法は，構造物の安全性評価におけるファジィ性の概念に注目をし，ファジィ理論を用いることによって，言語変数による評価を可能にしたところに最大の利点を有している．しかし，この方法には，

① 最終的な結果として得られているものが，破壊確率 $p_f=10^{-n}$ における n の曖昧さを表わす帰属度関数であり，その結果をどのような形で安全性評価に生かすかが明確でない．

② ランダム性を扱う客観的信頼性と，ファジィ性を扱う主観的信頼性が大きく異なっていることは，Brown[2]や Yao[10]によって指摘されているが，ランダム性とファジィ性を同時に取り扱う安全性評価手法へのアプローチがまったく行われていない．

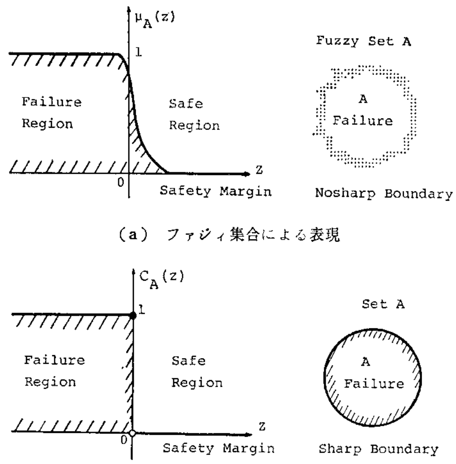
などの欠点があり，実際問題への適用には解決すべき点が多く残っている．

3．構造物の破壊とファジィ確率

構造物の安全性を表わす尺度の一つとして，破壊確率が用いられている．従来の破壊確率 p_f は，ある破壊を表わす事象 A を与え，それが生起する確率として，次式のように定義されている．

$$p_f=P(A)=\int_A dP \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

しかしながら，このような事象 A は厳密かつ容易に定義し得るものでなければならないが，一方，単純なモデル化により，現実の事象から遊離していく一面をもつことに注意しなければならないであろう．つまり，一般に



(a) ファジィ集合による表現

(b) 通常の集合による表現

図—1　破壊事象 A の定義

破壊事象 A は，$Z=R-S$（R：抵抗，S：荷重効果）等で表わされる安全性の余裕（safety margin）を用いて，$Z\leqq 0$ で定義されるわけであるが，本当に $Z\leqq 0$ で破壊が生じ，$Z=\varepsilon$（$\varepsilon\fallingdotseq 0$, $\varepsilon>0$）のときは，破壊が生じないのであろうか．もちろん，このような疑問は，どのようなモデル化にも付随するものであり，得られた結果から用いた仮定の妥当性が検証できればそれでよいとも考えられる．しかしながら，本論文で考えている構造物の破壊というような複雑な現象に対しては，いま少し柔軟な取扱い，つまり，Z が 0 近傍では，構造物が破壊する可能性があると考える方が好ましいように思われる．すなわち，破壊事象 A は明確に定義できず，その境界は曖昧なものではないかと考える方が，破壊という事象に対する人間の認識に合っていると考えられる．

この“境界が曖昧”という考え方が，ファジィ集合の概念そのものである．いま，簡単のために，破壊の尺度として safety margin Z を横軸にとると，従来の破壊は 図—1(b) で定義され，ファジィ集合を用いて考えると，図—1(a) のように $Z=0$ 近傍で破壊の可能性をもち，帰属度関数が $0\leqq\mu_A\leqq 1$ の値をとることになる．このことは，確かに破壊などのようなある意味では特異な事象は，カタストロフィー的に生じるものであるが，それは純粋な状態すなわち混乱を生じさすような要因が介在しない場合についていえることで，実際には，多くの影響因子の存在のために，変化は急激ではなく，緩やかな兆候を呈するという傾向に合致すると思われる．

さて，ファジィ確率について考える前に，従来の破壊確率の定義式について，もう一度考えてみる．式 (1) は，特性関数

$$C_A(x)=\begin{cases}0 & x\notin A\\ 1 & x\in A\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

を用いて書き直すと，

$$P(A)=\int C_A(x)dP=E[C_A(x)]\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

となる．ここに，$E[\ ]$ は期待値を表わす．式 (3) から，破壊事象 A の生起確率とは，その特性関数 $C_A(x)$ の期待値であることがわかる．これに対し，ファジィ集合で破壊を定義すると，破壊確率 p_f は，z_i から z_i+dz_i の範囲で，

$$p_f\Big|_{z_i}^{z_i+dz_i}=\int_{z_i}^{z_i+dz_i}\mu_A(z)dP\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

となり，全体としては，

$$p_f=\int\mu_A(z)dP=E[\mu_A(z)]\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

で定義される．式 (5) は，帰属度関数 $\mu_A(x)$ が特性関数 $C_A(x)$ を一般化したものであることから，容易に理解できる．

次に，式 (5) で定義された破壊確率を導入する意味について考える．前述したように，帰属度関数は破壊の定義等に含まれる曖昧さを表現している．この曖昧さの原因としては，確率的な不確実さ以外の定式化や利用できる情報の質・量に関する不十分さ，あるいは，Z という一つの形で破壊を考えているが，その中には非常に多くの破壊が含まれているのではないかという疑問，すなわち，破壊という現象が明確に把握できていないことが挙げられる．そこで，式 (5) では，これらの曖昧さを帰属度関数で表わされるグレード値を用いて重み付けをして，最も確からしいあるいは平均的な意味での破壊確率を求めていることになる．

