

浸透層上の流れの抵抗則に関する理論的研究

A THEORETICAL STUDY ON THE RESISTANCE LAW OF
THE FLOW OVER POROUS LAYER

山田 正*・川端 規之**

By Tadashi YAMADA and Noriyuki KAWABATA

1. はじめに

従来より平板上の流れの流速分布や、それに伴う抵抗則に関しては膨大な数の研究があり、実用に供し得る数数の成果が発表されている。一方自然河川の河床は砂や砂利、礫などの浸透性の材料で構成されているが、通常は砂漣や、砂堆等の河床波が存在している。この自然河川の抵抗則を知るために、上述の河床波の形状に起因する流水抵抗や、移動床としての効果を考慮した研究は今日まで盛んに行われてきた。しかしこのような取扱いをする前に、河床が平坦、固定床の場合ですら、その抵抗則に関してはいまだ究明しなければならない問題が数多く残されているように思われる。また浸透性壁面上の流れとして、土壤表面を流れる水流 (Hortonian type の overland flow や return flow¹⁾) の抵抗則を知ることは水文現象の解明にとって重要なことであると思われる。このような見地に立って、本研究は浸透性の壁面 (層) を有する流れの流速分布、抵抗則に関し、その水理学的特性を理論的に明らかにすることを目的としたものである。なお著者らは平板に球、半球や砂粒子をはりつけたタイプの粗面をも浸透層の特殊な場合 (浸透層厚が極端に薄い場合) として考えている。よって本研究の内容はきわめて一般的な粗面特性をもった壁面上の流れの抵抗特性を検討したものになっている。

2. 従来の研究

上記のような浸透性の壁面や層上の流れは自然界や工業装置内部に数多く見出すことができ、それぞれの分野ごとに比較的独立して研究がなされてきた。それらを以下に記してみると、① 血管内の血液流、② 化学工業装

置内部の管路流れ、③ 植物群落上の流れ、④ 自然河川の流れ (水文学のいわゆる“表面流出”の抵抗則の研究も含む)、⑤ 航空機で境界層剝離を制御する目的で suction や ejection の装置を有する翼上の流れ、⑥ その他。上記の各研究のうち①は血液中の栄養成分の血管壁を通しての摂取や、老廃物の排出機能に端を発して非ニュートン流体の管壁での条件を研究した Helmholtz²⁾ の研究をはじめ、以後今日に至るまで数多くの研究がある。②の工業装置の中で特に石油掘削技術や紙パルプ製造機上の問題で研究した Beavers と Joseph³⁾ や G.I. Taylor⁴⁾ の一連の研究があり、特に浸透性の壁面上での境界条件に関してすぐれた成果をあげている。特に彼らの提案した境界条件は希薄気体の壁面での条件⁵⁾ と同じものになっていることは興味深い。③はおもに植物群落内でのガス交換等の見積りに関して、農業気象の分野での研究があり、その中で植物群落 (浸透層) 内での流速分布として exponential 形を理論的に初めて導いた井上⁶⁾ の研究がある。その中では“Honami”の現象が提唱されている。④は従来より河川工学者や水理研究者の間で実際河川や表面流出を模擬した実験装置上で抵抗則に関連して議論されてきた。しかしこれらの現象が浸透層上での流れとして取り扱われてきたのは比較的最近になってからであり、自然河川の抵抗係数 f' が流れのレイノルズ数とともに著しく増大することを見出した Kennedy⁷⁾ の報告が契機となり、MIT での Gelhar⁸⁾ による浸透性の壁面をもつ管路流れに関する一連の実験的および理論的研究がなされてきた。またそれに引き続き、中川・瀬津¹¹⁾ は浸透層内の乱れと主流との間の相互作用を考慮した理論展開を行い、浸透流の存在による付加応力の理論的導出と実験による検証を行っている。この中で特に、Gelhar⁸⁾ の実験により、浸透層をもつ流れの (主流の) 抵抗係数は著しく大きな値をとること、レイノルズ数の増大とともに抵抗係数も増大すること、球を積み上げたタイプの浸透層より骨格構造 (Ske-

* 正会員 工博 防衛大学校講師 土木工学教室

** 工修 新日本製鉄 (株) (当時東京工業大学大学院生)

tal) の浸透層の場合の方が抵抗係数の値は大きく、レイノルズ数の増加に伴う抵抗係数の増加傾向も著しいこと、等の非常に興味ある現象が明らかにされた。⑤は航空機の翼の抵抗、剝離、揚力発生等の問題に関連して、理論および実験的に精緻な議論が展開されている。

3. 浸透層上の流れの乱れエネルギー収支

図-1 は一般的な浸透層をもつ流れの模式図を示している。しかし図-1 はあまりに一般的な浸透層であるために、精密な理論展開を行うことは困難であることが考えられる。ところで文献 13) において著者らは、図-1 の浸透層と力学的に同じ働きをすると考えられる図-2 のヘル・ショウ型の浸透層をもつ 2 次元管路流れに対して理論解析を行っている。この中で流れが全領域にわたって層流の場合には主流(図-1, 2 の $0 \leq z \leq H$ の範囲をいう)の抵抗係数が単なる平板上の流れの場合より減少することを見出し、それが、 $z=0$ の境界面でのスリップ速度の存在によることを明らかにしている。

一方乱流の場合には層流の場合における取扱いほど簡単ではなく、さまざまな要素が絡み合っていることが予想される。流れがすべて乱流の場合の主流の特性を概観するために、ここでは Gelhar ら⁹⁾ にならって乱れエネルギーの収支を考えてみた。ここで乱れエネルギー q^2 ($=\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}$) に関する収支式は、

$$-\rho u'w' \frac{dU(z)}{dz} - \rho \epsilon(z)$$

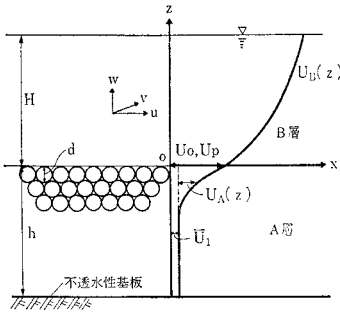


図-1 浸透層を有する流れの模式図

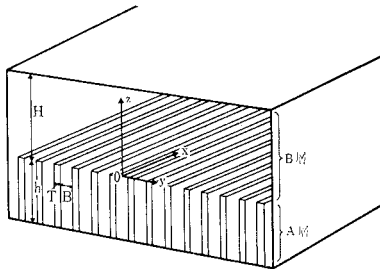


図-2 ヘル・ショウ型の浸透層をもつ流れ

表-1 流れが層流の場合と乱流の場合の比較

境界面の種類	流れの状況	スリップ速度の有無	境界面を通過する乱れエネルギーの有無
平板(滑面)	層流・乱流ともに	×	×
浸透層(粗面も含む)	層流	○	×
	乱流	○	○

$$-\frac{d}{dz} \left[(\rho q^2 / 2 + p') w' - \frac{\mu}{2} \frac{dq^2}{dz} \right] - \mu \frac{dw'^2}{dz} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

