

すべりを考慮した支持杭の鉛直振動に関する一近似解法

AN APPROXIMATE SOLUTION OF VERTICAL VIBRATION OF
END-BEARING PILES WITH FRICTIONAL INTERFACE

秋 吉 卓*・湊 田 邦 彦**

By Takashi AKIYOSHI and Kunihiko FUCHIDA

1. 序 論

杭はその頭部に鉛直荷重を受けるとき、杭先端および側方の土によって支持されるが、特に後者の場合については杭周辺の土が杭の挙動に大きな影響を与えることから、土と杭の相互作用に注目した研究もかなり行われてきた^{1),2)}。しかしながら鉛直振動時には杭と土の付着が切れやすいことが考えられるにもかかわらず、従来の杭と土の境界面での取扱いでは、すべりを許すが相互作用を無視するか、あるいは相互作用を考慮するために完全密着を仮定することが多かった。すなわち、両者は杭の動的挙動に重要な影響をもつ現象であるにもかかわらず、これまで両者を共存させた解析はほとんど行われなかった。

そこで本研究では、杭と土の間のすべり現象を等価線形化手法により線形振動に直し、杭と土とが不完全な密着をしているときの、すなわち広い意味での相互作用についての解析的表現を誘導するとともに、主としてすべりが杭の応答に与える影響について解明しようとするものである。したがって、すべりは上下方向に対称に生ずるものとし、あくまでも等価な線形振動としているので、永久変形などは解析の対象外である。杭の形式としては支持杭を対象とし、土は剛な基盤に支えられた弾性層地盤とした。解析手法は、杭頭部に鉛直方向の定常単弦調和荷重を加えたときの杭と土の運動を解析的に表現するため、表層地盤の基本モードを利用したモード分解によったが、等価な係数を求める際にモードの連成を無視する近似的手法がとられた。最初に単杭について解析解を導き、後に群杭への応用も示した。本研究で設定した仮定は次のようなものである。

(1) 杭と土は線形弾性体であり、すべりは境界面の

応力が限界値に達したときに生ずるものとし、運動は定常な単弦調和振動とする。

- (2) 土は等方均質な線形半無限地盤であり、振動数に無関係な減衰をもつ。
- (3) 水平変位はすべて考慮しない。

2. 地盤とすべりの定常振動解

粘弾性体としての地盤の鉛直振動 $w(r, z, t)$ は次式で書き表わされる (図-1 参照)。

$$[(\lambda+2\mu)+i(\lambda'+2\mu')] \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (\mu+i\mu') \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \dots\dots\dots (1)$$

ここで定常振動 $w(r, z, t) = w(r, z) \exp(i\omega t)$ を考えると、式(1)の解は次式で与えられる¹⁾。

$$w(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_0(q_n r) \sin(h_n z) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $\lambda, \mu = \text{Lamé}$ の定数、 $\lambda', \mu' = \lambda, \mu$ に対応する粘性係数、 $\rho = \text{土の密度}$ 、 $\omega = \text{円振動数}$ 、 $i = \sqrt{-1}$ 、 $A_n = \text{Fourier 係数}$ 、 $K_0(q_n r) = \text{第2種0次の変形ベッセル関}$

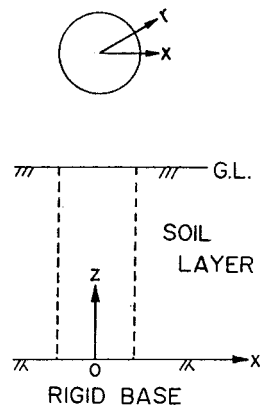


図-1 地盤モデル

* 正会員 工博 熊本大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 八代工業高等専門学校助手

数, $q_n = [\{\eta^2 + i[D_v(\eta^2 - 2) + 2D_s]\}h_n^2 - (\omega/v_s)^2]^{1/2} / (1 + iD_s)^{1/2}$, $h_n = \pi(2n-1)/2H$, ($n=1, 2, 3, \dots$), $\eta = v_l/v_s$, $v_s = \sqrt{[(\lambda+2\mu)/\mu]}$, v_l, v_s = 土の縦・横波の伝播速度, $D_v = \lambda'/\lambda$, $D_s = \mu'/\mu$. ところで式(2)の表現において, D_v, D_s は一般には小さい値であるから, ほぼ $\omega \ll \eta h_n v_s = \pi(2n-1)v_l/2H = \omega_n$ (表層地盤の n 次固有円振動数) に従って, q_n はそれぞれ実数から虚数に変わる. すなわち, $\omega < \omega_n$ では表層地盤は位相差のない振動であるが, $\omega > \omega_n$ では進行波が生ずる¹⁾.

したがって, 境界面(接触面)におけるせん断応力は, 式(2)を用いると次式のようになる.

$$\tau_{rz}|_{r=r_0} = (\mu + i\mu') \frac{\partial w(r, z)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n w_n \sin(h_n z) \dots (3)$$

ただし,

$$w_n = A_n K_0(q_n r_0) \dots (4)$$

$$\alpha_n = (\mu + i\mu') q_n \frac{K_1(q_n r_0)}{K_0(q_n r_0)} \dots (5)$$

式(5)の α_n は境界面の土の単位面積当たりの抵抗であり, resistance factor とよばれているものである¹⁾. ただし $K_1(q_n r_0)$ = 第2種1次の変形ベッセル関数.

次に杭と土の境界面ですべりが発生している場合を考えよう. このすべり変位を $y(z, t)$ として次式のように表わしておく.

$$y(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \sin(h_n z) \dots (6)$$

このとき境界面における単位面積当たりの摩擦応力を τ_F とすると, 通常のすべりでは τ_F はすべり変位 y とすべり速度 \dot{y} の関数となることが多い²⁾⁵⁾. そこでこの τ_F が次式のようなフーリエ級数に展開されたとする.

$$\tau_F = \sum_{n=1}^{\infty} [k_n y_n(t) + c_n \dot{y}_n(t)] \sin(h_n z) \dots (7)$$

このとき k_n, c_n はいわゆる n 次モードの等価ばね係数と同粘性係数に相当するが, この式(7)の右辺は τ_F の履歴曲線を正確には表現できないので, 以下のように τ_F への最適な回帰をするような手法で k_n, c_n を決定してやる. このような考え方から導かれる近似解は厳密解と比較しても大差ないことが, 報告されている³⁾. そこで, k_n, c_n を定めるために, 式(7)中の y_n および \dot{y}_n の実部, すなわち $\text{real}(y_n) = \xi_n(t)$, $\text{real}(\dot{y}_n) = \dot{\xi}_n(t)$ を用いて, 誤差最小化法を適用する. すなわち, 式(7)において, 右辺の級数展開式はあくまでも τ_F の近似式であるから, 両者の誤差を最小にしておく必要がある. そこで式(7)において, 杭の軸方向および時間変動に対する平均2乗誤差を $\bar{\epsilon}^2$ とすると, 次式のように表わされる.