4. ファジィ確率を用いた破壊確率の計算法

破壊事象をファジィ集合で定義し，ファジィ確率の考え方を用いることにより，従来とは異なる破壊確率の定義式（式 (5)）が導かれた．ここでは，この式で用いられる帰属度関数 $\mu_A(x)$ の決定法および p_f の計算法について説明をする．

話を簡単にするために，R（抵抗），S（荷重効果）からなる 2 変数問題について考える．このとき，破壊条件は，$Z=R-S$ で与えられ，Z の確率密度関数（ランダム性のみを表現している）は R と S の確率密度関数から求まっているとする．いま，破壊事象（ここでは Z で定義される）に関連するファジィ性を有する主観的な不確定要因を F_i（$i=1\sim n$, n：要因の数）とする．この F_i の評価 E_i（$i=1\sim n$）を，参考文献 5) に従って，言語変数で行う．すなわち，各要因のファジィ性を表わすために，言語変数で表現された size P_i と，その要因の重要度を表わす weight W_i を用い，両者の積集合として E_i を規定する．このとき，E_i, P_i, W_i はファジィ集合であり，その帰属度関数をそれぞれ μ_{E_i}, μ_{P_i}, μ_{W_i}

とする．

$$E_i=P_i\cap W_i=\int_U \mu_{P_i}(u)\wedge\mu_{W_i}(u)|u \quad\cdots\cdots(6)$$

ここに，空間 U は変数 u により $0\leqq u\leqq 1$ で定義されている．すべての要因に対する総合的評価値 P_T は E_i の和集合として定義される．

$$P_T=\sum_{i=1}^{n}E_i=\int_U \bigvee_i[\mu_{P_i}(u)\wedge\mu_{W_i}(u)]|u \quad\cdots(7)$$

ここに，記号 $\vee$, $\wedge$ はそれぞれ max, min を表わす．

ここで，総合的評価値 P_T の帰属度関数から破壊事象 A の帰属度関数を求めるために，ファジィ関係 $\tilde{R}$ を設定する．破壊事象の定義の曖昧さを ε で表現すると，$\tilde{R}$ は，

「もし，P_T が Large なら，ε は Large
　P_T が Medium なら，ε は Medium
　P_T が Small なら，ε は Small」

ここで，Large, Medium, Small に対して，おのおの $j=1, 2, 3$ を対応させ，P_T, ε の帰属度関数を $\mu_{PT_j}(u)$, $\mu_{\varepsilon_j}(z)$ とすると，$\tilde{R}$ は

$$\tilde{R}(z, u)=\int_{\varepsilon\times P_T}\bigvee_j[\mu_{\varepsilon_j}(z)\wedge\mu_{PT_j}(u)]|(z, u) \quad\cdots\cdots(8)$$

ここに，z は safety margin に対応する．このとき，破壊事象 A の帰属度関数 $\mu_A(z)$ は，式 (7) で与えられる P_T の評価値と式 (8) の $\tilde{R}$ を合成さすことにより

$$\mu_A(z)=\tilde{R}\circ P_T=\int_{\varepsilon\times P_T}\bigvee_u[\mu_{\tilde{R}}(z, u)\wedge\mu_{P_T}(u)]|z \quad\cdots\cdots(9)$$

と求まり，破壊確率は式 (9) を用いて

$$p_f=\int_{-\infty}^{\infty}\mu_A(z)f(z)dz \quad\cdots\cdots(10)$$

で計算される．ここに，$f(z)$ は z の確率密度関数．

5. ファジィ確率密度関数を用いた計算法

本節では，従来の破壊確率の定義を変えずに，R, S の確率密度関数をファジィ化することにより，ランダム性以外の不確定性を破壊確率の計算に反映さすことを考える．

抵抗 R, 荷重 S の確率密度関数を $f_R(r)$, $f_S(s)$ とし，互いに独立であると仮定すると，破壊確率 p_f が

$$p_f=\iint_{R<S}f_R(r)f_S(s)\,drds \quad\cdots\cdots(11)$$

と表わされることはよく知られている．このようにして求められた破壊確率では，不確定性のうちのランダム性のみを，確率密度関数を用いて評価していることになる．

いま，R, S のおのおのに対するファジィ性が言語変数として与えられれば，R, S に関する総合的評価値 P_{TR}, P_{TS} は以下の式を用いて求めることができる．

$$P_{TR}=\int_{U\times W}\bigvee_i[\mu_{PR_i}(u)\wedge\mu_{WR_i}(w)]|(u, w) \quad\cdots\cdots(12)$$

$$P_{TS}=\int_{U\times W}\bigvee_i[\mu_{PS_i}(u)\wedge\mu_{WS_i}(w)]|(u, w) \quad\cdots\cdots(13)$$

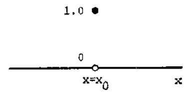
ここに，U, W は $0\leqq u\leqq 1$, $0\leqq w\leqq 1$ で規定される．ここでは，weight の影響を後で考慮できるように，式 (6) とは異なり，和集合，積集合の計算に直積の概念を用いている[5]．次に，P_{TR} (P_{TS}) を $f_R(r)$ ($f_S(s)$) に関連づけるために核 $K_R(v)$ ($K_S(v)$) を設定する．この核は名前のとおり，積分方程式における核に類似したもので，ある r_0 (s_0) という値がファジィ量として与えられた場合には，そのファジィ性を増加させ，ファジィ量でない場合には，それをファジィ化する働きをする．また，v は帰属度の広がりを表わす．

この核を用いて，P_{TR} (P_{TS}) と $f_R(r)$ ($f_S(s)$) を関連づけるファジィ関係 $\tilde{R}_R$ ($\tilde{R}_S$) を定義する．