となる¹⁸⁾。ここに式(1)中の各記号は通常用法に従っている。式(1)左辺の第1項は乱れエネルギーの発生項、第2項は消散項、第3項は拡散項である。式(1)を $z=0$ の浸透層上端(境界面)から開水路流れの水面 $z=H$ まで積分すると、

$$\tau(0) (\bar{U}_B - u_p) - \rho \bar{\epsilon} \cdot H - \left[(\rho q^2 / 2 + p') w' - \frac{\mu}{2} \frac{dq^2}{dz} - \mu \frac{dw'^2}{dz} \right]_{z=0} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここに $\tau(0)$ は $z=0$ の境界面でのせん断応力、 \bar{U}_B は主流 ($0 \leq z \leq H$) の断面平均流速、 u_p は $z=0$ でのスリップ速度、 $\bar{\epsilon}$ は $\epsilon(z)$ の断面平均値、 $[]_{z=0}$ は $z=0$ の境界面をよぎる乱れエネルギーのフラックスを意味している。式(2)で通常の平板上の流れの場合と異なる点は $\tau(0)u_p$ と $[]_{z=0}$ の存在である。このうち $\tau(0)u_p$ は境界面上のせん断応力 $\tau(0)$ に抗して u_p がなす仕事率を意味しており、このスリップ速度 u_p の存在は上記の層流の場合と同様に、主流にとっては抵抗の減少効果をもたらしている。一方 $[]_{z=0}$ は境界面が浸透性(可撓性でも同じ)であることによる浸透流と主流との相互作用を意味しており、この項が大きな値をもつほど両層(浸透層と主流)の間での運動量の交換が活発になる。このことは主流にとっては抵抗の増大を意味している。結局主流の抵抗の評価には上記のスリップ速度と、境界面での乱れの効果を正しく算出しなければならないことがわかる。以上の考察をまとめると表-1 のようになる。

4. 浸透層上の流れの抵抗則

(1) 理論構成の概要

一般に流れが乱流の場合、その抵抗を評価する手法としては大きく分けて2通りの方法が知られている。そのうちの1つは平均流速分布に何らかの相似分布(対数則や1/7乗則等)を導入し、ある断面での速度欠損量(運動量欠損量)の変化率とその断面に働く外力-抵抗に等しくなることを利用したものである。残りの1つは最近

10 数年間で非常に精力的に研究されてきた手法であり、乱れに関するより高次の完結問題としてイ雷诺ズ応力そのものを求める方法である（たとえば Bradshaw・Ferris や Hanjalic・Lauder らのモデル²⁵⁾）。この2通りの方法のうち後者はより一般的な流れの場に適用することが可能である。しかしその中で方程式を閉じるために用いられる仮定や、数係数の中には実験的に検証しにくいものがあったり、その数値が確かでないものもあり、また何元もの偏微分方程式を解かねばならず、現象の的確な理解には向いていないように思われる。よって本研究では前者の立場に立って問題を把握することにした。ここでは図-1の主流 ($0 \leq z \leq H$) と浸透流 ($z \leq 0$) に対してそれぞれの平均流速分布（相似分布）を考え、次にこれを $z=0$ の境界面において接続させることにより、流れの場全体の平均流速分布を求める。さらに得られた流速分布を積分することにより、流れの抵抗係数を求める。以下の展開において順次、浸透層・主流の流速分布、境界面での接続条件等が論じられている。

(2) 浸透層内の流速分布

図-1 に示す浸透層内の流速分布を求めるに際して、浸透層内の流れの力のつり合いを考えてみる。まず流れを駆動する要因としては、圧力勾配（あるいは重力の斜面方向成分）および境界面 ($z=0$) を通して主流から伝わってくるせん断応力（その内訳は粘性によるせん断応力とレイノルズ応力である）であり、この2つの力に対抗して浸透流としての抵抗項がある。ところで浸透流の場合は通常の壁面せん断流れと異なり、圧力勾配に起因する流れは図-1の \bar{U}_1 に示すように断面内で一定値をとる。このとき圧力（動水）勾配を i 、浸透場の代表的空間スケールを B 、浸透流の抵抗係数を f_p とすると、

$$\bar{U}_1 = \sqrt{2gBi/f_p} \dots \dots \dots (3)$$

となり¹²⁾、圧力（動水）勾配に起因する力は f_p を用いて表わされる抵抗とつり合っている。よって残りの力の成分はすべて $z=0$ の境界面でのスリップ速度に起因する乱流クエット流れからのものとなる。以上の考察から圧力勾配を除いた成分に対し、

$$\nu \frac{d^2 U_A(z)}{dz^2} - \frac{d\bar{u}'w'}{dz} - \frac{f}{2B} U_A^2(z) = 0 \dots \dots (4)$$

が成立する。ここに $U_A(z)$ は乱流クエット流れの y 方向平均流速であり、その平均化操作は浸透場の空隙空間だけで行われたいわゆる実質流速である。式(4)左辺第2項の $-\bar{u}'w'$ は空隙空間におけるレイノルズ応力の y 方向平均値である。左辺第3項の f は浸透場の流速が $U_A(z)$ のときの抵抗係数であり、その具体的な表現は後に示される。このように式(4)は浸透流の力のつり合

いから直接的に得られたが、式(4)を数学的に導くには、流れの運動方程式に対して粒子部分では0、空隙空間（流体部分）では1の重みをつけて平均化操作を行えばよい。浸透場の幾何構造が図-1に比べて単純な図-2の場合には比較的容易に式(4)が成立することを著者らはすでに文献13)において示している。式(4)中の $\bar{u}'w'$ は未知量であるが、ここでは通常の乱流理論に従い、混合距離の考え方を導入する。すなわち、

$$-\rho \bar{u}'w' = \rho l^2 \frac{dU_A(z)}{dz} \cdot \left| \frac{dU_A(z)}{dz} \right| \dots \dots \dots (5)$$

ここで式(5)中の混合距離 l に関して、浸透流の現象は浸透場の空隙スケール B によって規定されていると考えられることより、

$$l = KB \dots \dots \dots (6)$$

とし、係数 K は実験的に決定されるべき定数とする。この式(5)、式(6)を式(4)に代入することにより、乱流クエット流れの基本式が得られる。さらにこれを $z=0$ での実質速度 u_0 、空隙スケール B で無次元化すると、

$$\frac{1}{2R_{ep}} \cdot \frac{d^2 u}{d\eta^2} + K^2 \frac{du}{d\eta} \cdot \frac{d^2 u}{d\eta^2} - \frac{f}{4} \cdot u^2 = 0 \dots (7)$$

となる。ここに $u = U_A(z)/u_0$ 、 $\eta = z/B$ 、 $R_{ep} = u_0 B/\nu$ である。式(7)の境界条件としては次のものを用いる。

$$\left. \begin{array}{l} \eta = 0 \quad \text{で} \quad u = 1 \\ \eta = -h/B \quad \text{で} \quad u = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

上記の式(7)、(8)が浸透層内の乱流クエット流れの平均流速分布を決定する基本式と境界条件となる。ここで式(7)の境界条件として以下の2通りの場合を考える。

(a) 浸透層厚 h/B が無限大の場合 ($h/B \rightarrow \infty$) : このとき式(7)、式(8)は非線形常微分2点境界値問題となって、その解析解を得ることは困難である。しかし式(7)左辺第1項の R_{ep} が十分に大きく第1項が無視できる場合には、解は exponential で与えられることがわかり、

$$u(\eta) = \exp(\alpha z) \dots \dots \dots (9)$$

$$\alpha = \frac{1}{B} (f/4K^2)^{1/3} \dots \dots \dots (10)$$

となる。この形の解はかつて井上⁶⁾によって植物群落内の流速分布を示す式として提案され、また実験的にもその妥当性が証明されている⁷⁾。しかしながらいま著者らが念頭においている自然河川の河床のように、浸透層の空隙スケール B が必ずしも十分に大きくない場合には、 R_{ep} のかかった項を無視することはできず、式(7)をそのまま解かねばならないであろう。ここでは非線形方程式の一解法である準線形化の手法²⁰⁾を用いて式(7)の数値計算を実行した。図-3は式(7)中のパラメーター R_{ep} 、 f を適当に変え、流速分布の挙動を調べたものである。なお本計算では係数 K はすべて1としている。図-3では抵抗係数 f として実際に生じ得る程度の0.5, 1.0,