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{2}{H} \int_0^H \left[\tau_F - \sum_{n=1}^{\infty} (k_n \xi_n + c_n \dot{\xi}_n) \sin(h_n z) \right]^2 dz \dots (8)$$

ただしバーは時間平均を表わす.

式(8)の最小化のため, k_n, c_n で微分して0とおけば, k_n, c_n に関する連立方程式が得られるが, 一般にはモードの連成のため解を得ることは容易ではない.

そこで共振点近傍の振動を重視することにすると, 近似的にはモードの連成を無視することができるので k_n, c_n は次式の表現をとる^{6),7)}.

$$k_n \cong \frac{\tau_{Fn}(\xi_n, \dot{\xi}_n) \xi_n(t)}{\xi_n^2(t)} \dots (9)$$

$$c_n \cong \frac{\tau_{Fn}(\xi_n, \dot{\xi}_n) \dot{\xi}_n(t)}{\dot{\xi}_n^2(t)} \dots (10)$$

ここに,

$$\tau_{Fn}(\xi_n, \dot{\xi}_n) = \frac{2}{H} \int_0^H \tau_F(\xi_n, \dot{\xi}_n) \sin(h_n z) dz \dots (11)$$

ここで, 摩擦応力 τ_F は周期荷重に対して図-2のようなバイリニア履歴曲線を描くとすると, 次式で表わすことができる.

$$\tau_F(\xi_n, \dot{\xi}_n) = k_0 \xi_n(t) + \tau_s(z) \text{sgn}[\dot{\xi}_n(t)] \dots (12)$$

ただし, $k_0 = \tau_F$ の勾配(剛性), $\tau_s(z)$ = すべり応力の分布.

さらに $\tau_s(z)$ として図-3のように深さとともに直線的に変化するものと考えると, 次式のように書ける.

$$\tau_s(z) = \left(1 - \frac{z}{H}\right) \tau_0 \dots (13)$$

そこで $y_n(t)$ として

$$y_n(t) = Y_n e^{i(\omega t - \phi_n)} \dots (14)$$

とおく. ただし Y_n, ϕ_n = すべりの実振幅と位相角.

したがって, 式(9), (10) および (11) に対して, $\xi_n(t) = Y_n \cos(\omega t - \phi_n)$ を代入すると, 等価係数が次のように算出される.

$$k_n \cong \frac{2}{h_n H} k_0 \dots (15)$$

$$c_n \cong \frac{4\tau_0}{\pi \omega Y_n} \left[\frac{2}{h_n H} - \frac{2(-1)^{n-1}}{(h_n H)^2} \right] \dots (16)$$

次に杭変位 $v(z) \exp(i\omega t)$, 境界面における地盤変位

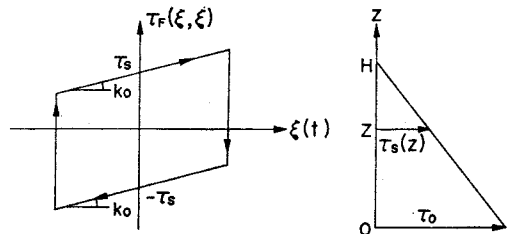


図-2 摩擦境界における応力-変位の関係

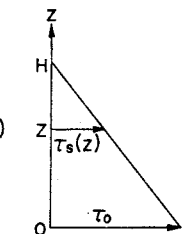


図-3 直線的に変化するすべり応力

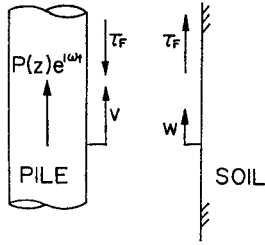


図-4 杭と土の境界における、荷重、変位および摩擦応力の関係

$w(r_0, z) \exp(i\omega t)$ およびすべり変位 $y(z, t)$ が図-4のような関係になっているとすると、 $y(z, t)$ は次式で定義される。

$$y(z, t) = v(z) e^{i\omega t} - w(r_0, z) e^{i\omega t} \dots\dots\dots (17)$$

このとき、 $v(z)$ 、 $w(r_0, z)$ をフーリエ級数に展開しておく

$$v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin(h_n z) \dots\dots\dots (18)$$

$$w(r_0, z) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin(h_n z), (w_n : \text{式 (4)}) \dots\dots\dots (19)$$

このとき式 (6)、(18) および (19) を式 (17) に用いると、次の関係が成立する。

$$y_n(t) = v_n e^{i\omega t} - w_n e^{i\omega t} \dots\dots\dots (20)$$

同様に 図-4 を参照すると、境界面ではすべり応力 τ_F はせん断応力とつり合っているので次式が成り立つ。

$$\tau_F = -\tau_{rz}|_{r=r_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n w_n \sin(h_n z) e^{i\omega t} \dots\dots (21)$$

したがって、式 (7) と (21) を等置して、式 (20) の関係を用いると次式を得る。

$$(k_n + \alpha_n) y_n(t) + c_n \dot{y}_n(t) = \alpha_n v_n e^{i\omega t} \dots\dots (22)$$

3. 摩擦境界面における杭と土の相互作用

杭頭に周期荷重 $P \exp(i\omega t)$ が作用するとき、杭変位 $v(z) \exp(i\omega t)$ は次の運動方程式を満足する。

$$m \frac{\partial^2 (v e^{i\omega t})}{\partial t^2} = E_p S \frac{\partial^2 (v e^{i\omega t})}{\partial z^2} + P e^{i\omega t} \delta(z-H) - 2 \pi r_0 \tau_F \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 m = 杭の単位長の質量、 E_p = 杭の弾性定数、 S = 杭の断面積、 $\delta(z-H)$ = デルタ関数。

そこで、式 (18)、(20)、(21) を式 (23) に用いると次の解を得る。

$$v_n e^{i\omega t} = \frac{1}{M + iN} \left[2 \pi r_0 \alpha_n y_n(t) + \frac{2P}{H} (-1)^{n-1} e^{i\omega t} \right] - \frac{2P}{H} (-1)^{n-1} e^{i\omega t} = \frac{2P}{-m\omega^2 + E_p S h_n^2 + 2 \pi r_0 \alpha_n'} \dots\dots\dots (24)$$

ただし、 $M = M_0 + 2 \pi r_0 \alpha_n$ 、 $M_0 = -m\omega^2 + E_p S h_n^2$ 、 $N = 2 \pi r_0 b_n$ 、 $\alpha_n = a_n + i b_n$ および

$$\alpha_n' = \alpha_n - \frac{\alpha_n (M + iN) Y_n e^{-i\phi_n}}{\frac{2P}{H} (-1)^{n-1} + 2 \pi r_0 \alpha_n Y_n e^{-i\phi_n}} \dots\dots\dots (25)$$