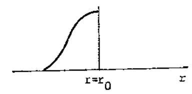
「もし，P_{TR} (P_{TS}) が Large なら，$K_R(v)$ ($K_S(v)$) は Large
　P_{TR} (P_{TS}) が Medium なら，$K_R(v)$ ($K_S(v)$) は Medium,
　P_{TR} (P_{TS}) が Small なら，$K_R(v)$ ($K_S(v)$) は Small」

ここで，Small は，不確定要因の影響が小さい，すなわち安全性が比較的高いことを表わし，Large は，不確定要因の影響が大きく，安全性が低いことに対応している．Medium は両者の中間を表わす．このファジィ関係で用いられる核 $K_R(v)$, $K_S(v)$ をどう設定するかが，結果に重要な影響を与える．以下，その設定法を $K_R(v)$ を例にとり概説する．

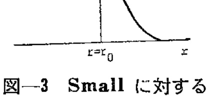
通常の集合においては，特性関数が図―2 のように表わされ，$x=x_0$ という値のみが帰属度を有し，他の値は帰属度 0 となる．ところが，ファジィ集合では，$x=x_0$ 以外の値も何らかの帰属度をもつわけであるから，核 $K_R(v)$ も r のある領域にわたって値をもつことになる．総合的評価値 P_{TR} が Small であるということは，構



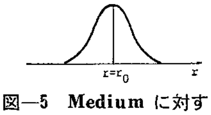
図―2　特性関数



図―4　Large に対する核 $K_R(v)$



図―3　Small に対する核 $K_R(v)$



図―5　Medium に対する核 $K_R(v)$

造物の安全性が比較的高いことに対応しているため，$K_R(v)$ が Small であるということは，図—**3** に示すように，$r \geqq r_0$ で 0 より大きい帰属度を有し，逆に，P_{TR} が Large では，$K_R(v)$ は，$r \leqq r_0$ で 0 より大きい帰属度をもつことになる（図—**4**）．また，P_{TR} が Medium のとき，$K_R(v)$ は両者の中間として，図—**5** のような r_0 の両側に値をもつ帰属度関数をもつと考えることができる．一方，$K_S(v)$ の場合には，$K_R(v)$ の Small, Large の関係を逆にして，帰属度関数を定義することが必要である．

このようにして規定された核 $K_R(v)$, $K_S(v)$ を用いて，その帰属度関数 $\mu_{K_R}(v)$, $\mu_{K_S}(v)$ が次式から求められる．

$$\left.\begin{aligned}\tilde{R}_R \circ P_{TR} &= \int_{W\times V} \bigvee_u [\mu_{P_{TR}}(u,w) \wedge \mu_{\tilde{R}_R}(v,u)] |(w,v)\\ \tilde{R}_S \circ P_{TS} &= \int_{W\times V} \bigvee_u [\mu_{P_{TS}}(u,w) \wedge \mu_{\tilde{R}_S}(v,u)] |(w,v)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(14)$$

$$\left.\begin{aligned}K_R(v) &= \int_V \bigvee_w \tilde{R}_R \circ P_{TR} | v\\ K_S(v) &= \int_V \bigvee_w \tilde{R}_S \circ P_{TS} | v\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(15)$$

ただし，V は v からなる空間を表わし，定義域は r あるいは s の定義域に一致する．式 (14), (15) を用いて，R, S に関するファジィ確率 $P(r)$, $P(s)$ が以下のように求めることができる．

$$P(r) = \int_V \mu_{K_R}(v) f_R(r+v) dv \quad \cdots\cdots(16)$$

$$P(s) = \int_V \mu_{K_S}(v) f_S(s+v) dv \quad \cdots\cdots(17)$$

このとき，主観的不確定性を考慮した R, S のファジィ化された確率密度関数 (fuzzified probability density function) $\tilde{f}_R(r)$, $\tilde{f}_S(s)$ は，$P(r)$, $P(s)$ を正規化することにより，

$$\tilde{f}_R(r) = \frac{P(r)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(r) dr} \quad \cdots\cdots(18)$$

$$\tilde{f}_S(s) = \frac{P(s)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(s) ds} \quad \cdots\cdots(19)$$

ここに，

$$p(r) = dP(r)/dr \quad \cdots\cdots(20)$$

$$p(s) = dP(s)/ds \quad \cdots\cdots(21)$$

と求まり，破壊確率 p_f は

$$p_f = \iint_{R<S} \tilde{f}_R(r) \tilde{f}_S(s) dr ds \quad \cdots\cdots(22)$$

として計算できる．

式 (18), (19) の関係は，どのような確率変数に対しても成り立つので，ファジィ化された確率密度関数を用いれば，R, S の 2 変数問題だけでなく，もっと一般的な場合に対しても，主観的不確定性の影響を考慮することが可能である．

6. 補正係数の算定法

Ang, Amin[4] により提案された拡張信頼性理論では，主観的不確定性は“主観的不明量”と名付けられ，補正係数とよばれる確率変数を用いることにより取り扱われている．しかしながら，この補正係数の確率密度関数あるいは平均・分散等の統計的特性値の決定の仕方には，明確な根拠が与えられていない．また，主観的不確定性は主観的な評価によってのみ規定されるべきものであると考えられ，その意味では，前節までに示した言語変数を用いたファジィ論的評価法が適していると考えられる．しかし，拡張信頼性理論の定義の簡明さ，計算の簡単さは特筆すべきものであり，実用性という観点からは優れた方法であるといえる．そこで，本研究では，補正係数はランダム変数として定義されるが本質的にはファジィ性を表わすものとみなし，その確率分布の決定に主観的評価を結びつけることを考える．