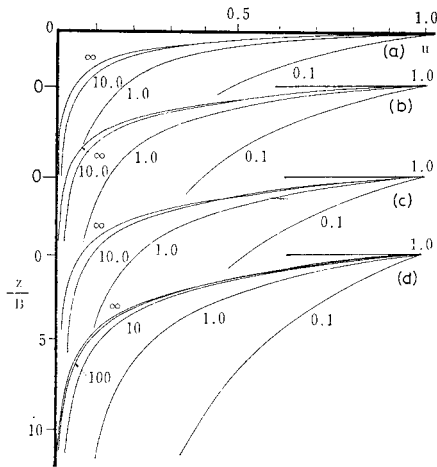


図-3 $h/B \rightarrow \infty$ の場合の浸透層内の流速分布・乱流クエット流れ ((a), (b), (c), (d) の f はそれぞれ 2.0, 1.5, 1.0, 0.5 である。図中の数字は Re_p を示している。)

1.5, 2.0, レイノルズ数 Re_p としては 0.1, 1, 10, 100, ∞ を用い、これらの各組に対して計算は実行された。図より Re_p が 10 以上の場合には流れの大部分において $Re_p \rightarrow \infty$ の場合の解 (exponential, 式 (9)) で近似できることがわかる。

ところで粗い砂や礫などで構成されている実際河川の河床では $u_0 > 1 \text{ cm/s}$, $B > 0.1 \text{ cm}$ が考えられるが、このときには $Re_p = u_0 B / \nu > 10$ となっている。よって上記の計算結果より、浸透層厚が十分に大きい実際河川の場合の平均流速分布は式 (9) で十分に近似し得ることがわかる。

(b) 浸透層厚が有限の場合：式(8)の「 $\eta = -h/B$ で $u=0$ 」の境界条件を用いるときには、 $\eta = -h/B$ の浸透層底面は流速を 0 にする働きのみをしている。一般に固定壁面の存在は乱れの発生原因となるが、上記の条件のもとでは $z=0$ の境界近傍以外には乱れの主要な発生源は存在しないことになり、特に h が小さく、浸透層厚が薄い場合には浸透層の底面も乱れの主要な発生源となることから必ずしも現実の状況を正しく反映しているとはいえない。しかし少なくとも有限の浸透層厚が流速分布に与える影響を論ずることはできる。図-4, 5, 6 は空隙スケール B で無次元化された浸透層厚 h がそれぞれ 10, 3, 1 の場合の、 Re_p , f の適当な組合せにつき計算された流速分布である。 $h/B=10$ および 3 の図-4, 5 よりわかるように、 h が有限の大きさの場合でも流れの大部分 ($z=0$ の主流と浸透流の境界面近傍) において、 Re_p が十分に大きく、 $h/B \rightarrow \infty$ の場合の流速分布式 (9) で十分に近似され得ることがわかる。このことから以下の理論展開においては浸透層内の流速分布として (みかけの

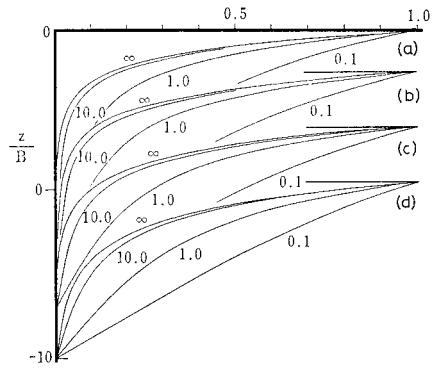


図-4 $h/B=10$ のときの浸透層内の流速分布 ((a), (b), (c), (d) の f は図-3 の場合と同じ)

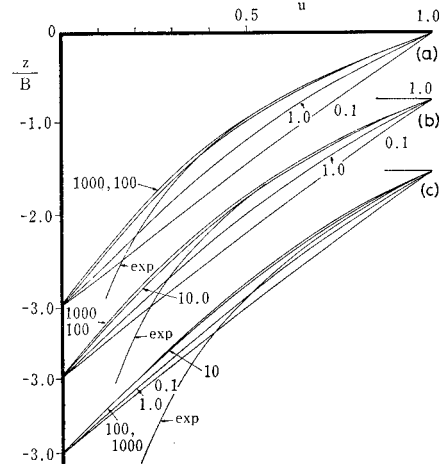


図-5 $h/B=3$ の場合 ((a), (b), (c) の f は図-3, 4 の場合と同じ)

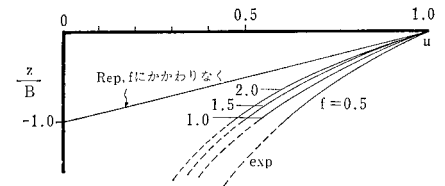


図-6 $h/B=1$ の場合 (結果は Re_p , f にかかわらず直線となった)

流速を用いて)、式(9)の exponential 形に式(3)の圧力勾配による流速を加えた

$$u_A(z) = \lambda \left[\sqrt{2gBi} / f_p + u_0 \exp(\alpha z) \right] \dots (11)$$

を用いる。ここに $u_A(z)$ は浸透層内のみかけの流速に関する速度分布、 λ は浸透層の空隙率を表わす。

(3) 主流の流速分布と混合距離

従来より粗面上の流速分布としては式(12)で表わされる対数式によって表現されてきた。

$$\frac{u_B(z)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{k_s} + A_r \dots (12)$$

係数 A_r は完全粗面の場合 8.5 である。 k_s は Nikuradse の実験では彼の実験に用いた砂の粒径であり、他の場合では $A_r=8.5$ としたときに式(12)が最も実験値に合うように選ばれる等価粗度である。ところで式(12)は以下の3点で問題を残しているといえよう。① z の原点の位置が明確でない、② k_s の値は実験によってのみ与えられる、③ 浸透層上の流れのように一般的な粗度上の流れの場合、 A_r 、 k_s のもつ物理的な意味が不明瞭となる。上記の問題点のうち ① に関しては Nikuradse も彼の実験資料の整理において流速分布が対数則に乗るように原点を調整している¹⁹⁾。いま座標原点を図-1に示すように粗度頂点に固定し、対数式に合わせるための補正量を z_0 とすると、式(12)の z は $z+z_0$ を用いることになる(通常の管路流れでは z_0 は小さいので明記されていない)。Nikuradse タイプの粗面と異なり、本研究で扱っているような浸透層上の流れにおいても z_0 を適当に調整することによって近似的に流速分布を対数式で表現することは可能である²⁷⁾。②、③の問題点はともに混合距離理論や壁法則の結果が数学的な意味において完全な境界値問題としての解になってはいないことによると著者らは考えている(実用の目的は別にして最後まで演繹的な理論展開の後に得られた結果とはいえない)。このような観点に立ち、本研究では式(13)で表わされる対数式を用いる。

$$\frac{u_B(z)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z+z_0}{z_0} + \frac{u_p}{u_*} \dots \dots \dots (13)$$

ここに $u_B(z)$ は主流の流速分布を意味する。また u_p/u_* は $z=0$ の境界面での流速(スリップ速度)を意味する。流速分布として式(13)を用いる利点は、① z_0 、 u_p とともに物理的意味の明確な流れの特性量である、② z_0 、 u_p とともに実験においては独立に算定される量である、の2点である。なお κ も浸透場の特性によっては変化することがあるが⁹⁾、¹¹⁾、²⁷⁾、ここでは 0.4 の一定値を用いる。

ところで 3. の乱れエネルギー収支のところを考察したように、主流の抵抗を決定しているものはスリップ速度 u_p と境界面における乱れの存在であったが、式(13)の z_0 はそのうち境界面近傍における乱れの代表スケール(あるいは渦スケール)を表わしていると考えられる。この z_0 の決定に関して、本論文では既述のように乱れを完結問題として把えるのではなく、以下に述べるように浸透流としての流れの特性に照らして導いている。