この α_n' は式 (24) の形からわかるように、見かけの resistance factor を表わしており、杭と土が完全密着のときは $y_n = 0$ より $\alpha_n' = \alpha_n$ となるが、完全なすべり (摩擦抵抗が 0) のときは $v_n \exp(i\omega t) = y_n$ となり、 $\alpha_n' = 0$ である。

式 (15)、(16) および (24) を式 (22) に代入して、実数部・虚数部に分離すると 2 式を得るが、それらより次式が導かれる。

$$\sin \phi_n = \frac{2P}{H} (-1)^{n-1} \frac{(M^2 + N^2)}{d_n} \cdot \left[\frac{4 \tau_n}{\pi} (a_n M + b_n N) - b_n M_0 k_n Y_n \right] \dots\dots\dots (26)$$

$$\cos \phi_n = \frac{2P}{H} (-1)^{n-1} \frac{(M^2 + N^2)}{d_n} \cdot \left[\frac{4 \tau_n}{\pi} b_n M_0 + (a_n M + b_n N) k_n Y_n + (a_n^2 + b_n^2) M_0 Y_n \right] \dots\dots\dots (27)$$

ただし、

$$d_n = [(M^2 + N^2) k_n + (a_n M + b_n N) M_0]^2 Y_n^2 + \left[\frac{4 \tau_n}{\pi} (M^2 + N^2) + b_n M_0^2 Y_n \right]^2 \dots\dots (28)$$

$$\tau_n = \left[\frac{2}{h_n H} - \frac{2(-1)^{n-1}}{(h_n H)^2} \right] \tau_0 \dots\dots\dots (29)$$

式 (26)、(27) より ϕ_n を消去すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & [(M^2 + N^2) k_n + (a_n M + b_n N) M_0]^2 Y_n^2 \\ & + \left[\frac{4 \tau_n}{\pi} (M^2 + N^2) + b_n M_0^2 Y_n \right]^2 \\ & = \left(\frac{2P}{H} \right)^2 (a_n^2 + b_n^2) (M^2 + N^2) \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

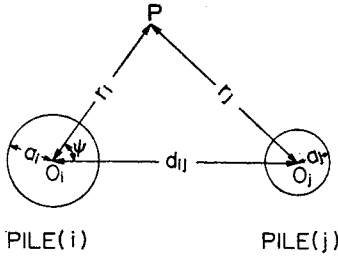
式 (30) において、 $Y_n > 0$ ならすべりを生ずるが、一方 $Y_n < 0$ は無意味なので $Y_n = 0$ とおき、このときはすべりは生じない。すなわち、

$$Y_n = \begin{cases} \frac{-\frac{4 \tau_n}{\pi} b_n M_0^2 + \sqrt{R_n}}{(k_n M + a_n M_0)^2 + (k_n N + b_n M_0)^2} ; & P > P_{cr}^{(n)} \\ 0 ; & P < P_{cr}^{(n)} \end{cases} \dots\dots\dots (31)$$

ここに

$$\begin{aligned} R_n = & \left(\frac{2P}{H} \right)^2 (a_n^2 + b_n^2) [(k_n M + a_n M_0)^2 \\ & + (k_n N + b_n M_0)^2] - \left(\frac{4 \tau_n}{\pi} \right)^2 [(M^2 + N^2) k_n \\ & + (a_n M + b_n N) M_0]^2 \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

$$P_{cr}^{(n)} = \frac{H}{2} \frac{4 \tau_n}{\pi} \sqrt{\frac{M^2 + N^2}{a_n^2 + b_n^2}} \quad (: \text{critical slip force}) \dots\dots\dots (33)$$



しかるに、式 (34) の関係を用いると $\partial r_j / \partial r_i$ は次のように (r_i, ϕ) で表わすことができる。

$$\frac{\partial r_j}{\partial r_i} = \frac{r_i - d_{ij} \cos \phi}{\sqrt{r_i^2 + d_{ij}^2 - 2 r_i d_{ij} \cos \phi}} \equiv g_{ij} [r_j(r_i, \phi)] \dots \dots \dots (37)$$

そこで式 (35) と (37) を式 (36) に代入すると、結局次式を得る。

$$\tau^{(ij)}(r_i, r_j, \phi, z) = -(\mu + i\mu') g_{ij} [r_j(r_i, \phi)] \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(j)} q_n K_1 [q_n r_j(r_i, \phi)] \sin(h_n z) \dots \dots \dots (38)$$

ところで、ある杭について、他杭から及ぼされる変位および応力の周面分布が一樣ではないので、ここでは周面について (ϕ について) 平均化して取り扱うことにする。したがって、群杭が p 本の杭から成っているときは、他杭の杭 (i) への影響を平均化して重ね合わせることにより、杭 (i) の平均変位 $w^{(i)}(a_i, z)$ とせん断応力 $\tau^{(i)}(a_i, z)$ は次式のように得られる。

$$w^{(i)}(a_i, z) = w^{(ii)}(a_i, z) + \sum_{j \neq i} w^{(ij)} [r_j(a_i), z] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^p w_n^{(ij)} \sin(h_n z) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n^{(i)} \sin(h_n z) \dots \dots \dots (39)$$

$$\tau^{(i)}(a_i, z) = \tau^{(ii)}(a_i, z) + \sum_{j \neq i} \tau^{(ij)} [r_j(a_i), z] = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^p \alpha_n^{(ij)} w_n^{(ij)} \sin(h_n z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(i)} w_n^{(i)} \sin(h_n z) \dots \dots \dots (40)$$

ただし

$$w_n^{(ij)} = A_n^{(j)} \bar{K}_0(q_n d_{ij}) \dots \dots \dots (41)$$

$$w_n^{(i)} = \sum_{j=1}^p w_n^{(ij)} = \sum_{j=1}^p A_n^{(j)} \bar{K}_0(q_n d_{ij}) \dots \dots \dots (42)$$

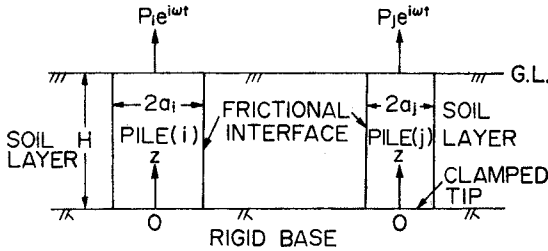
$$\alpha_n^{(ij)} = (\mu + i\mu') q_n \frac{\bar{K}_1(q_n d_{ij})}{\bar{K}_0(q_n d_{ij})} \dots \dots \dots (43)$$

$$\alpha_n^{(i)} w_n^{(i)} = \sum_{j=1}^p \alpha_n^{(ij)} w_n^{(ij)} = \sum_{j=1}^p \alpha_n^{(ij)} A_n^{(j)} \bar{K}_0(q_n d_{ij}) \dots \dots \dots (44)$$

$$\bar{K}_0(q_n d_{ij}) = \begin{cases} K_0(q_n a_i) & ; i = j \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi K_0[q_n r_j(a_i, \phi)] d\phi & ; i \neq j \end{cases} \dots \dots \dots (45)$$

$$\bar{K}_1(q_n d_{ij}) = \begin{cases} K_1(q_n a_i) & ; i = j \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g_{ij} [r_j(a_i, \phi)] K_1[q_n r_j(a_i, \phi)] d\phi & ; i \neq j \end{cases} \dots \dots \dots (46)$$