一般に，R, S の 2 変数問題に対して 3 つの補正係数を考えることができる．

$$Z = N_g(N_R R - N_S S) \quad \cdots\cdots(23)$$

ここに，N_g は Z の定義に関する不確定性，N_R, N_S は R, S のモデル化に関する不確定性である．ファジィ確率の考え方をそのまま用いるとすると，N_g の効果は式 (10) の $\mu(z)$ に含まれ，N_R, N_S は **5**. のファジィ確率密度関数に含まれる．

いま，補正係数を N_j と表わし，ランダム変数であるという条件を満足さすために先験分布をもつと仮定する．ここでいう先験分布とは，ベイズ理論における diffuse priors に対応するものと考えられる．次に，N_j に影響を及ぼす要因を F_{ij} ($i=1, \cdots, r_j$; r_j : F_{ij} の数) とする．このとき，総合的評価値 P_T は式 (7) あるいは (12), (13) より求めることができる．ここで，P_T と核 $K_{N_j}(v)$ との間にファジィ関係を設定し，式 (14), (15) により $K_{N_j}(v)$ の帰属度関数 $\mu_{K_{N_j}}(v)$ を求める．

先験的に知られている補正係数 N_j の確率密度関数を $\phi(n_j)$ とすると，ファジィ確率 $P(n_j)$ およびファジィ化された確率密度関数 $\tilde{f}_{N_j}(n_j)$ は，式 (16)～(19) と同様にして，

$$P(n_j) = \int_V \mu_{K_{N_j}}(v) \phi(n_j + v) dv \quad \cdots\cdots(24)$$

$$\tilde{f}_{N_j}(n_j) = \frac{P(n_j)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(n_j) dn_j} \quad \cdots\cdots(25)$$

と求められる．

このとき，式 (23) に対して安全性指標 β は，一次近

似を用いることにより，次のように求められる[8]．

$$\beta=\frac{\bar{\nu}_R\bar{R}-\bar{\nu}_S\bar{S}}{\sqrt{\Delta_g{}^2(\bar{\nu}_R\bar{R}-\bar{\nu}_S\bar{S})^2+\bar{R}^2\bar{\nu}_R{}^2\Delta_R{}^2+\bar{\nu}_R{}^2\sigma_R{}^2+\bar{S}^2\bar{\nu}_S{}^2\Delta_S{}^2+\bar{\nu}_S{}^2\sigma_S{}^2}} \quad \cdots\cdots(26)$$

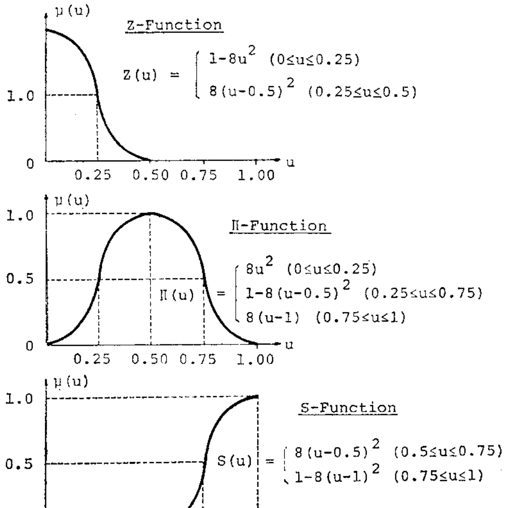
ここに，S, R, N_S, N_R, N_g に関する平均値，変動係数を，それぞれ，$(\bar{S}, \sigma_S/\bar{S})$，$(\bar{R}, \sigma_R/\bar{R})$，$(\bar{\nu}_S, \Delta_S)$，$(\bar{\nu}_R, \Delta_R)$，$(\bar{\nu}_g, \Delta_g)$ とする．また，σ は標準偏差を表わす．式 (25) により求められた各補正係数のファジィ化された確率密度関数を用いて，$(\bar{\nu}_S, \Delta_S)$，$(\bar{\nu}_R, \Delta_R)$，$(\bar{\nu}_g, \Delta_g)$ を求め，それらを式 (26) に代入することにより，各要因個々に含まれる主観的不確定性の影響を，安全性指標 β の計算に含めることができる．

7. 数値計算例

言語変数 Small, Medium, Large などに対応する帰属度関数は，取り扱っている問題の現象認識に基づき，慎重に決定される必要があるが，本数値計算例では，帰属度関数の標準関数[11]として知られている Z 関数，Π 関数，S 関数を用いる．図—6 にその形状を示す．

(1) 主観的不確定性を考慮した破壊確率の計算例

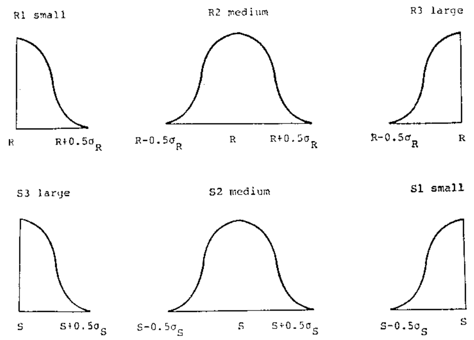
抵抗 R，荷重 S に含まれる不確定要因として，表—1 に示す R1～R5, S1～S5 の項目を考える．厳密にいうならば，式 (7) あるいは (12), (13) が成立するには，これらの項目間に独立性が存在することが必要である．しかし，式 (7) 等の総合的評価値が和集合の概念を用いて定義され，その演算が帰属度関数の最大のものに注目して行われていることを考えると，完全な独立性が保持されない場合でも，各不確定要因の影響は大きめに評価されることになり安全側の解が求まる．また，どうしてもある項目間の従属性が問題になる場合は，それらの要因の重要度 (weight) の評価にその影響を反映さすことも可能である．



