

有限要素法において対角値にゼロを有す
連立一次方程式の解法EFFICIENT SOLUTION OF THE MATRIX EQUATIONS POSSESSING
ZEROS ON THE DIAGONAL FOR FINITE ELEMENT ANALYSIS

岩 崎 峯 夫*

By Mineo IWASAKI

1. ま え が き

有限要素法によって求められる未知関数は、一つの関数であることが多い。たとえば、弾性問題の未知関数は、変位関数である。しかし、支配方程式に、ある未知関数を追加し、元の支配方程式と等価な支配方程式を求め、この方程式をもとに定式化を行うと、未知関数は、複数となる。このように付加的拘束が導入されると、解くべき連立一次方程式の対角値にゼロを含むことがしばしば生じる³⁾。たとえば、流体解析において圧力を未知関数として加える場合や熱伝導解析において熱流量を未知関数として加える場合に、対角値にゼロを含むことがある。

このように対角値にゼロを含む連立一次方程式を解く場合において、消去法を用いた応力解析用プログラムを無条件で使用することはできない。この理由は、剛性マトリックスの対角値にゼロを含まないために、これらのプログラムは、計算時間と記憶容量の増加を伴うピボット選択操作を行わないからである。

現在、このような連立一次方程式を解く実用的な手法は、Hood が発表しているピボット選択を行うウェーブフロント法⁴⁾がある。また、対角値がゼロとなる行を最後に配置する方法⁵⁾もあるが、バンド幅が非常に大きくなるのでスパースマトリックス法で解いても計算時間と計算機容量が多くなるため実用的方法といえない。

そこで、他の効率的な解法を見出すために、流速に関して 2 次、圧力に関して一次の内挿関数を用いた流体解析を例として、ピボットの非ゼロ化の過程を調べた。その結果“条件付節点番号付法”が導きだされた。

この方法は、節点番号をふる順序にある条件を課して節点番号を付け、応力解析用プログラムで用いられている連立一次方程式の解法を用いて解く方法である。すな

わち、連立一次方程式を解くとき、ピボット選択を行うことに代わり、それを解く前に、節点番号の振り方により、ピボット選択と同じ効果を与える方法である。

本論文では、流体解析についてこの条件を求めたが、他の同様な問題に対しても、この条件を求める過程と同様な過程を行うと、他の問題に対しても、この条件を求めることができると思われる。

2. 影響マトリックス

影響マトリックスは、応力解析の剛性マトリックスに相当するものである。粘性流の影響マトリックスは、山田⁶⁾により、次のように示されている。ただし、山田の表現は、対角値がゼロとなる圧力項に関するものを、最後に配置しているが、ここでは、一つの節点に関する量(流速 u , v , 圧力 p)を、応力解析で用いられているように、節点ごとに集めて表わした。

$$[K]\{\phi\} = \{R\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\{\phi\}^T = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n] \dots\dots\dots (2)$$

$$\{\phi_i\}^T = [u_i, v_i, p_i] \dots\dots\dots (3)$$

$$\{R\}^T = [R_1, R_2, R_3, \dots, R_n] \dots\dots\dots (4)$$

$$\{R_i\}^T = [R_{ui}, R_{vi}, 0] \dots\dots\dots (5)$$

$$R_{ui} = \int_c N_i X^* ds, R_{vi} = \int_c N_i Y^* ds \dots\dots\dots (6)$$

$$X^* = \mu \nabla u^{(e)} \hat{n} - n_x p^{(e)} \dots\dots\dots (7)$$

$$Y^* = \mu \nabla v^{(e)} \hat{n} - n_y p^{(e)} \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 u_i , v_i と p_i は、節点 i での流速と圧力である。 R_{ui} , R_{vi} は、節点 i が境界上にあるとき現われる項であり、 $\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j}$ は、境界の線素に垂直な外向単位法線ベクトルである。

影響マトリックス $[K]$ のうちの節点 i と j との関係を示す 3×3 のサブマトリックス $[K_{ij}]$ は、次のように示される。なお、 k_{lm} は、サブマトリックス $[K_{ij}]$ の l 行 m 列の要素の値とする。