一般に平板上(滑面上)の乱れは極限として $z=0$ の平板上から発生したものとみなすことができよう。なぜならば乱れエネルギーの発生項 $-\overline{u'w'}dU/dx$ は粘性底層の外縁 $z=\delta(u_*\delta/\nu \approx 10)$ 付近で最大値を示すが、通

常の条件では(たとえば $i=1/200$ 、 $H=50$ cm のときは $\delta \approx 6 \times 10^{-3}$ cm となり) δ は非常に小さい値をとるからである。一方浸透層を有する流れでは乱れの発生源は各粗度要素近傍に層をなしていると考えられる。すなわち $z=0$ の粗度要素頂点からのみ乱れは発生しているのではなく、 $z < 0$ の浸透層内からも主流の乱れ—レイノルズ応力に寄与している(運動量の交換をしている)と考えられる。ただし z が小さく、浸透層のより深い場所ほど主流の乱れとの運動量交換は不活発になってこよう。以上のことを主流の混合距離についてあてはめると、その最も簡単な関係式として次式が考えられる。

$$l(z) = \int_0^h \kappa(z+p) \beta_0 e^{-\beta_1 p} dp \dots \dots \dots (14)$$

$$\beta_0 \int_0^h e^{-\beta_1 p} dp = 1 \text{ すなわち } \beta_0 = \beta_1 / (1 - e^{-\beta_1 h})$$

$$\dots \dots \dots (15)$$

ここに p は $z=0$ の境界面から浸透層方向にとったダミーの座標であり、 $\beta_0 e^{-\beta_1 p}$ は主流の z 点における、浸透層内の P 点からの運動量交換に対する寄与を意味している。式(14)で与えられる $l(z)$ は積分形をしていることより、寄与率の関数形(ここでは exponential)そのものより、用いた係数 β_1 の決定が非常に重要な要素となる。ところで浸透層内の流速分布を示す式(9)中の係数 α は境界面でのせん断応力(主にレイノルズ応力—乱れ)の減衰定数とみなすことができ、本節式(14)中の係数 β_1 と同様の性質をもった特性量と考えられる。よってここでは β_1 と α の関係としては最も簡単な $\beta_1 = a\alpha$ を仮定する(a は 1 程度の定数)^{注1)}。このことを模式的に示すと図-7となる。このとき式(15)を考慮しつつ式(14)を展開すると($a=1$ として以後の理論展開および計算は実行されている)。

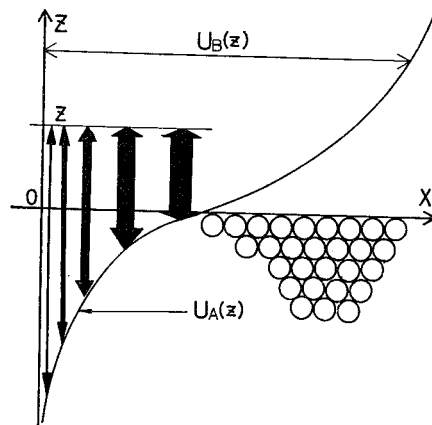


図-7 浸透層内の流れと主流との運動量交換を示す模式図(図中の矢印の太さが運動量交換の程度を示している)

注 1) このような仮定の妥当性は f' や u_p 、 z_0 の計算結果を通してのみ間接的に証明される。

$$l(z) = \kappa \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{\alpha h e^{-\alpha h}}{1 - e^{-\alpha h}} \right) \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ここで式(16)中の $\frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{\alpha h e^{-\alpha h}}{1 - e^{-\alpha h}} \right)$ の項が式(13)の主流の流速分布式中の z_0 になっている。すなわち、

$$z_0 = \frac{1}{\alpha} \left[1 - \frac{\alpha h e^{-\alpha h}}{1 - e^{-\alpha h}} \right] \dots\dots\dots (17)$$

である。

(4) 境界面での流速分布の接続——スリップ速度について

本節においては式(13)の残された未知量であるスリップ速度 u_p が求められる。一般に、 $z=0$ の境界面における主流および浸透流のせん断応力を $\tau_B(0), \tau_A(0)$ とするとその連続性から $\tau_A(0) = \tau_B(0)$ となる。一方せん断応力の表示に渦動粘性係数を用いると、 $\tau_A(z) = \rho(\epsilon_A + \nu) du_A/dz$, $\tau_B(z) = \rho(\epsilon_B + \nu) du_B/dz$ となる。ここに ϵ_A, ϵ_B は両層の渦動粘性係数である。また粗面および浸透層内の流れではせん断応力 τ はすべて乱流成分すなわちレイノルズ応力により構成されていると考えられる。よって $\tau_A(0) = \tau_B(0)$ を主張することは乱流特性量の連続性^{注2)}を主張することと同じであり、 $\epsilon_A(0) = \epsilon_B(0)$ の成立が考えられる。これらのことを考慮すると次式が成立する。

$$z=0 \text{ において } \frac{du_A}{dz} = \frac{du_B}{dz} \dots\dots\dots (18)$$

式(18)が近似的に成立することは文献 7), 9), 24), 27) において実験的に確かめられている。この式(18)の関係式に式(11), (13)を代入することにより、スリップ速度として

$$\frac{u_p}{u_*} = \frac{1}{\kappa z_0 \alpha} \dots\dots\dots (19)$$

を得る。ここに $u_p = \lambda u_0$ としている(厳密には $u_p = \lambda [\sqrt{2gBi/f_p} + u_0]$ であるが、自然河川の河床では、たとえば $B \leq 1 \text{ cm}$, $i \approx 1/200$, $f_p \approx 1$ では $\sqrt{2gBi/f_p} \leq 3 \text{ cm/s}$ より圧力勾配(河床勾配)からの寄与は無視される)。

(5) u_p, z_0 と αh の関係—— u_p, z_0 の挙動の概観

主流の抵抗特性を具体的に知る前に、本節では z_0, u_p と $\alpha, \alpha h$ との関係調べてみた。図-8 は原点補正量 z_0/h と αh の、図-9 はスリップ速度 u_p/u_* と αh の関係をそれぞれ式(17)と式(19)に基づいて計算したものの

注 2) 本研究では浸透流の混合距離として $l=KB$ 、主流の混合距離として本文式(16)を用いており、両者は必ずしも $z=0$ で連続していない。連続させる目的ならば $\kappa z_0 = KB$ となり、 $K = \kappa z_0/B$ を用いればよい。しかし $l=KB$ 自体が浸透流の混合距離の平均値的なものとして扱われているので両者の連続性は必ずしも必要ではない。

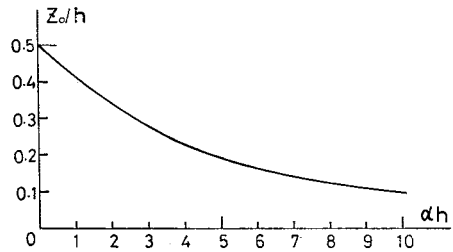


図-8 $z_0/h-\alpha h$ の関係

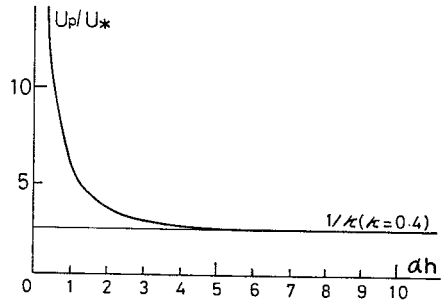


図-9 $u_p/u_*-\alpha h$ の関係

である。図-8 より αh の小さい極限では(浸透層厚が十分に薄い通常の Nikuradse 流の粗面の場合や、 h が大きくとも植物群落のように空隙スケールが非常に大きく、浸透流の抵抗係数 f が十分に小さい場合に相当)、 z_0/h は 0.5 になる。すなわち原点の補正量は浸透層厚の半分に近づく。次に図-9 より αh が十分に大きいと(浸透層が十分に厚い通常の河床や、 h は小さいが非常に密に詰まった、空隙スケールが小さい浸透層に相当)、スリップ速度 u_p/u_* は $1/\kappa$ (κ :カルマン定数)に漸近する。一方 αh が小さくなると u_p/u_* は隙限なく大きくなるが、一般には h が小さいと浸透流の抵抗係数 f は大きく、式(10)より α も大きくなる。よって現実には αh が極端に小さな値をとることはなく、 u_p/u_* も極端に大きな値をとることはない。