図—6 標準帰属度関数

表—1 N_g N_R, N_S に関する不確定要因

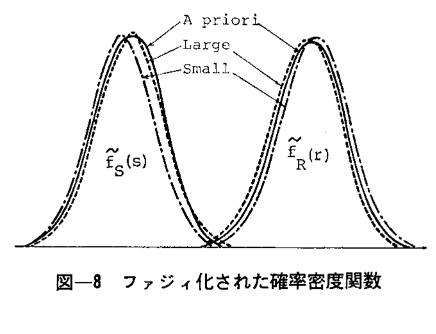
G1	データ不足による不確定性	R5	構造物の冗長性
G2	構造物の重要度に対する配慮	S1	荷重の予測誤差に基づく不確定性
G3	産業上の要請		
G4	財政上の要請	S2	実荷重からモデル荷重への変換誤差
G5	政治上の要請	S3	荷重の動的特性の考慮の仕方による誤差
R1	製作精度・施工上の不確定性		
R2	強度解析モデルの信頼性	S4	荷重から荷重作用への変換における誤差
R3	計算誤差・近似計算などの不確定性	S5	荷重の組合せに基づく不確定性
R4	抵抗力の材料学的劣化		



図—7 $K_R(v)$ と $K_S(v)$ の帰属度関数

R, S の核の帰属度関数を，5．で説明した考え方に基づき，図—7 のように定義する．ここでは，図—7 からもわかるように，核 $K_R(v)$, $K_S(v)$ を，-0.5σ と 0.5σ (σ：標準偏差) の間に設定している．この核の定義域は，結果に大きな影響を与えると考えられ，実際問題に本手法を適用するには，現行設計とのキャリブレーション等を通じ，現実的な範囲の推定が必要である．

次に，R, S がそれぞれ正規分布 N(2 600 kg/cm²[255 MPa]，(260 kg/cm²)² [(25.5 MPa)²])，N(1 200 kg/cm² [118 MPa]，(240 kg/cm²)²[(23.5 MPa)²]) に従うと仮定すると，ファジィ化された確率密度関数は，不確定要因の大小に応じ，図—8 のように求めることができる．



図—8 ファジィ化された確率密度関数

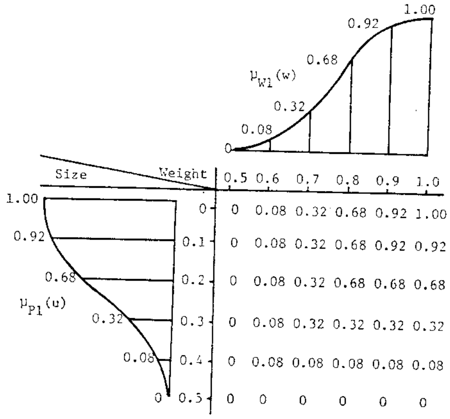
表—2　破壊確率と安全性指標の計算結果

R	S	Probability of Failure (Safety Index)	
		A priori	Fuzzified
Large	Large	2.25×10^{-4} (4.007)	3.57×10^{-4} (3.812)
Small	Small	2.25×10^{-4} (4.007)	4.06×10^{-5} (4.182)

表—3　不確定要因の評価例

Parameter	Size	Weight	Parameter	Size	Weight
G1	Small	Large	R4	Small	Small
G2	Medium	Medium	R5	Small	Small
G3	Large	Very large	S1	Large	Small
G4	Medium	Small	S2	Large	Large
G5	Small	Small	S3	Medium	Medium
R1	Large	Medium	S4	Medium	Medium
R2	Very large	Very large	S5	Very large	Very large
R3	Medium	Medium			

表—4　Small size ∩ Large weight



Size \ Weight	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0	0.08	0.32	0.68	0.92	1.00
0.1	0	0.08	0.32	0.68	0.92	0.92
0.2	0	0.08	0.32	0.68	0.68	0.68
0.3	0	0.08	0.32	0.32	0.32	0.32
0.4	0	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
0.5	0	0	0	0	0	0

表—5　パラメーター G 1～G 5 に対する総合的評価値 P_T

(1) All sizes are Large

Weight	Size 0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.32	0.68	0.92	1.00
0.1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.32	0.68	0.92	0.92
0.2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.32	0.68	0.68	0.68
0.3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.32	0.68	0.68	0.68
0.4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.32	0.68	0.92	0.92
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.32	0.68	0.92	1.00
0.6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.32	0.68	0.92	0.92
0.7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.32	0.68	0.68	0.68
0.8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.32	0.68	0.68	0.68
0.9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.32	0.68	0.92	0.92
1.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.32	0.68	0.92	1.00

(2) All sizes are Small

Weight	Size 0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	1.00	0.92	0.68	0.32	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	0.92	0.92	0.68	0.32	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.2	0.68	0.68	0.68	0.32	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.3	0.68	0.68	0.68	0.32	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.4	0.92	0.92	0.68	0.32	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.5	1.00	0.92	0.68	0.32	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.92	0.92	0.68	0.32	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.7	0.68	0.68	0.68	0.32	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.8	0.68	0.68	0.68	0.32	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.9	0.92	0.92	0.68	0.32	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.0	1.00	0.92	0.68	0.32	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

図—7 のような核を設定することにより，不確定要因の影響が小さい場合には，R の平均は大きく，S の平均は小さくなり，また，不確定要因の影響が大きい場合には，逆の傾向がみられるというように，主観的な安全性評価と R, S のファジィ化された確率密度関数の間に，合理的な対応をつけることができる.