* 正会員 工修 運輸省港湾技術研究所機材部作業船研究室長

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 k_{11}, \dots, k_{33} は、次のように表わされる。

$$k_{11} = k_{22} = \int_{\Omega^{(e)}} \mu \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \dots\dots\dots (10)$$

$$k_{13} = - \int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j^p dx dy \dots\dots\dots (11)$$

$$k_{23} = - \int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j^p dx dy \dots\dots\dots (12)$$

$$k_{31} = - \int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_j}{\partial x} N_i^p dx dy \dots\dots\dots (13)$$

$$k_{32} = - \int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_j}{\partial y} N_i^p dx dy \dots\dots\dots (14)$$

N_i は、流速 u, v に関する2次の内挿関数、 N_j^p は、圧力 p に関する1次の内挿関数である。

ただし、 N_j^p の j が中間節点（圧力の自由度がない節点）の場合は、 $N_j^p = 0$ である。また、 k_{33} は、 $[K_{ii}]$ の i が中間節点のときの $k_{33} = 1$ とし、他の場合は、ゼロとする。

一般に、式(1)において、流速 u, v の自由度しかもたない中間節点での圧力 p に関する行および列は、削除されるが、ここでは、 u, v 2自由度しかない節点も3自由度として取り扱い、この節点の圧力 p に関する自由度に関して、対角値を1、それに関する行および列の要素の値をゼロとし、計算上、1自由度を無視する方法をとった。

これは、応力解析用プログラムでは、全節点同一自由度として取り扱っているのだから、このような表現にすることにより、応力解析プログラムを大きく変更せず利用できるからである。

3. 対角要素の非ゼロ化

(1) 非ゼロ化を必要とする対角要素

ピボット選択を行わないで、連立一次方程式を安定に解くには、行が消去または分解されるとき、この行の対角要素がゼロにならないようにする必要がある。このとき、ゼロとなる可能性をもつ対角要素は、始めゼロの値をもつ対角要素である。

流速2次、圧力1次の内挿関数を用いた流体有限要素法では、始めゼロの値をもつ対角要素は、頂点節点の圧力に関する対角要素である。ただし、この節点の圧力が与えられている場合には、この対角要素の値は、1にされ、これに関する行と列の値は、ゼロとされるか、同等の処理がなされる。また、中間節点には圧力の自由度がないので、中間節点に関する対角要素がゼロとなること

はない。

結局、非ゼロ化を必要とする対角要素は、圧力が与えられていない頂点節点に関する対角要素のみである。

(2) 対角要素の非ゼロ化と要素の結合状態⁵⁾

対角要素の非ゼロ化は、ガウスの消去過程から次のように示される。

いま、次の連立一次方程式があると、

$$[C]\{X\} = \{y\} \dots\dots\dots (15)$$

$$C_{ii} = C_{ii}^* - C_{is} \cdot C_{si} / C_{ss} \quad (s < i) \dots\dots\dots (16)$$

と計算される。 $[C]$ が対称のときは、 $C_{is} = C_{si}$ である。 C_{ii}^* は、対角要素 C_{ii} に寄与 ($-C_{is} \cdot C_{si} / C_{ss}$) が加えられる前の C_{ii} の値とする。

ここで、 i を頂点節点とすると、 $[K_{ii}]$ の圧力に関する対角要素 k_{33} は、始めゼロである。そこで、この要素を非ゼロ化するには、 $[K_{ii}]$ と $[K_{si}]$ ($s < i$) の k_{13} と k_{23} のうちどれか一つがゼロでなければよい。図-1に、これを示す。 $[K_{ii}]$ は、必ず存在するが、 $[K_{si}]$ がどのような要素の結合状態においても確実に存在するためには、節点 i より小さい節点番号をもつ節点 s と節点 i が図-2のように結合していなければならない。