ところで式 (44) の中の $w_n^{(i)}$ は、杭が連続しているため未定係数 $A_n^{(j)}$ ($j=1, 2, \dots, p$) を含んでいるので、杭 (i) における resistance factor $\alpha_n^{(i)}$ は一般には未



図—5 群杭モデルと座標系

式 (33) で定義した critical slip force $P_{cr}^{(n)}$ は、 n 次モードのすべりが発生する限界荷重であるから、Miller の “break-loose condition” に対応するものである^{3)~5)}。

一方位相角 ϕ_n については、式 (26), (27) を用いれば同様に計算される。

4. 群杭への適用

図—5 のような杭 (i) および (j) に関して次の関係が成り立つ。

$$r_j^2 = r_i^2 + d_{ij}^2 - 2 r_i d_{ij} \cos \phi \dots \dots \dots (34)$$

ただし、 r_i, r_j = 杭 (i), (j) から P 点までの距離、 d_{ij} = 杭間隔、 ϕ = 杭 (i) における P 点の極角。

そこで $w^{(ij)}(r_i, r_j, \phi, z)$ を孤立した杭 (j) による $P(r_i, \phi)$ 点の鉛直変位として、これを (r_i, ϕ) 座標で表わすと

$$w^{(ij)}(r_i, r_j, \phi, z) = w^{(ij)} [r_j(r_i, \phi), z] = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(j)} K_0 [q_n r_j(r_i, \phi)] \sin(h_n z) \dots \dots \dots (35)$$

ただし、 $A_n^{(j)}$ = 孤立した杭 (j) の鉛直変位を展開したときのフーリエ係数。

同様にして杭 (j) による P 点におけるせん断応力を $\tau^{(ij)}(r_i, r_j, \phi, z)$ として、これを (r_i, ϕ) 座標で表わすと

$$\tau^{(ij)}(r_i, r_j, \phi, z) = (\mu + i\mu') \frac{\partial w^{(ij)}(r_i, r_j, \phi, z)}{\partial r_i} = (\mu + i\mu') \frac{\partial w^{(ij)}}{\partial r_j} \cdot \frac{\partial r_j}{\partial r_i} \dots \dots \dots (36)$$

定である。それゆえ、 $\alpha_n^{(i)}$ は通常行列演算を繰り返して行って求めなければならない。

しかしながら、各杭がまったく同じ条件下にあるとき、すなわち各杭が同一の諸元をもち、同心円上に等間隔に配置され、かつ等大・同位相の荷重を受けるような特別な場合は、各杭はまったく同一の振動が予想される。したがってこのときは次の関係が成り立つ。

$$A_n^{(1)} = A_n^{(2)} = \dots = A_n^{(p)} \dots \dots \dots (47)$$

これより、式(44)を式(42)で除すことにより群杭の resistance factor が直接求められる。

$$\alpha_n^{(1)} = \alpha_n^{(2)} = \dots = \alpha_n^{(p)} = \frac{\sum_{j=1}^p \alpha_n^{(ij)} \bar{K}_0(q_n d_{ij})}{\sum_{j=1}^p \bar{K}_0(q_n d_{ij})} \dots \dots \dots (48)$$

5. 数値計算結果とその考察

数値計算の対象とした杭は、図-6のような単杭(G_1)、2本杭(G_2)および4本杭(G_4)であり、すべて等径($a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = r_0$)、等長であり、かつ等間隔($d_{12} = d_{23} = d_{34} = d_{41} = d$)に配置されているものとした。さらに杭頭に作用する鉛直荷重は、同じ大きさで同位相とする。

ここで用いる諸量を、層厚 H 、土のせん断弾性係数 $\mu (=G)$ 、土のせん断波の伝播速度 v_s 、杭の弾性定数 E_p などで次のように無次元化しておく。

$$\bar{m} = \frac{M_p}{M_s} = \frac{\rho_p S H}{\rho \pi r_0^2 H}, \quad \bar{v} = \frac{v_s}{v_p}, \quad \bar{r}_0 = \frac{r_0}{H}, \quad a_0 = \frac{H \omega}{v_s}$$

(: 無次元円振動数)

$$\nu_n = \frac{\pi (2n-1)}{2 \bar{v}} \quad (: \text{杭の無次元固有円振動数})$$

$$\bar{\omega}_n = \frac{H \omega_n}{v_s} = \frac{\pi (2n-1) \eta}{2}$$

(: 土層の無次元固有円振動数)

$$\bar{P} = \frac{P}{GH^2}, \quad \bar{v}(H) = \frac{1}{H} v(H),$$

$$\bar{\alpha}_n = \frac{H}{\mu} \alpha_n = \bar{\alpha}_n + i \bar{b}_n, \quad \bar{\alpha}_n' = \frac{H}{\mu} \alpha_n' = \bar{\alpha}_n' + i \bar{b}_n',$$

$$\bar{k}(H) = \frac{r_0}{E_p S} k(H) = \frac{\bar{P} \bar{v}^2}{\pi \bar{v}(H) \bar{r}_0 \bar{m}}$$

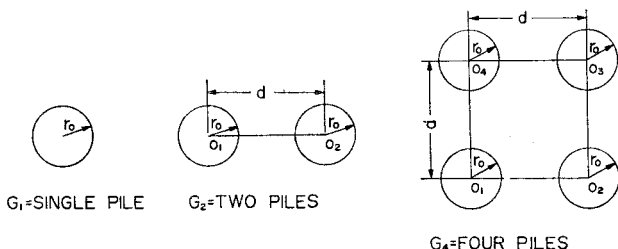


図-6 計算のための単杭、群杭モデル

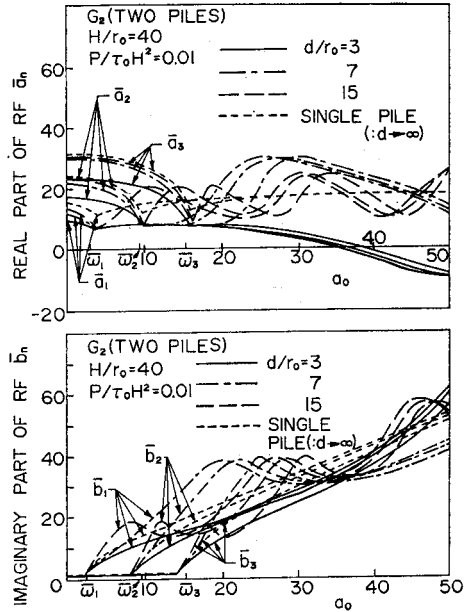


図-7 Resistance factor (RF); $\bar{\alpha}_n = \bar{\alpha}_n + i \bar{b}_n$

(: 無次元杭頭剛性)