不確定要因の大きさに応じて求められた破壊確率と安全性指標の値を，表—2 に示す．表中，A priori は主観的不確定性を考慮せず，ランダム性のみを考慮した場合を示す．また，Large, Small は R, S に関するすべての不確定要因を Large, Small としたことを示す．結果は，確率密度関数の変化からも明らかなように，Large の場合には p_f が大きくなり，Small の場合には p_f が小さくなる.

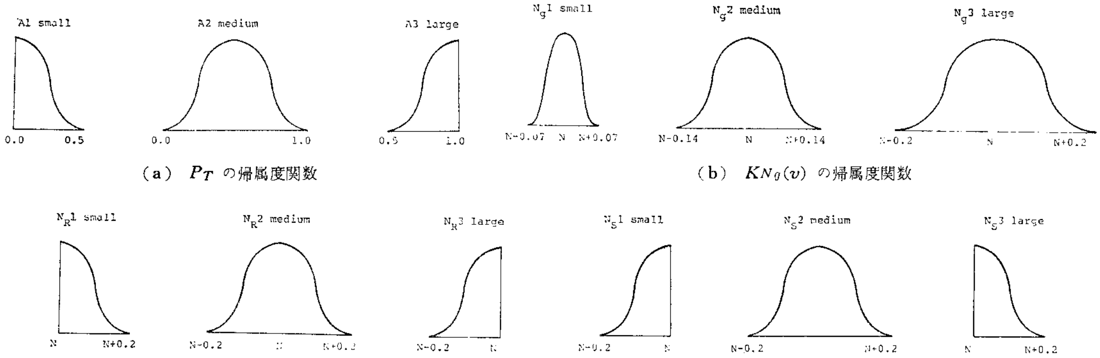
(2)　補正係数および安全性指標の計算例

safety margin を式 (23) で与え，モデル関数 g, 抵抗 R, 荷重 S に対する補正係数 N_g, N_R, N_S をファジィ理論を用いて計算する．ここで，N_g, N_R, N_S に影響を及ぼす不確定要因を，それぞれ G 1～G 5, R 1～R 5, S 1～S 5 とおき，表—1 に示す.

このとき，size と weight を，表—3 に示すような言語変数で与える．いま，パラメーター G 1 について，$P_1 \cap W_1$ を求めると，表—4 のファジィ行列が得られる．すべての要因に対して，この $P_i \cap W_i$ を求め，総合化すると，総合的評価値 P_T は，たとえば N_g に関しては，表—5 のように求められる．次に，不確定性の大きさと補正係数の値を関連づけるために，N_g, N_R, N_S の核を 図—9 のように設定する．この核を用いて，式 (14) の $\tilde{R}\circ P_T$ を求めたものが 表—6 である．ここで，weight の影響を考慮するために，$0.6 \leqq w \leqq 1.0$ の範囲から帰属度関数を求めると，

$$\mu_{N_g}(u)=0.8|(N_g-0.08)+0.32|(N_g-0.06)+0.68|(N_g-0.04)+0.92|(N_g-0.02)+1.00|N_g+0.92|(N_g+0.02)+0.68|(N_g+0.04)+0.32|(N_g+0.06)+0.08|(N_g+0.08) \quad\cdots\cdots(27)$$

$$\mu_{N_R}(u)=1.0|N_R+0.9|(N_R+0.02)+0.68|(N_R+0.04)+0.32|(N_R+0.06)$$



（a） P_T の帰属度関数　　（b） $KN_g(v)$ の帰属度関数

（c） $KN_R(v)$ の帰属度関数　　（d） $KN_S(v)$ の帰属度関数

図—9 各要因の帰属度関数

表—6 $\tilde{R}\cdot P_T$ の帰属度関数

（1） N_g

		$N-0.1$		$N-0.06$			N			$N+0.06$		$N+0.1$
Weight	0.0	0.00	0.08	0.32	0.50	0.78	1.00	0.78	0.50	0.32	0.08	0.00
	0.1	0.00	0.08	0.32	0.50	0.78	0.92	0.78	0.50	0.32	0.08	0.00
	0.2	0.00	0.08	0.32	0.50	0.68	0.68	0.68	0.50	0.32	0.08	0.00
	0.3	0.00	0.08	0.32	0.50	0.68	0.68	0.68	0.50	0.32	0.08	0.00
	0.4	0.00	0.08	0.32	0.50	0.78	0.92	0.78	0.50	0.32	0.08	0.00
	0.5	0.00	0.08	0.32	0.50	0.78	1.00	0.78	0.50	0.32	0.08	0.00
	0.6	0.00	0.08	0.32	0.50	0.78	0.92	0.78	0.50	0.32	0.08	0.00
	0.7	0.00	0.08	0.32	0.50	0.68	0.68	0.68	0.50	0.32	0.08	0.00
	0.8	0.00	0.08	0.32	0.32	0.50	0.68	0.50	0.32	0.32	0.08	0.00
	0.9	0.00	0.08	0.32	0.68	0.72	0.92	0.72	0.68	0.32	0.08	0.00
	1.0	0.00	0.08	0.32	0.68	0.92	1.00	0.92	0.68	0.32	0.08	0.00
membership function		0.00	0.08	0.32	0.68	0.92	1.00	0.92	0.68	0.32	0.08	0.00