(3) 一般的な寄与の性質

$[K_{ii}]$ と $[K_{si}]$ が存在しても、それらの k_{13}, k_{23} が

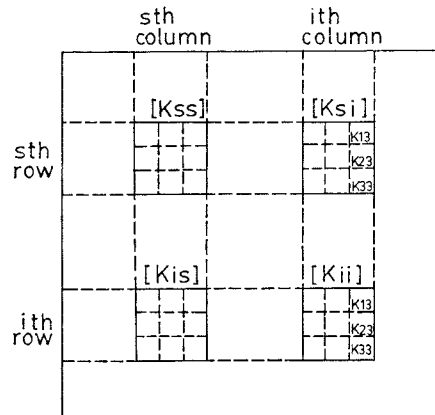


図-1 $[K_{ii}]$ の k_{33} に対する $[K_{ii}]$ と $[K_{si}]$ の寄与

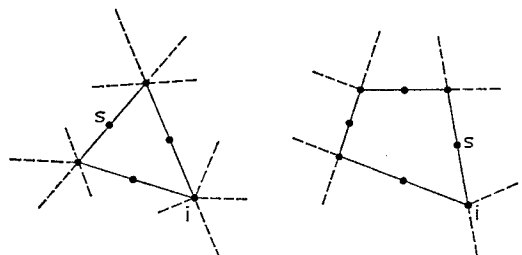


図-2 $[K_{si}]$ が存在するための節点 i と s の関係

ゼロとなる場合がある。ここでは、要素の種類と要素の結合状態に関係しない一般的な場合について述べる。

a) 境界条件の導入に伴う寄与の変化

いま、節点 i または s の x 方向流速 u が与えられていると $[K_{ii}]$ または $[K_{ss}]$ の k_{11} は 1 となり、これに関する行の他の要素は、すべてゼロとされるか同等の処理がなされる。これは、応力解析での既知変位導入と同じである。この場合において、 $[K_{ii}]$ または $[K_{si}]$ の k_{13} は、ゼロとなる。同様に、 y 方向流速 v が与えられていると、 $[K_{ii}]$ または $[K_{si}]$ の k_{23} は、ゼロとなる。

b) 座標系のとり方による寄与の変化

いま、ある座標系における節点 s と節点 i の関係を示すサブマトリックスを $[K_{si}]$ とする。この座標系より ϕ 回転した座標系でのこのサブマトリックスを $[K_{si}^*]$ とすると、これらのサブマトリックスの関係は、次のように示される。

$$[K_{si}^*] = [T]^T [K_{si}] [T] \dots\dots\dots (17)$$

ここで、座標変換マトリックス $[T]$ は、流速に関して、2次元の座標変換を行い、圧力に関して、方向性がないので変換を行わないことから、次のように示される。

$$[T] = \begin{bmatrix} T_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

ただし、

$$[T_2] = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

である。

式 (17), (18), (19) および $k_{11} = k_{22}$ より、 $[K_{si}]$ と $[K_{si}^*]$ の要素について、次の関係が成り立つ。

$$k_{11}^* = k_{22}^* = k_{11} = k_{22} \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{Bmatrix} k_{13}^* \\ k_{23}^* \end{Bmatrix} = [T_2]^T \begin{Bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

$$C = (k_{13}^*)^2 + (k_{23}^*)^2 = k_{13}^2 + k_{23}^2 \dots\dots\dots (22)$$

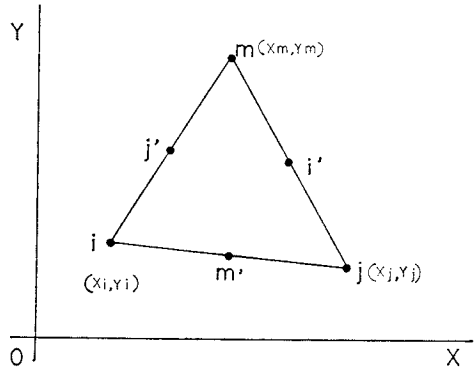
式 (20) と式 (22) は、 k_{11} , k_{22} , $C = k_{13}^2 + k_{23}^2$ が座標系に無関係な不変量であることを示している。

そこで、 C を寄与と定義する。以後、寄与とは、 C を指すものとする。

以上のことから、 $[K_{si}]$ の k_{13} と k_{23} は、 $C = k_{13}^2 + k_{23}^2 \neq 0$ であれば、同時にゼロになることはないが、座標系のとり方により一方がゼロ、他方が \sqrt{C} になる座標系が必ず存在するといえる。

以上をまとめると、既知量の導入と座標系のとり方により、 $[K_{si}]$ ($s \leq i$) が存在しても、寄与 C は、ゼロとなることがあるといえる。具体的には、次の場合である。

a) 寄与を与える節点の流速 u, v がともに与えられている場合。



図—3 三角形要素の頂点節点と中間節点の位置

b) 寄与を与える節点の流速 u が与えられていて、 $k_{23} = 0$ となる座標系がとられている場合、または流速 v が与えられていて、 $k_{13} = 0$ となる座標系がとられている場合。