(6) 主流の抵抗係数の算出

前節までの展開により、式(13)中未知量はすべて他の水理量との間に関係づけられた。しかし式(10)の α を決定するためには浸透流の抵抗係数 f が陽な形で知られていなければならない。従来より浸透流の抵抗係数の算定式としては Ward²⁶⁾ のものが比較的精度が高く、かつ各種の浸透場に対して適用可能であるといわれている。これに対して著者らはかつて下記の式(20)から(22)の半理論式を提案¹²⁾している。式(20)の C_1, C_2 等の数係数は $f-R_{e*}$ の関係が上記の Ward の算定式と等しくなるように選ばれている。

$$f = C_1/R_{e*} + C_2 \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned}
 R_{e*} &= u_p B / \nu, \quad (\text{本研究では } R_{e*} = u_p B / \nu \\
 &= (\bar{U}_B H / \nu) \cdot (u_* / \bar{U}_B) \cdot (u_p / u_* \cdot (B/H) \\
 &= R_e \sqrt{f'} / 2 \cdot (u_p / u_* \cdot (B/H) \text{ としている}) \\
 &\dots\dots\dots (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 80.0, \quad C_2 = 2\lambda(1/S-1)^2/3(1-\lambda) \\
 S &= 1/(1+3.22(1-\lambda) \cdot \lambda^{1/2}), \quad B = 2\lambda^2 d/3(1-\lambda) \\
 &\dots\dots\dots (22)
 \end{aligned}$$

ここに d, λ はそれぞれ浸透層を構成する粒子の粒径および空隙率である (式(20)~(22)の $f-R_{e*}, C_2-\lambda, B/d-\lambda$ の関係は付録に示されている). 次に式(21)中の f' は, 主流の抵抗係数であり, 式(23)で定義されるものである.

$$f' = 2 \left(\frac{u_*}{\bar{U}_B} \right)^2 \dots\dots\dots (23)$$

ここに u_* は $z=0$ の境界面で定義される摩擦速度であり, \bar{U}_B は主流の平均速度である. このとき式(13)を $z=0 \sim H$ で積分して,

$$\sqrt{2} f' = \frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{z_0}{H} \right) \ln \left(\frac{H}{z_0} + 1 \right) - \frac{1}{\kappa} + \frac{u_p}{u_*} \dots\dots\dots (24)$$

の関係式を得る. 以上の結果より浸透層上の流れの抵抗係数 f' と他の水理量との間の関係がすべて求められたことになる. ここで式(23)の f' に関係する水理量としては水深 H , 浸透層厚 h , 粒径 d , 空隙率 λ の4つであり, 関係式としては式(17), (19), (20), (21), (22), (24)である. f' の算定には上記の4つのインプットデータに対して z_0, u_p, f' にそれぞれの初期値を設定し, ある数値の主流のレイノルズ数のもとで z_0, u_p, f' が許容し得る範囲内に収束するまで逐次繰り返し計算を行った. この計算方法からもわかるように浸透層上の流れの抵抗則は, 主流の特性量が決まって浸透流が決まり, 浸透流が決まって主流が決まるという形の, 主流と浸透流の間の相互作用の結果として最終的に得られるものであり, 通常の粗面上の流れの抵抗則のように外部パラメーターが与えられると一意的に決定されるというものではないことがわかる. すなわち主流と浸透流の間で抵抗分担の自己調整をしているといえよう.

次に, 本研究で得られた主流の抵抗係数が, 与えられた水理条件とともに具体的にどのような挙動をするのかをみるために, 表-2に示す各種のケースにつき計算を実行した. 各ケースの計算目的は表-2に示されている. なお用いた数値の中には (たとえば $\lambda=0.1$ や 0.9 等の) 現実にはとり得ないものも含まれているが, 理論と現象の全体像を把握するためにあえて使用している. 以下に各ケ

ースごとの計算結果とその考察を述べる.

[ケースA] このケースは Schlichting¹⁰⁾ が実験した densest 球配列の粗面に近い例として選ばれた計算例であるが, 図-11より水深 H が大きいほど f' の値は小さくなり, R_e の増大に伴う f' の増大一頭打ち傾向がみられ, 従来の実験傾向と定性的に一致するのみならず, 得られた f' の数値そのものも式(12)で k_s を d に置き換えて計算した値とほぼ一致している (たとえば $H=100$ cm のとき $f' \approx 0.005$ であるが, $k_s=0.24$ cm として式(12)により計算した f' も 0.005 になっている).

なお H が小さいときは薄層流の実験結果²⁴⁾と同様に f' は右下がりの傾向をもっている.

[ケースB] 浸透層厚 h を一定にしたまま粒径を変

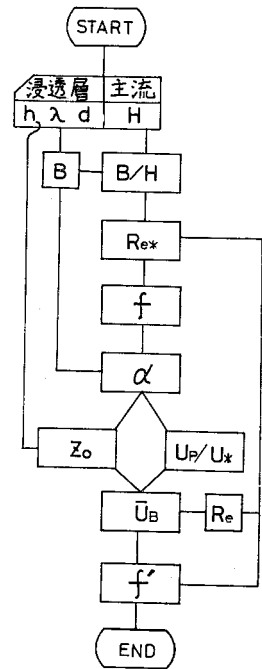


図-10 各諸量の関係および f' を求めるための流れ図

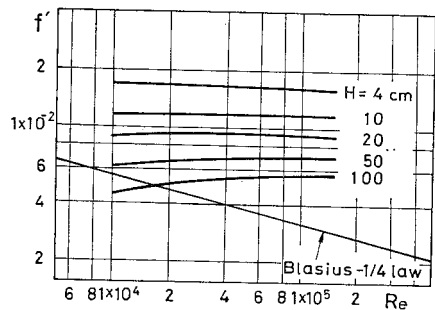


図-11 ケースAの $f'-R_e$ 関係 (R_e の 1.0×10^4 から 1.5×10^5 まで計算)

表-2 計算に用いた水理条件 (単位: cm)

ケース	H	h	d	λ	κ	K	備考 (計算目的)
A	4, 10, 20, 50, 100	0.24	0.24	0.5	0.4	1	水深 H の効果をみる
B	50	20	0.24, 1, 2, 3, 5	0.5	0.4	1	粒径 d の効果をみる
C	50	0.24	0.24	0.1 から 0.9 まで 0.1 ずつ	0.4	1	空隙率 λ の効果をみる
D	50	0.5, 1, 2, 3, 6, 10	1	0.5	0.4	4	浸透層厚 h の効果をみる (H が大きいとき)
E	4	0.12, 0.24, 0.48, 0.72, 20	0.24	0.5	0.4	4	浸透層厚 h の効果をみる (H が小さいとき)