（2） N_R

		$N-0.1$		$N-0.06$			N			$N+0.06$		$N+0.1$
Weight	0.0	0.00	0.08	0.32	0.68	0.92	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.1	0.00	0.08	0.32	0.68	0.92	0.92	0.08	0.08	0.08	0.08	0.00
	0.2	0.00	0.08	0.32	0.68	0.68	0.68	0.32	0.32	0.32	0.08	0.00
	0.3	0.00	0.08	0.32	0.50	0.50	0.68	0.68	0.68	0.32	0.08	0.00
	0.4	0.00	0.08	0.32	0.50	0.50	0.92	0.92	0.68	0.32	0.08	0.00
	0.5	0.00	0.08	0.32	0.50	0.50	1.00	0.92	0.68	0.32	0.08	0.00
	0.6	0.00	0.08	0.32	0.50	0.50	0.92	0.92	0.68	0.32	0.08	0.00
	0.7	0.00	0.08	0.32	0.50	0.50	0.68	0.68	0.68	0.32	0.08	0.00
	0.8	0.00	0.08	0.32	0.32	0.32	0.46	0.46	0.46	0.32	0.08	0.00
	0.9	0.00	0.08	0.08	0.08	0.80	0.85	0.85	0.68	0.32	0.08	0.00
	1.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.92	0.68	0.32	0.08	0.00
membership function		0.00	0.08	0.32	0.50	0.50	1.00	0.92	0.68	0.32	0.08	0.00

（3） N_S

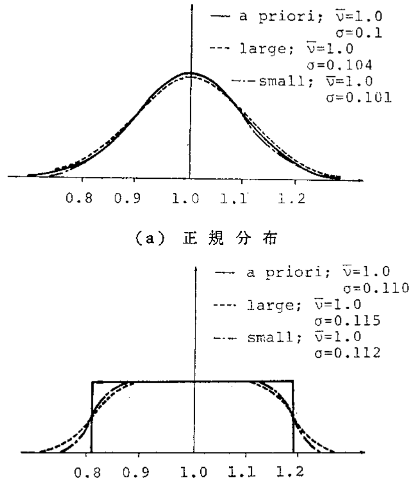
		$N-0.1$		$N-0.06$			N			$N+0.06$		$N+0.1$
Weight	0.0	0.00	0.08	0.32	0.68	0.92	1.00	0.50	0.50	0.32	0.08	0.00
	0.1	0.00	0.08	0.32	0.68	0.92	0.92	0.50	0.50	0.32	0.08	0.00
	0.2	0.00	0.08	0.32	0.68	0.68	0.68	0.50	0.50	0.32	0.08	0.00
	0.3	0.00	0.08	0.32	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.32	0.08	0.00
	0.4	0.00	0.08	0.32	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.32	0.08	0.00
	0.5	0.00	0.08	0.32	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.32	0.08	0.00
	0.6	0.00	0.08	0.32	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.32	0.08	0.00
	0.7	0.00	0.08	0.32	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.32	0.08	0.00
	0.8	0.00	0.08	0.32	0.68	0.68	0.68	0.32	0.32	0.32	0.08	0.00
	0.9	0.00	0.08	0.32	0.68	0.92	0.92	0.08	0.08	0.08	0.08	0.00
	1.0	0.00	0.08	0.32	0.68	0.92	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
membership function		0.00	0.08	0.32	0.68	0.92	1.00	0.50	0.50	0.32	0.08	0.00

$$+0.08|(N_R+0.08) \cdots\cdots\cdots (28)$$

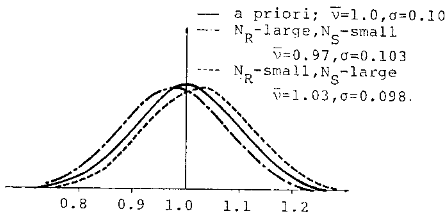
$$\mu_{N_S}(u)=0.08|(N_S-0.08) +0.32|(N_S-0.06) +0.68|(N_S-0.04) +0.92(N_S-0.02)+1.00|N_S \cdots\cdots\cdots (29)$$

となる．

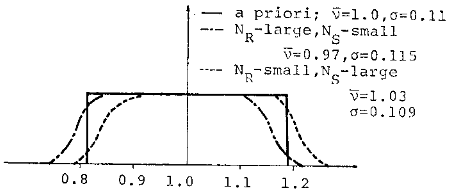
いま，N_g, N_R, N_S が，すべて正規分布 $N(1.0, 0.1^2)$ に従うとすると，その確率密度関数は式 (24), (25) によって，ファジィ化され，N_g, N_R, N_S の（平均，変動係数）は，(1, 0.1) から，それぞれ (1, 0.104), (0.997, 0.105), (1.003, 0.104) に変化する．このとき，R の平均，標準偏差を 2 600 kg/cm²[255 MPa], 260 kg/cm²[25.5 MPa] S の平均，標準偏差を 1 200 kg/cm²[118 MPa], 240 kg/cm²[23.5 MPa] とすると，安全性指標 β の値は，式 (26) より β



図—10 補正係数 N_g のファジィ化された確率密度関数



（a）正規分布



（b）一様分布

図—11　補正係数 N_R, N_S のファジィ化された確率密度関数

表—7　安全性指標の計算値

	N_g	N_R	N_S	A priori	Fuzzified
Normal Distribution	Large	Large	Large	2.955	2.744
	Medium	Medium	Medium	2.955	2.873
	Small	Small	Small	2.955	3.117
	Large	Small	Small	2.955	3.108
	Small	Large	Small	2.955	2.909
	Small	Small	Large	2.955	2.962
	Large	Large	Small	2.955	2.902
	Large	Small	Large	2.955	2.954
	Small	Large	Large	2.955	2.950
		Example		2.955	2.861
Uniform Distribution	Large	Large	Large	2.813	2.601
	Medium	Medium	Medium	2.813	2.727
	Small	Small	Small	2.813	2.962
		Example		2.813	2.717