ただし、 ρ, ρ_p = 土と杭の密度、 $v_p = \sqrt{E_p / \rho_p}$ = 杭の縦波の伝播速度。

さらに、次の諸量を標準値として採用している：減衰係数 $D_p = D_s = 0.02$ 、杭と土の質量比 $\bar{m} = 0.1$ 、土の縦・横波の伝播速度比 $\eta = v_l / v_s = 2$ 、土の横波と杭の縦波の伝播速度比 $\bar{v} = v_s / v_p = 0.1$ 、杭先端におけるすべり応力 $\tau_0 / \mu = 0.01$ 、および土は砂質性のものを考えて境界面にはクーロン摩擦を用いたので $k_0 = 0^0$ 。またモードの分解・合成は最初の 20 モードを用い、式(45)、(46)の計算はガウスの数値積分法によった。上記の値を用いると、 $\bar{\omega}_1 = 3.14, \bar{\omega}_2 = 9.42, \bar{\omega}_3 = 15.7, \dots; \nu_1 = 15.7, \nu_2 = 47.1, \nu_3 = 78.5, \dots$ となる。

図-7 は単杭と 2 本杭の場合の土の resistance factor $\bar{\alpha}_n = \bar{\alpha}_n + i \bar{b}_n$ を無次元振動数 a_0 に対して 3 次モードまで図示したものであり、上・下図はそれぞれ実数部 ($\bar{\alpha}_n$)・虚数部 (\bar{b}_n) である。杭からの放射波が生成されない $0 < a_0 < \bar{\omega}_n$ では、杭間隔 d が増すにつれて単杭の傾向に近づくことがわかるが、波動が伝播を始める $a_0 > \bar{\omega}_n$ では d が小さいと隣接杭の影響が大きく、かつ a_0 に対して周期的に作用することが示されている。これは、ある杭に対して隣接杭より放射される波動(その位相速度を c_n' とする)が位相差 $\delta_n = \omega d / c_n'$ で周期的に作用するために生ずるものである。したがって d が大きければ当然振動数 a_0 に対する変動が激しくなり、 d が小さければ a_0 に対して緩やかに変化することになる。

図-8 は単杭 (G_1), 2本杭 (G_2) および4本杭 (G_4) の resistance factor $\bar{a}_n = \bar{a}_n + i\bar{b}_n$ を a_0 に対して図示したものである。 G_4 の例のように, 適当な杭間隔と杭本数の場合, 周辺の杭の影響が相乗的に効いて, 特定の振動数 a_0 では側方の土の剛性が急激に高まることを示している。しかし一般的には群杭の $\bar{a}_n = \bar{a}_n + i\bar{b}_n$ は単杭のそれを中心に変動する。

図-9 は2本杭における resistance factor $\bar{a}_n = \bar{a}_n + i\bar{b}_n$ の杭間隔 d/r_0 による影響を実部 \bar{a}_n ・虚部 \bar{b}_n に分

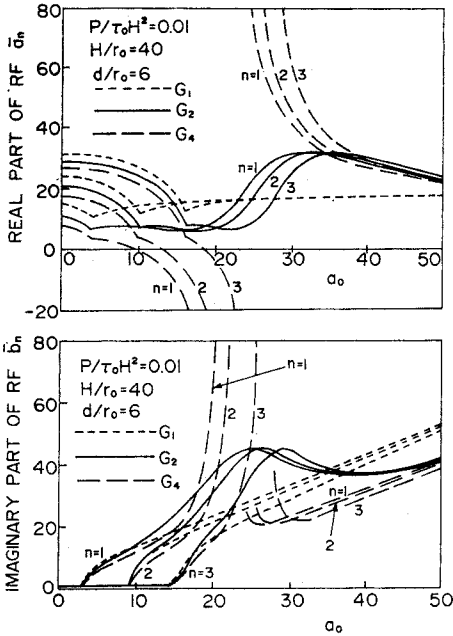


図-8 Resistance factor (RF); $\bar{a}_n = \bar{a}_n + i\bar{b}_n$

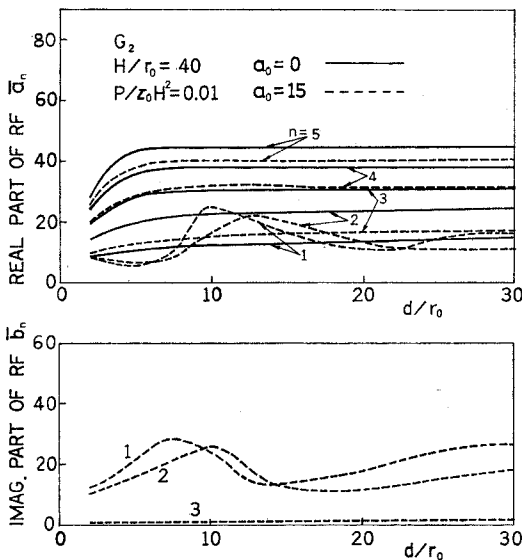


図-9 Resistance factor (RF); $\bar{a}_n = \bar{a}_n + i\bar{b}_n$

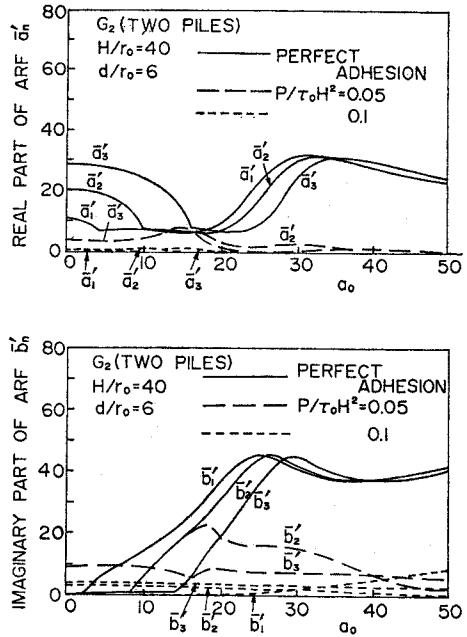


図-10 見かけの Resistance factor; $\bar{a}_n' = \bar{a}_n' + i\bar{b}_n'$

けて示したものであるが, 図中の実線は $a_0=0$ (静的な場合), 点線は $a_0=15$ (動的な場合) である。 \bar{a}_n について, 特に $a_0=0$ では杭間隔 d が小さくなるにつれて急減しており, これは群杭特有の性質であるが, 高次モードほどその傾向が著しい。一方, $a_0=15$ では \bar{a}_n, \bar{b}_n ともに d に対して周期的な変動をしているが, これは図-7で説明したように, 隣接杭から位相差 $\delta_n = \omega d / c_n'$ をもった周期的な波が伝播してくるためである。