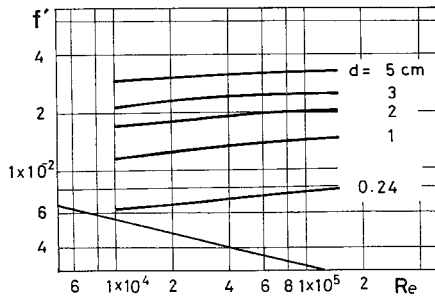


図-12 ケースBの $f'-Re$ 関係

えた計算例である (図-12)。この図より同一の浸透層厚に対しては粒径が大きい方が抵抗係数は大きく、通常の粗面上の流れの場合と同様の結論となっている。また f' の Re に対する右上がりの傾向は Kennedy ら⁸⁾、Gelhar ら⁹⁾ の実験において見出されているが、これは後出の 図-17 から 図-24 よりわかるように u_p/u_* の増加に伴う f' の減少効果より z_0/d の増大に伴う f' の増大効果がまさった結果であるといえよう。

[ケースC] 空隙率を変えたときの f' の挙動を調べたものである (図-13)。この場合に特徴的なことは f' が空隙率 λ のある値のところでは最大値をもっている点である。図-14 は $Re=1.5 \times 10^5$ における f' の λ による変化を示したものであり、 $\lambda \approx 0.5$ で f' は最大値をとっている。この原因としては、 λ が小さい、すなわち非常に密に詰まった浸透層をもつ流れでは主流と浸透流との相互作用が抑えられ、一方 λ が非常に大きくなる

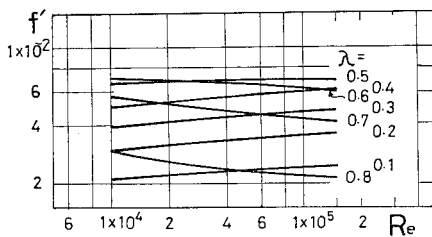


図-13 ケースCの $f'-Re$ 関係

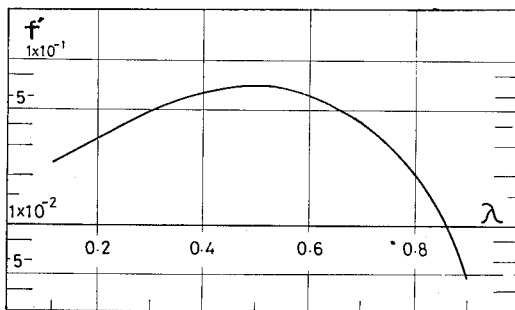


図-14 ケースC : $Re=1.5 \times 10^5$ における f' の λ の違いによる変化

とスリップ速度が大きくなり、ともに主流の抵抗の減少効果を生じる。しかし λ が中程度の値のときには個々の粒子そのものではなく、浸透層全体が粗度要素として効き、その結果として f' が最大値をとるのであろう。なおこれと同様の結果は Schlichting による平板にさまざまな間隔で粗度を配列した実験¹⁰⁾や足立の実験²³⁾においても見出されている。本研究の目的は浸透層上の流れの抵抗則を理論的に明らかにすることのみならず、従来、多くの研究者によっておもに実験的に検討されてきた棧型粗度や球、半球等を平板にはりつけたタイプの粗面上の流れも、浸透層上の流れの極限 (浸透層厚が極端に薄い) としてとらえ得るとの観点に立脚し、一般的な粗面上の流れの抵抗則を明らかにすることにあるが、ケースCの結果は上記の考え方の妥当性を示すものといえよう。

[ケースD, E] 浸透層厚 h の f' に与える効果を示すが、図-15, 16 である。図-15 では同一の水理条件に対しては浸透層が厚い方が f' は大きくなっている。これに対し著者らは浸透層を変えた実験を行っており^{14), 15), 27)}、上記の結論を確認している。ただしこの効果も水深に対し粒径が十分に小さいときには顕著ではなく、ケースDの $d=1.0$ cm に対して $d=0.24$ cm として計算した場合には h の効果はまったく現われなかった。なお図-15, 16 の $h=0.5$ や 0.12 cm の場合の f' は滑面の場合よりも小さな値をとっているが、これは本理論で用いたパラメーター (たとえば K) の数値によって解消される性質のものである。

以上の各ケースの計算結果からもわかるように、浸透

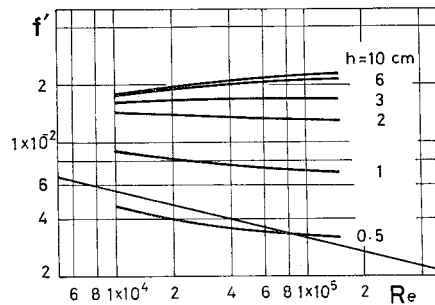


図-15 ケースDの $f'-Re$ 関係

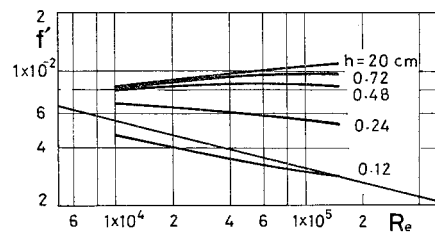


図-16 ケースEの $f'-Re$ 関係

層上の流れの抵抗則は与えた水理条件によって複雑に変化する。また既述のように浸透層をもつ流れでは式(12)の k_s/H のような外部パラメーターのみによりその抵抗が決まるのではなく、主流と浸透流の間で抵抗分担の自己調整を行っている。よってこのような流れの抵抗係数は k_s/H のような無次元外部パラメーターによっては一意的に決定されず、ケースAからEの計算で示したように外部パラメーター H, h, d, λ の値そのものを用いて算出せざるを得ない。また上に示した図の中には R_e の増加につれて f' の減少するものも増大するものもあるが、この原因はそのとき与えられている外部パラメーターに対して、 z_0 と u_p の f' に与える影響の大小に起因している。よって以下に z_0 と u_p の挙動を検討してみた。

(7) u_p, z_0 と他のパラメーター間の関係

a) $u_p/u_* - u_* z_0/\nu$ の関係

[ケースA] 以後 $u_* z_0/\nu = R_{e0}$ と記す。この場合は R_{e0} の増大につれてスリップ速度 u_p/u_* は増大し、ある一定値に漸近している(図-17)。この u_p/u_* の挙動は式(12)の A_r の $u_* d/\nu$ に対する挙動と同様のものになっており、また得られた u_p/u_* の値は著者らの行った実験²⁷⁾(粗面で約 8.0, 浸透層上の流れで 6.0)の値と同オーダーになっている。

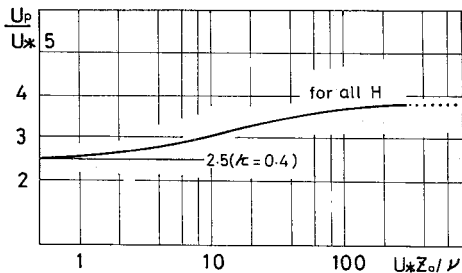


図-17 ケースAの $u_p/u_* - u_* z_0/\nu$ 関係

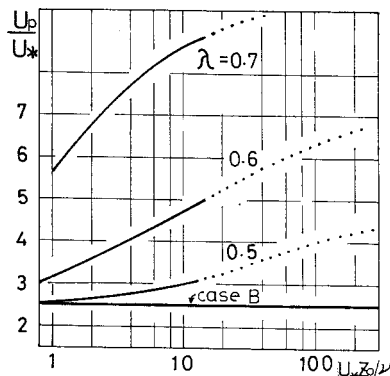


図-18 ケース B, C の $u_p/u_* - u_* z_0/\nu$ の関係(ケースBはすべて $u_p/u_* = 2.5$ になっている)

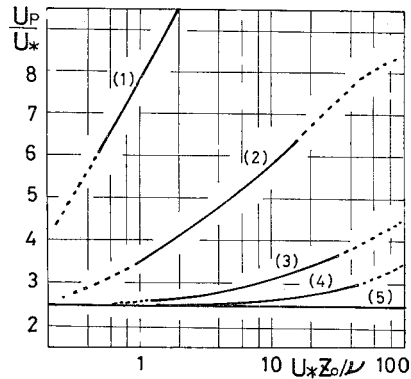


図-19 ケースDの $u_p/u_* - u_* z_0/\nu$ の関係 ((1): $h = 0.5$ cm, (2): 1.0, (3): 2.0, (4): 3.0, (5): 6.0)