=2.861 と求まり，N_g, N_R, N_S の推定に関する種々の不確定要因が考慮できることになる．

次に，このような主観的不確定性による安全性指標の変化を知るために，すべての要因が Large の場合，Small の場合の補正係数の分布の変化を調べる．**図—10，11** に，数値計算結果を示す．ここでは，補正係数の先験分布として，正規分布と一様分布の２種類を考えている．このときの安全性指標の値を，**表—7** に示す．この表からも明らかなように，主観的不確定性が大きい場合には，それらを考慮しない場合に比べて，安全性指標の値は小さくなり，不確定性が小さい場合には，逆の結果が得られる．

8. あとがき

土木構造物の設計に含まれる不確定要因が，ランダム性の概念だけでは処理できないことに注目をし，ランダム性以外の曖昧さをもつ不確定要因の定量化，およびその安全性評価への導入に関する基礎的な研究を行った．主観性に帰因する曖昧さを定量的に評価するために考え出されたファジィ集合論に着目し，ファジィ確率の概念を用いることにより，新しい信頼性解析法の定式化を図った．以下，本研究を通じて得られた結論および今後の課題を示す．

（1）土木構造物の設計における種々の不確定性が，ランダム性とファジィ性という概念を定義することにより，２つに大別できる．土木構造物の安全性評価においては，確率統計的に扱うことのできないファジィ性をもつ不確定要因の影響が重要であり，それらを確率変数として表現することは，論理的に無理があり，ファジィ論的取扱いが適している．

（2）ファジィ理論を用いた主観的不確定性の評価法は，① 計算が簡便であること，② 設計者の工学的判断を言語変数を用いて表現できること，③ ファジィ関係や核の設定を工夫することにより，破壊確率や安全性指標などの既存の安全性評価尺度との対応が可能になること，などの利点を有し，種々の不確定性の定量化手法として有効である．

（3）ファジィ確率の概念を用いることにより，ランダム性とファジィ性を同時に取り扱うことができ，より汎用性のある合理的な信頼性解析法の定式化が可能になる．

（4）補正係数を確率変数と考えることには論理的な矛盾があるが，拡張信頼性理論は実用性という観点からは優れた方法である．補正係数の決定の際にファジィ理論を用いることにより，その統計的特性値と主観的不確定性との関係を明確にすることが可能となる．

（5）ファジィ確率の考え方を意思決定理論と組み合わせることにより，確率変数とファジィ変数が同時に取り扱え，しかも意思決定に含まれる人間の判断基準に関わる曖昧さも考慮できる設計法が導ける可能性がある．

以上のように，構造工学へのファジィ理論の適用には，多くの利点あるいは大きな可能性があると思われる．しかしながら，この理論自身もまだ歴史が浅く，実際問題への適用には，いまだ多くの問題点がある．

（1）帰属度関数の決定法——帰属度関数の決定法については，まだ合理的な方法論は確立しておらず，心理学・社会学などの他の分野の協力を得て考究されるべきである．現在のところ，アンケート調査や人間の意識調査等を通じ，設計者の工学的判断を十分反映させ得る関数形を求める試み[12]がなされている程度で，今後の研究が望まれる．

（2）ファジィ関係・核の設定法——本文中に述べたように，ファジィ関係・核の設定が非常に重要である．

この決定法は，帰属度関数の決定法とも関連するものであり，既存構造物の破損事故調査[13]あるいは現行設計とのキャリブレーションに基づいて研究を行う必要がある．

なお，本研究の一部は，文部省科学研究費によったものである．

参 考 文 献

1) Pugsley, A.G. : The Prediction of the Proneness to Structural Accidents, Structural Engineer, Vol. 51, No. 3, pp. 195～196, 1973.
2) Brown, C.B. : A Fuzzy Safety Measure, Proc. of ASCE, Vol. 105, EM 5, pp. 855～872, 1979.
3) Benjamin, J. and C.A. Cornell : Probability, Statistics and Design for Civil Engineering, McGraw Hill, 1970.
4) Ang, A. H-S and M. Amin : Safety Factors and Probability in Structural Design, Proc. of ASCE, Vol. 95, ST 7, pp. 1389～1405, 1969.
5) Blockley, D.I. : Predicting the Likelihood of Structural Accidents, Proc. of ICE, Vol. 59, pp. 659～668, 1975.
6) 長尾義三：土木事業における不確実問題，土木学会誌，Vol. 65, pp. 2～6, 1980 年 9 月.
7) 伊藤 学：構造設計における安全性の規範，土木学会誌，Vol. 60, No. 10, pp. 35～43, 1975 年 8 月.
8) Ang, A. H-S and C.A. Cornell : Reliability Bases of Structural Safety and Design, Proc. of ASCE, Vol. 100, ST 9, pp. 1755～1769, 1974.
9) Zadeh, L.A. : Fuzzy Sets, Information and Control, Vol. 8, pp. 338～353, 1965.
10) Yao, J.P. : Damage Assessment of Existing Structures, Proc. of ASCE, Vol. 104, EM 4, pp. 785～798, 1980.
11) 水本雅晴：最近の Fuzzy 集合理論，数理科学，No. 191, pp. 15～20, 1979.
12) 石田東生：今後の土木計画における不確実問題の取り扱いに関する試行，土木計画学シンポジウム論文集，No. 14, pp. 93～102, 1980.
13) Blockley, D.I. : Analysis of Structural Failures, Proc. of ICE, Vol. 62, pp. 51～74, 1977.

（1981.8.5・受付）