一方図-10 は見かけの resistance factor $\bar{a}_n' = \bar{a}_n' + i\bar{b}_n'$ の実部と虚部の3次モードまでを上・下の図に示したものであるが, 荷重振幅 P の増大とともに, \bar{a}_n' および \bar{b}_n' は激減しており, すべりが急速に生じたことを物語っている。

図-11 は本研究で定義した critical slip force $P_{cr}^{(n)}$ の振動数効果を単杭, 2本杭および4本杭に対して示したものであるが, 地盤の共振時 ($a_0 \cong \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \dots = 3.14, 9.42, 15.7, \dots$) において $P_{cr}^{(n)}$ が増大することがわかる。これは前出の図-7から知られるように, $a_0 \cong \bar{\omega}_n$ では境界面におけるせん断応力 $\tau_{rz}|_{z=r_0}$ が摩擦応力 τ_F に対して相対的に小さくなるため, 土の剛性効果 ($\alpha_n = a_n + ib_n$) が低下して, 式 (33) の $P_{cr}^{(n)}$ は逆に増大することになり, それだけすべりは発生しにくくなることを示している。しかしすべりが発生しにくくても, 側方の土の剛性は低下しているので杭の応答は低下しないことに注意しなければならない (後出の図-16参照)。低次モードでは $P_{cr}^{(n)}$ が a_0 にほとんど依存しなくなるが, 高次モードでは振動数依存が顕著になって

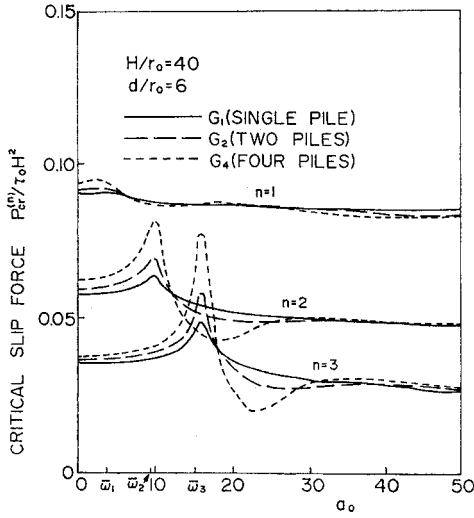


図-11 Critical slip force と周波数との関係

くる。

図-12 は $P_{cr}^{(n)}$ の杭間隔 d への依存度を調べたもので、静的 ($\alpha_0=0$) な場合のみを図示している。 d が小なるほど $P_{cr}^{(n)}$ が増大するのは、前図の説明と同様に $P_{cr}^{(n)}$ の定義式 (33) の性質によるもので、杭間隔が狭い場合は土の剛性効果が低下するため、 $P_{cr}^{(n)}$ は増大することになる。したがって杭間隔が狭いときはかえってすべりが発生しにくくなる。

図-13 には、振動数 $\alpha_0=0$ および 15 に対して、杭と土の鉛直変位分布の実数部をそれぞれ実線と点線で示している。本数値計算で用いている諸元では、前出のように杭の基本固有円振動数は $\nu_1=15.7$ であり、 $\alpha_0=15$ ときわめて近い値である。さらに $\alpha_0=0$ のときは、 $P_{cr}^{(1)}/\tau_0 H^2=0.0917$, $P_{cr}^{(2)}/\tau_0 H^2=0.0598$, ...; $\alpha_0=15$ のときは、 $P_{cr}^{(1)}/\tau_0 H^2=0.0869$, $P_{cr}^{(2)}/\tau_0 H^2=0.0526$, ... と算出される。したがって $P/\tau_0 H^2=0.01$ が載荷した場合は、この荷重は低次の critical slip force $P_{cr}^{(n)}/\tau_0 H^2$ の値より相当小さいにもかかわらず、地表面付近では局所的なすべりが発生している。さらに荷重 $P/\tau_0 H^2$ を増すと、すべりは地表面から深部へと進んで行くことが示されている。

図-14 は杭頭の周波数応答関数 (FRF) の一例を示したもので、図中の実線・点線はそれぞれ FRF の実部・虚部のことである。前図で触れた最大の critical slip force は $\alpha_0=0$ では $P_{cr}^{(1)}/\tau_0 H^2=0.0917$ であるから、荷重 $P/\tau_0 H^2=0.1$ では全面的なすべりのため応答は非常に大きくなるが、 $P/\tau_0 H^2=0.05$ 程度の荷重の場合は局所的なすべりが発生しているにもかかわらず、側方の土の剛性効果は依然有効に働き、応答を低く抑え

ていることがわかる。

図-15 は杭頭の周波数応答関数 (FRF) の絶対値 $|GHv(H)/P|$ を荷重振幅 $P/\tau_0 H^2$ に対して図示したもので、細長比をパラメーターにして描いてある。図中の実・点線はそれぞれ $\alpha_0=0$ と 15 に対するもので、本研究では杭と土の境界面にクーロン摩擦を仮定したためか、荷重の増大とともに急激に全面的なすべりに到達しやすいようであり、細長比の大なるほどその傾向が著し