4. 三角形要素と寄与の性質

三角形要素では、次の内挿関数が用いられる。ここで、 i, j, m は、頂点節点であり、 i', j', m' は、 i, j, m の対面の中間節点とする。これを 図—3 に示す。

$$N_i = L_i^2 - L_j(L_j + L_m) \dots\dots\dots (23)$$

$$N_{i'} = 4 L_j L_m \dots\dots\dots (24)$$

$$N_i^{\cdot\phi} = L_i \dots\dots\dots (25)$$

$$N_{i'}^{\cdot\phi} = 0 \dots\dots\dots (26)$$

ただし、 L_i, L_j, L_m は、面積座標で、次のように表わされる。

$$L_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2A \dots\dots\dots (27)$$

などである。

ただし、 A は、三角形の面積で、

$$a_i = x_j x_m - x_m y_j, \quad b_i = y_j - y_m, \quad c_i = x_m - x_j \dots\dots\dots (28)$$

などである。

また、 $[K_{i'i'}]$ の k_{33} を 1 とする。

以上の内挿関数を式 (9)~(14) に代入して、一つの要素での $[K_{si}]$ ($s = i, j, m, i', j', m'$) について求めると次のようになる。

s が頂点節点 (i, j, m) の場合は、次のようになる。

$$[K_{ii}] = \begin{bmatrix} \mu(b_i^2 + c_i^2)/4A & 0 & -b_i/6 \\ 0 & \mu(b_i^2 + c_i^2)/4A & -c_i/6 \\ -b_i/6 & -c_i/6 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

$$[K_{ji}] = \begin{bmatrix} -\mu(b_j b_i + c_j c_i)/12A & 0 & 0 \\ 0 & -\mu(b_j b_i + c_j c_i)/12A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (30)$$

$$[K_{mi}] = \begin{bmatrix} -\mu(b_m b_i + c_m c_i)/12 \Delta & 0 & 0 \\ 0 & -\mu(b_m b_i + c_m c_i)/12 \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots (31)$$

s が中間節点 (i', j', m') の場合は、次のようになる。

$$[K_{i'i}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_i/6 \\ 0 & 0 & c_i/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots (32)$$

$$[K_{j'i}] = \begin{bmatrix} \mu(b_m b_i + c_m c_i)/3 \Delta & 0 & -(b_m - b_j)/6 \\ 0 & \mu(b_m b_i + c_m c_i)/3 \Delta & -(c_m - c_j)/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots (33)$$

$$[K_{m'i}] = \begin{bmatrix} \mu(b_j b_i + c_j c_i)/3 \Delta & 0 & -(b_j - b_m)/6 \\ 0 & \mu(b_j b_i + c_j c_i)/3 \Delta & -(c_j - c_m)/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots (34)$$

以上に示した式は、一つの要素について示したものであるが、一般に、複数の要素が結合しているの、寄与については、このような状態について考えなければならない。

ここで、節点 i は、寄与を受ける節点とし、節点 s は、寄与を与える節点とする。よって、節点番号については、s < i の関係にあり、節点 i は、圧力が与えられていないものとする。

(1) 節点 i が内部にある場合

この場合を 図-4 に示す。

a) [K_{ii}] からの寄与

[K_{ii}] は、要素 (1)~(4) の [K_{ii}]^(e) を加え合わせるの、次のようになる。

$$[K_{ii}] = [K_{ii}]^{(1)} + [K_{ii}]^{(2)} + [K_{ii}]^{(3)} + [K_{ii}]^{(4)} \dots (35)$$

そして、[K_{ii}] の k₁₃, k₂₃ の値は、式 (29) から次のようになる。

$$k_{13} = -(b_i^{(1)} + b_i^{(2)} + b_i^{(3)} + b_i^{(4)})/6 = y_{s1} - y_{s4} + y_{s2} - y_{s1} + y_{s3} - y_{s2} + y_{s4} - y_{s3} = 0 \dots (36)$$

$$k_{23} = -(c_i^{(1)} + c_i^{(2)} + c_i^{(3)} + c_i^{(4)})/6 = x_{s4} - x_{s1} + x_{s1} - x_{s2} + x_{s2} - x_{s3} + x_{s3} - x_{s4} = 0 \dots (37)$$