[ケース B, C] ケースBの u_p/u_* は計算に用いた主流のレイノルズ数の範囲では $1/\kappa$ の一定値を保ったままである。一方ケースCでは空隙率の増大とともにスリップ速度も増大している(図-18)。

[ケース D, E] この場合には、浸透層の薄い方がスリップ速度は大きくなっている(図-19, 20)。これは浸透層が厚い場合に比較して薄い方が浸透流との運動量交換が抑えられるからであろう。

b) $z_0/d - R_e$ (主流のレイノルズ数) の関係

[ケースA] 図-21より水深が小さいほど z_0/d は大きい。一方水深が大きいと z_0/d は R_e の増大につれ

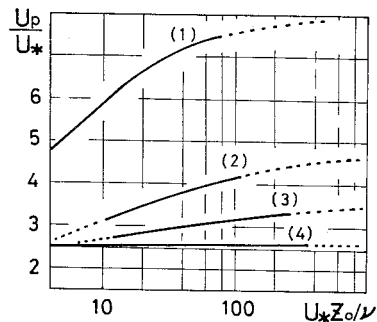


図-20 ケースEの $u_p/u_* - u_* z_0/\nu$ の関係 ((1): $h = 0.12$ cm, (2): 0.24, (3): 0.48, (4): 0.72)

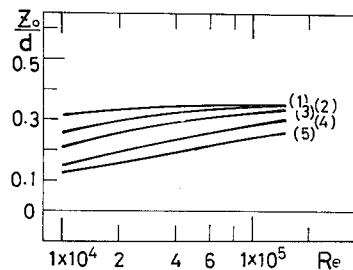


図-21 ケースAの $z_0/d - R_e$ の関係 ((1): $H = 4.0$ cm, (2): 10.0, (3): 20.0, (5): 100.0)

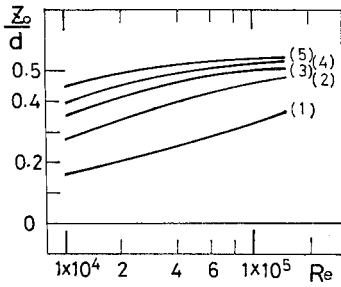


図-22 ケースBの $z_0/d-R_e$ の関係 ((1) : $d=0.24$ cm, (2) : 1.0, (3) : 2.0, (4) : 3.0, (5) : 5.0)

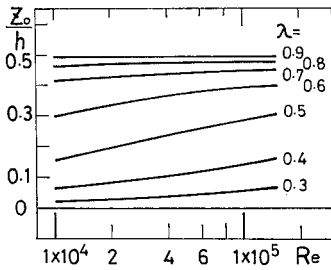


図-23 ケースCの $z_0/h-R_e$ の関係

てより急速に大きくなっている。これは図-11の f' の挙動に対応している。

[ケースB] 粒径 d が大きい方が z_0/d も大きくなっている(図-22)。また粒径が大きいときには z_0/d の値は0.5に漸近している。

[ケースC] このケースでは個々の粒子の径よりも浸透層厚 h の効果がより本質的と思われるので 図-23 では $z_0/h-R_e$ の関係を示している。図より空隙率が大きい場合ほど z_0/h も大きく、また既述のように λ が大きい極限では、 z_0/h は0.5に漸近している。

[ケースD] 浸透層厚 h が大きいほど z_0/d も大きくなるが、 h が十分に大きいとある一定の $z_0/d-R_e$ 曲線に収束している(図-24)。

以上が計算結果とその考察である。

5. 結 論

本論文では浸透層上の流れの抵抗則に関して、計算に

よって得られた数値そのものより、各水理量間の関係を明らかにし、各諸量が流れの条件とともにどのように変動するののかという問題に力点を置いている。よって得られた結果と実験との定量的な比較検討は別の機会²⁷⁾に行う予定である。

以下に本研究で得られた結論を列挙すると、

(1) 主流の抵抗を支配する水理量としては水深、浸透層厚、浸透層の空隙スケール(粒径と空隙率の関数)であり、これらの諸量の組合せによってその抵抗特性は複雑に変化する。

(2) 主流の抵抗係数 f' は主流のレイノルズ数に対して原点補正量 z_0 とスリップ速度 u_p の互いに相反する作用のもとに決定される。すなわち主流のレイノルズ数が大きくなると、 z_0/d も u_p/u_* もともに増大するが、 z_0/d の増大は f' の増大を、 u_p/u_* の増大は f' の減少に導く。このように z_0 と u_p は主流の抵抗係数に対して拮抗した作用を有している。

(3) 浸透層厚 h が十分に厚いと z_0 は R_e とともに増大する。このとき(一般には) f' は R_e とともに増大する。これが浸透層上の流れの抵抗特性の特徴の一つである。また h が大きいほど f' も大きい。よって通常の粗面の場合の抵抗則(k_s を用いた対数則)をそのまま浸透層上の流れに適用することはできない。

(4) 浸透層厚が薄い場合には原点の補正量 z_0 は R_e の増大に伴い浸透層厚の半分の値まで増大し、その後一定値をとる。この場合が通常の(Nikuradse流の)粗面であり、抵抗係数 f' は R_e の増大とともに大きくなり(条件によっては小さくなり)、最終的には一定値をとる。また本研究で得られた主流の抵抗係数の値そのものも従来の実験で用いられた水理量(水深、粒径等)に対する f' の測定値とほぼ同程度の値を示している。

(5) 空隙率 λ を変化させたときには(他の水理量は固定したままで)主流の抵抗係数 f' は λ のある値で極大値をもつ。 λ の値が非常に小さいときや大きいときには抵抗は小さいが λ が中程度の値のときには個々の粒子そのものではなく浸透層全体が粗度要素として働くからである。

(6) 水深と粒径の効果は通常の粗面の場合と同様である。しかしそれらと主流の抵抗係数との関係を個々に論じることは困難であり、他の水理量(空隙率、浸透層厚)との関連あるいは相対的な関係が意味をもっている。

(7) スリップ速度 u_p (あるいは u_p/u_*) は主流のレイノルズ数の増大とともに増大し、やがて一定値に漸近する。また粒径に比べて浸透層厚が十分に大きい場合や、空隙率が小さいときには u_p/u_* は $1/\kappa$ の一定値を保っている。さらに u_p/u_* は浸透層厚が薄い方が厚い

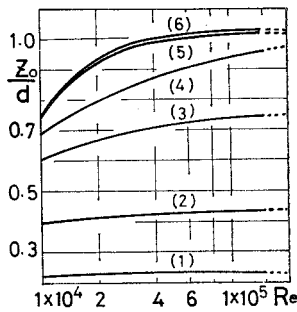


図-24 ケースDの $z_0/d-R_e$ の関係 ((1) : $h=0.5$ cm, (2) : 1.0, (3) : 2.0, (4) : 3.0, (5) : 6.0, (6) : 10.0)

場合に比べて大きい。

(8) 原点の補正量 z_0 (あるいは z_0/d) は水深が小さいほど大きくなる。一方水深が大きいと z_0/d は R_e の増大につれて急速に大きくなるが、このとき f' も増大する。 z_0/d は d が大きいほど大きな値をとり、極限として 0.5 になる。従来の実験において粗面上の流速分布を対数分布に合わせるに際して、粒径の半分程度の原点の補正を施すことが行われてきたが、上記の結果はそれに対する理論的な裏付けになっている。