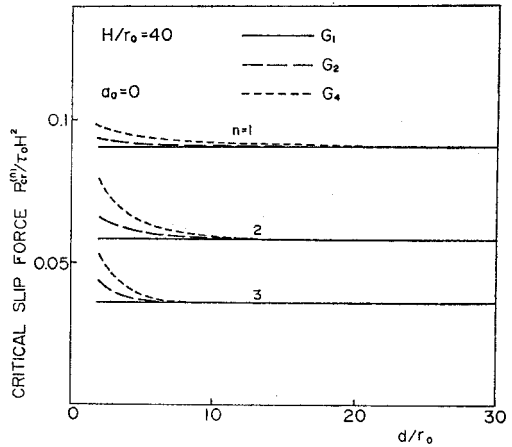


図-12 Critical slip force と細長比との関係

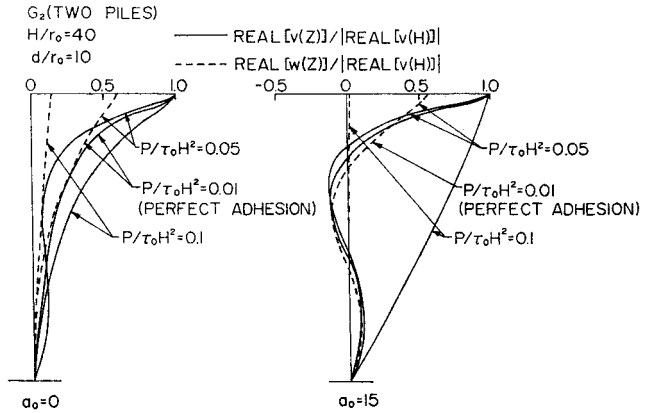


図-13 杭と土の鉛直変位の分布

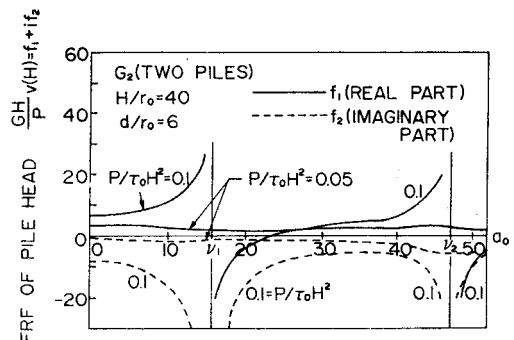


図-14 杭頭の周波数応答関数 (FRF)

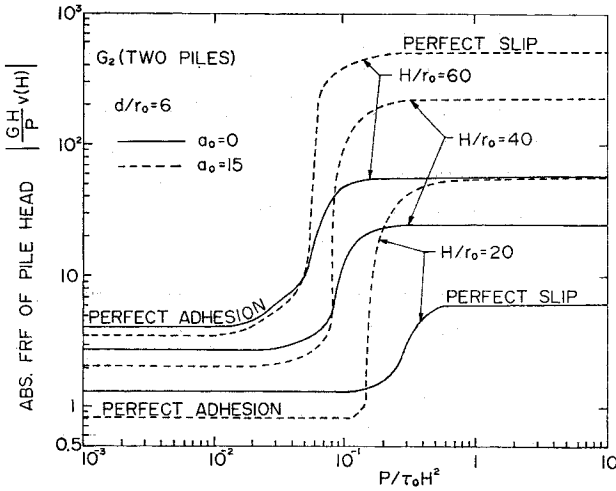


図-15 杭頭の周波数応答関数 (FRF) の絶対値と荷重との関係

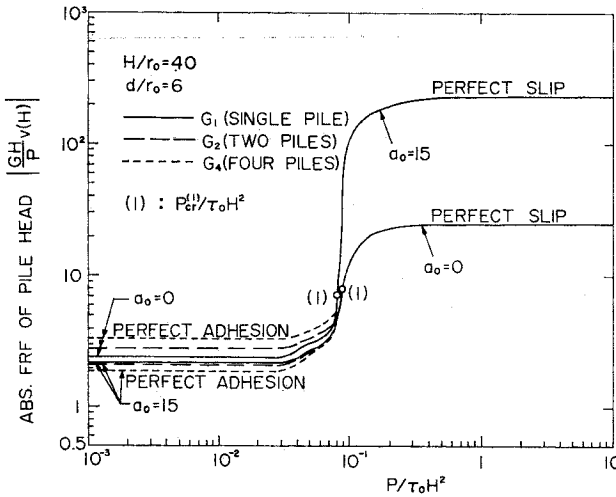


図-16 杭頭の周波数応答関数 (FRF) の絶対値と荷重との関係

い。

図-16 も同様に杭頭の FRF の絶対値を、単杭・2本杭および4本杭について、 $\alpha_0=0$ および 15 の場合を図示したもので、図中の (1) は1次の critical slip force $P_{cr}^{(1)}/\tau_0 H^2$ のことである。杭の共振点の位置が側方の土の剛性効果のいかんによって変化するので(式(24)の α_n' の役割より)、 $\alpha_0=15$ での G_1, G_2, G_4 の応答の比較は必ずしも妥当とはいえないが、互いに大差はないといえよう。しかし $\alpha_0=0$ の静的な場合では、杭間隔は同じでも密集することにより、明らかに杭頭の応答変位は増大、すなわち杭頭剛性は低下することが認められる。さらに荷重 $P/\tau_0 H^2$ が $P_{cr}^{(1)}/\tau_0 H^2$ に達すると急速にすべりが進行し、当然のことながら単杭の応答に近づき、上述の杭の密集による杭頭の剛性低下の効果はほとんど存在しなくなる。したがって、杭基礎の設計にあ

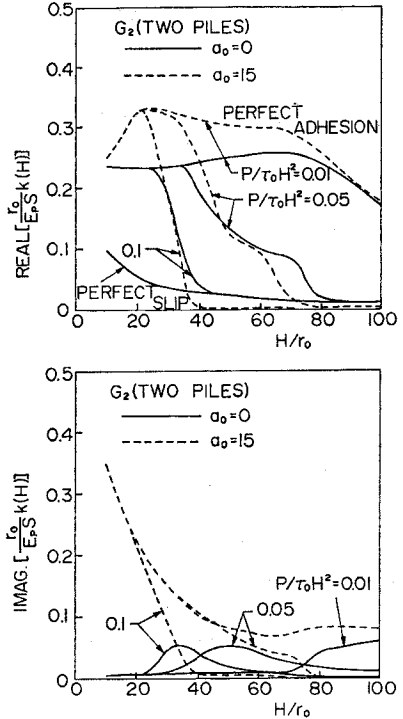


図-17 杭頭剛性と細長比との関係 (2本杭)

っては、 $P_{cr}^{(1)} > P$ となるような杭を選んで、すべりを防止するとともに、群杭特有の杭頭剛性の低下を見込まなければならない。

図-17 は杭頭剛性 $r_0 k(H)/E_p S$ を細長比 H/r_0 に対して描いたもので、その実部・虚部を上下に示した。杭頭剛性は荷重 P が小さいときは H/r_0 に対してあまり変化しないが、 P が大きい場合は H/r_0 に非常に敏感であり、 H/r_0 のわずかな増大で急速な全面すべりに至ることが示されており、杭の細長比の選択には十分な配慮が必要であることがわかる。

6. 結論

本研究では、杭頭に鉛直荷重を受ける支持杭に土との境界面ですべり得る条件を与えて、近似的ではあるがすべりを含んだ杭と土の相互作用に関する解析解を導いた。さらにこれを群杭にまで拡張して、数値例によって考察を行った。得られた成果を要約すると以下のようになる。

- (1) 低次の critical slip force $P_{cr}^{(n)}$ は、杭にすべりを発生させる荷重の目安として適当であり、これは振動数に対してほぼ一定とみなし得る。
- (2) 荷重の増加につれて、すべりは地表部より杭先端へと進む。