ただし、b_i^(e), c_i^(e) は、要素 (e) の b_i, c_i を示す。

式 (36), (37) は、節点 i が内部にあるとき、節点 i を共有する要素数が任意であっても成り立つことを示している。このため、節点 i が内部にあるときは、寄与 C は、常にゼロである。

b) 頂点節点からの寄与

[K_{s*i*}] (s = s₁, s₂, s₃, s₄) は、
[K_{s*i*}] = [K_{s*i*}]⁽¹⁾ + [K_{s*i*}]⁽²⁾ (38)

などで示される。しかし、式 (30), (31) から、[K_{s*i*}] の k₁₃, k₂₃ は、常にゼロとなり寄与はゼロである。

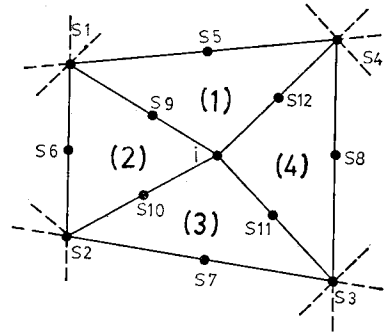


図-4 節点 i と寄与する節点 s の関係

c) 節点 i の対面にある中間節点からの寄与

[K_{s*i*}] (s = s₅, s₆, s₇, s₈) は、
[K_{s*i*}] = [K_{s*i*}]⁽¹⁾ (39)

などで示される。式 (32) より、次のように示される。

$$k_{13} = b_i^{(1)}/6 = (y_{s4} - y_{s1})/6 \dots (40)$$

$$k_{23} = c_i^{(1)}/6 = (x_{s1} - x_{s4})/6 \dots (41)$$

寄与 C は、次のようになる。

$$C = k_{13}^2 + k_{23}^2 = (l_{s1s4})^2/36 \dots (42)$$

ただし、l_{s1s4} は、s₁ と s₄ を結ぶ線分の長さとする。

これを一般的に示すと、次式のようになる。

$$C = (\text{節点 s の両端の頂点間の距離})^2/36 \dots (43)$$

寄与 C は、前述のように座標系に無関係な不変量となっており、また式 (40), (41) から、この線分が x 軸に平行となる座標系では、k₁₃ = 0, k₂₃ = √C, y 軸に平行な場合は、k₁₃ = √C, k₂₃ = 0 となっており、前述のように k₁₃ か k₂₃ どちらかがゼロとなる座標系が存在する。

d) 節点 i の隣りの中間節点からの寄与

[K_{s*i*}] (s = s₉, s₁₀, s₁₁, s₁₂) と寄与 C は、同様に、
[K_{s*i*}] = [K_{s*i*}]⁽¹⁾ + [K_{s*i*}]⁽²⁾ (44)

$$C = (l_{s2s4})^2/36 \dots (45)$$

などとなり、一般的に、寄与 C は、次のようになる。

$$C = \left(\frac{\text{節点 s の対面にある 2 頂点間の距離}}{\text{節点間の距離}} \right)^2 / 36 \dots (46)$$

(2) 節点 i が境界にある場合

ここでは、図-4 の要素 (4) が無い場合を考える。

a) [K_{ii}] からの寄与

寄与 C は、式 (36), (37) の b_i⁽⁴⁾, c_i⁽⁴⁾ を除いた式から計算され、次のように表わされる。

$$C = (l_{s3s4})^2/36 \dots (47)$$

一般的に、次のように表わされる。

$$C = \left(\frac{\text{節点 i の隣りで、境界上にある頂点節点間の距離}}{\text{節点間の距離}} \right)^2 / 36 \dots (48)$$