(9) z_0/h は空隙率の増大とともに大きくなり、0.5 に漸近する。これは空隙率が大きいときには浸透層(厚)そのものが1個の粗度要素となり、上記(8)の結論と同様になるからである。

(10) 浸透層厚 h が大きいほど z_0/d も大きくなる。このときには抵抗係数 f' も増大する。

以上が本研究で得られた結論である。

6. おわりに

本研究は開水路流れの抵抗則のうち、浸透層の存在に起因する特性を明らかにすることを目的としている。よって実河川にみられる移動床としての抵抗特性、河床形態に起因する特性等は一切考慮されていない。今後は浸透層上の流れとしての移動床開水路流れの抵抗則について研究を進めたいと考えている。

末尾ながら、本研究は著者が東京工業大学土木工学科に在勤中および在学中に行われたものであり、著者らは、日野幹雄教授(東工大)、吉川秀夫教授(早稲田大学)より幾多の貴重な助言をいただいている。ここに紙面を借りて両教授に感謝の意を表わします。

付 録

本文中の式(20)、(21)、(22)に示されている浸透流の抵抗係数 f と他の諸量との関係は、主流の抵抗特性を

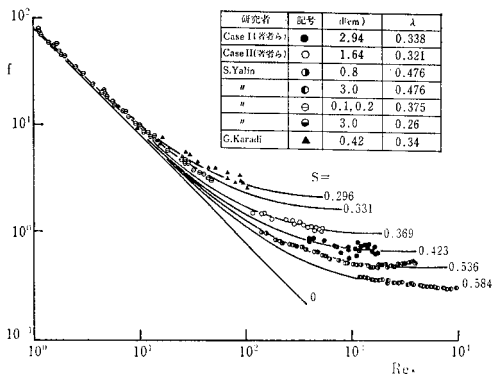


図-25 浸透流の抵抗係数

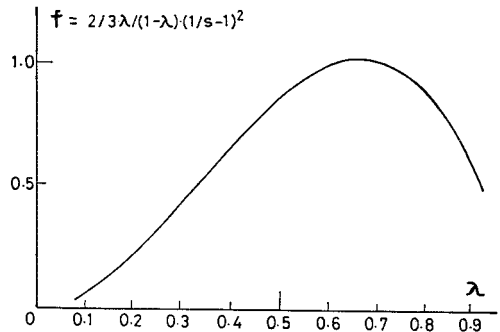


図-26 空隙率と浸透流の抵抗係数

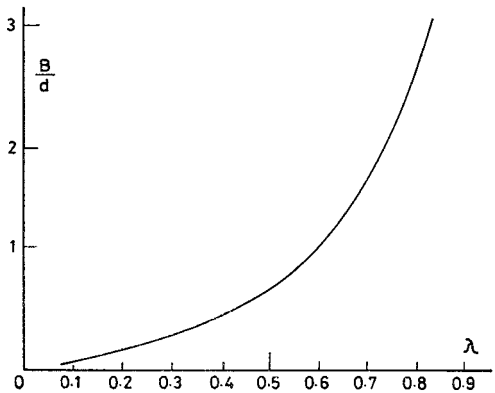


図-27 空隙率と空隙スケールの関係

決めるうえで重要なものである。ここで式(20)、(21)、(22)の関係を図示しておく(上記の式は一様粒径、一様配列の理想化された浸透層に関するものであり、浸透層の構造が違えばその細部は変更を要する)。図-25は $f-R_{e*}$ の関係を、図-26は R_{e*} が大きいときの抵抗係数 $f \approx C_2$ と空隙率の関係、図-27は空隙率 λ に対する空隙スケール B と粒径 d の比をそれぞれ示している。図-26より $f \approx C_2$ はある空隙率のところで最大値を示しているのがわかるが、本文 図-14の結果はこのことに起因していると考えられる。

参考文献

- 1) Kirkby, M.J. (ed.): Hillslope Hydrology, John Wiley & Sons, 1979.
- 2) 岡 小天: レオロジー——生物レオロジー——, 裳華房, 1976.
- 3) Beavers, G.S. and D. Joseph: Boundary condition at a naturally permeable wall, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 30, Part 1, 1967.
- 4) Taylor, G.I.: A model for the boundary condition of a porous material. Part 1., Journal of Fluid Mechanics, Vol. 49, Part 2, 1971.
この論文の直後に理論解析として、S. RichardsonのPart 2.がある。
- 5) 藤本武助: 改著流体力学, 養賢堂.
- 6) Inoue, E.: On the turbulent structure of air flow within crop canopies, Journal of Meteorological Society Japan, Vol. 41, No. 6, 1963.

- 7) Monteith, J.L.(ed.) : Vegetation and the Atmosphere, Vol. 1, 2, Academic Press, 1976.
- 8) Lovera, F. and J.F. Kennedy : Friction factors for flat bed flows in sand channels, Proc. ASCE, J. Hyd. Div., Vol. 95, No. HY-4, July, 1969.
- 9) Chu, Y. and L.W. Gelhar : Turbulent pipe flow with granular permeable boundaries, Ralph M Parsons Labo. Report, No. 148, MIT, 1972.
- 10) Schlichting, H : Boundary Layer Theory, seventh edition, McGraw-Hill.
- 11) 中川博次・祢津家久：透水性開水路乱流場における主流と浸透流との相互作用，土木学会論文報告集，第244号，1975.
- 12) 吉川秀夫・山田 正・中沢 均：浸透流に関する水理学的研究 I, II, III, IV, 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 25, 1979.
- 13) 吉川秀夫・山田 正・川端規之：浸透性壁面を有する流れの研究，第23回水理講演会論文集，1979.
- 14) 日野幹雄・山田 正・川端規之・太田 明：粗面およびporous boundary 上の流れの抵抗と乱れの構造に関する実験的研究，第12回乱流シンポジウム論文集，1980.
- 15) 日野幹雄・山田 正・川端規之・太田 明：滑面，粗面および浸透層上の流れの抵抗則と乱れの構造，第24回水理講演会論文集，1980.
- 16) 吉川秀夫・山田 正・中沢 均：浸透性水路床を有する開水路流れの研究，第5回土木学会関東支部年次学術研究会講演集，1978.
- 17) 日野幹雄・山田 正・川端規之：粗面せん断乱流における burst 発生周期に関する実験的研究：第35回土木学会年次学術講演会講演概要集，第2部門，1980.
- 18) Rotta, J.C. (大路通雄訳)：乱流，岩波書店.
- 19) Hama, F.R. : Boundary-layer characteristics for smooth and rough surfaces, Trans. Soc. Naval Arch. Marine Engrs., 62, 1954.
- 20) Bellman, R.E. and R.E. Kalaba : Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems, American Elsevier Publishing Company, Inc., 1965.
- 21) Monin, A.S. and A.M. Yaglom : Statistical Fluid Mechanics : Mechanics of Turbulence, Vol. 1, The MIT Press, 1973.
- 22) Longwell, P.A. (大谷寛治訳)：化学技術者のための流れ学，共立出版.
- 23) 足立昭平：人工粗度の実験的研究，土木学会論文集，第104号，1964.
- 24) 神田 徹・喜久里政宏・佐伯武俊：透水性床面下の流れに関する実験的研究，第33回土木学会年次学術講演会講演集，第2部門，1978.
- 25) Bradshaw, P.(ed.) : Turbulence. Topics in Applied Physics, Vol. 12, Springer-Verlag, 1976.
- 26) Ward, J.C. : Turbulent flow in Porous media, Proc. ASCE, J. Hyd. Div., Vol. 90, No. HY-5, September, 1964.
- 27) 山田 正・川端規之：浸透層上の流れの抵抗則に関する実験的研究，土木学会論文報告集，第325号，1982.

(1981.9.25・受付)