(3) 側方の土の剛性効果は、杭間隔が狭いほど、杭本数が多いほど低下する。

(4) 杭頭の剛性は、小荷重のもとでは細長比に関係なくほぼ一定であるが、大荷重のもとでは細長比を増すと著しく低下する場合がある。

本研究では、等価係数を求める際にモードの連成効果を無視して、その得失には言及し得なかった。しかしながら、地盤の共振点近傍ではそれに対応するモードが卓越することから、振動数がその近傍ならば本近似解の適用は容認されよう。

記号

$A_n, A_n^{(j)}$: フーリエ級数の係数
 a_n, b_n : α_n の実数・虚数部
 \bar{a}_n, \bar{b}_n : $H\alpha_n/\mu, Hb_n/\mu$
 a_n', b_n' : α_n' の実数・虚数部
 \bar{a}_n', \bar{b}_n' : $H\alpha_n'/\mu, Hb_n'/\mu$
 a_0 : $H\omega/v_s$ 無次元振動数
 c_n : n 次モードの等価減衰係数
 c_n' : 土の圧縮波の位相速度
 D_v, D_s : $\lambda'/\lambda, \mu'/\mu$
 d, d_{ij} : 杭間隔 (中心間)
 E_p : 杭のヤング率
 \bar{e}^2 : 2 乗平均誤差
 G : せん断弾性係数 (= μ)
 $g_{ij}[r_j(r_i, \phi)]: \partial r_j/\partial r_i$ = 式 (37)
 H : 杭長および地盤の層厚
 h_n : $\pi(2n-1)/2H$
 i : $\sqrt{-1}$
 $K_0(q_n r), K_1(q_n r)$: 第 1 種・2 種変形ベッセル関数
 $\bar{K}_0(q_n d_{ij}), \bar{K}_1(q_n d_{ij})$: $K_0[q_n r_j(a_i, \phi)]$ および $K_0[q_n r_j(a_i, \phi)]$ を i 杭周面で平均したものの
 $k(H)$: 杭頭の複素剛性
 $\bar{k}(H)$: $r_0 k(H)/E_p S$
 k_n : n 次モードの等価ばね係数
 k_0 : 摩擦応力の剛性
 M : $M_0 + 2\pi r_0 a_n$
 M_0 : $-m\omega^2 + E_p S h_n^2$
 M_p : $mH = \rho_p S H$ 杭の全質量
 M_s : $\rho \pi r_0^2 H$ 土柱の全質量
 m : 杭の単位長質量
 \bar{m} : M_p/M_s
 N : $2\pi r_0 b_n$
 n : モード番号
 P : 加振力振幅

$P_{cr}^{(n)}$: n 次モードの critical slip force
 q_n : パラメーター
 R_n : 根号の中味 = 式 (32)
 r_0 : 杭半径
 $r, r_i, r_j(r_i, \phi)$: 極座標
 S : 杭の実断面積
 t : 時間
 v_l : $\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ 土の圧縮波の伝播速度
 v_n : n 次モードの杭変位
 v_s : $\sqrt{\mu/\rho}$ 土のせん断波の伝播速度
 v_p : $\sqrt{E_p/\rho_p}$ 杭の圧縮波の伝播速度
 $v(z)$: 杭の鉛直変位
 \bar{v} : v_s/v_p
 $w, w^{(i)}, w^{(ij)}$: 土の鉛直変位
 $w_n, w_n^{(i)}, w_n^{(ij)}$: n 次モードの土の鉛直変位
 Y_n : すべりの実振幅
 $y(z, t)$: すべり変位
 $y_n(t), \dot{y}_n(t)$: n 次モードのすべり振幅・同速度
 z : 鉛直方向の座標
 $\alpha_n, \alpha_n^{(i)}, \alpha_n^{(ij)}$: 土の resistance factor
 α_n' : 土の見かけの resistance factor
 $\bar{\alpha}_n$: $H\alpha_n/\mu = \bar{a}_n + i\bar{b}_n$
 $\bar{\alpha}_n'$: $H\alpha_n'/\mu = \bar{a}_n' + i\bar{b}_n'$
 A_n : 式 (28)
 $\delta(z-H)$: デルタ関数
 δ_n : 位相差
 η : $v_l/v_s = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\mu}$
 λ, μ : 土の Lamè の定数の実数部
 λ', μ' : 土の Lamè の定数の虚数部
 ν_n : $\pi(2n-1)/2\bar{v}$ 杭の無次元固有振動数
 $\xi_n(t), \dot{\xi}_n(t)$: $y_n(t), \dot{y}_n(t)$ の実数部
 π : 3.1415926...
 ρ : 土の密度
 ρ_p : 杭の密度
 $\tau_s(z)$: 土と杭の境界面におけるすべり応力
 τ_0 : 杭先端におけるすべり応力
 τ_n : n 次モードの摩擦応力
 τ_F : 土と杭の境界面における摩擦応力
 τ_{Fn} : τ_F の z に関する平均
 $\tau_{rz}, \tau^{(ij)}(r_i, r_j, \phi, z)$: 土のせん断応力
 ϕ_n : すべり変位の位相差
 ϕ : 極座標
 ω : 加振円振動数
 ω_n : $\pi(2n-1)v_l/2H$ 表層地盤の固有円振動数
 $\bar{\omega}_n$: $\omega_n H/v_s$

参 考 文 献

- 1) Nogami, T. and M. Novak : Soil-pile interaction in vertical vibration, *Journal of Earthquake Engineering and Structural dynamics*, Vol. 4, pp. 277~293, 1976.
- 2) 尧天義久, ほか4名 : Study on soil-pile interaction in vertical vibration, 第5回日本地震工学シンポジウム(1978)講演集, pp. 377~384, 1978.
- 3) Miller, R.K. : An approximate method of analysis of the transmission of elastic waves through a frictional boundary, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 44, Series E, No. 4, pp. 652~656, 1977.
- 4) Miller, R.K. : The effect of boundary friction on the propagation of elastic waves, *Bulletin of Seismological Society of America*, Vol. 68, No. 4, pp. 987~998, 1978.
- 5) Miller, R.K. and M.T. Tran : Reflection, refraction and absorption of elastic waves at frictional interface : SH motion, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 46, Series E, No. 3, pp. 625~630, 1979.
- 6) Iwan, W.D. and I-Min Yang : Application of statistical linearization techniques to nonlinear multidegree-of-freedom systems, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 39, Series E, No. 2, pp. 546~550, 1972.
- 7) Iwan, W.D. : On the steady-state response of a one-dimensional yielding continuum, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 37, Series E, No. 3, pp. 720~727, 1970.
- 8) Potyondy, J.G. : Skin friction between various soils and construction materials, *Geotechnique*, XI-4, pp. 339~353, 1961.

(1981.8.22・受付)