b) 境界上にある節点 i の隣りの中間節点からの寄与

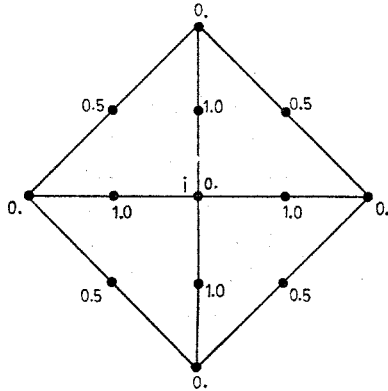


図-5 節点*i*に対する各節点の寄与の比

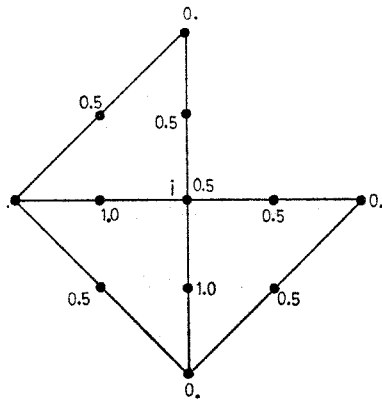


図-6 節点*i*に対する各節点の寄与の比

$[K_{s_i}]$ ($s=s_{11}, s_{12}$) と寄与 C は,
 $[K_{s_{12}i}] = [K_{s_{12i}}]^{(1)}$ (49)
 $C = (l_{iss})^2 / 9$ (50)

などとなる。

一般的に、寄与 C は、次のように表わされる。

$C = \left(\frac{\text{節点 } s \text{ を有する要素において、節点 } i \text{ と } i \text{ の対面にある中間節点の距離}}{9} \right)^2 \dots (51)$

e) 境界上にある、節点*i*の隣りの頂点からの寄与 $[K_{s_i}]$ ($s=s_4, s_5$) の k_{13}, k_{23} は、式 (30), (31) により常にゼロであり、寄与 C は、ゼロである。

以上の結果を用いて、一例として 図-5、図-6 で示す要素の結合状態での節点*i*に対する各節点の寄与を求めた。図中の各節点における数値は、各節点の寄与の大きさを、最大の寄与で割って比率で示してある。

以上の結果から、次のことがいえる。

- a) 頂点節点からの寄与は、ゼロである。
- b) 節点*i*が内部にあるとき、節点*i*からの寄与はゼロである。
- c) 節点*i*が境界にあるとき、節点*i*からの寄与は、存在する。

d) 中間節点からの寄与において、節点*i*の隣りで、しかも内部にある中間節点の寄与が大きい。

5. 四辺形要素と寄与の性質

この要素として、セレンディピティ要素を用いた場合について述べる。

三角形要素では、要素の影響マトリックスを式で示すことができたが、四辺形要素では、複雑であり数値計算により示すことにする。

図-7、図-8 は、正方形、図-9、図-10 は、四辺形要素の場合であり、それぞれについて、寄与される節点*i*が内部にある場合と境界にある場合の節点*i*に対する寄与を計算した。図中の各節点の数値は、節点*i*に対する各節点の寄与を最大の寄与で割って比率で表示してある。

この計算結果から次のことがいえる。

a) 頂点節点からの寄与は、存在するが、中間節点からの寄与がはるかに大きい。

b) 節点*i*が内部にあるとき、節点*i*からの寄与は、ゼロである。

c) 節点*i*が境界上にあるとき、節点*i*からの寄与は、存在する。

d) 中間節点からの寄与の中では、節点*i*の隣りで、しかも内部にある中間節点から

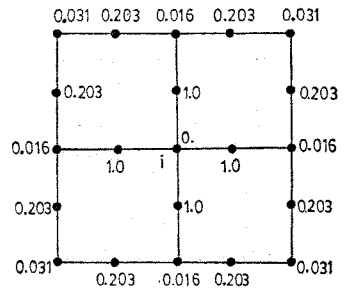


図-7 節点*i*に対する各節点の寄与の比

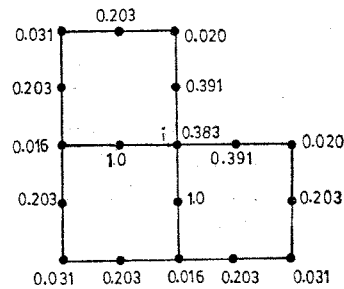


図-8 節点*i*に対する各節点の寄与の比

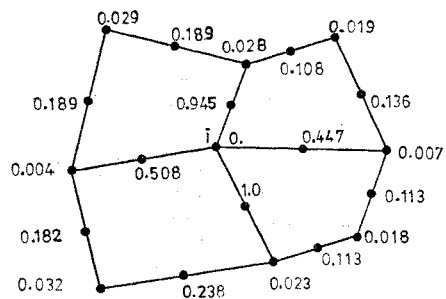


図-9 節点*i*に対する各節点の寄与の比

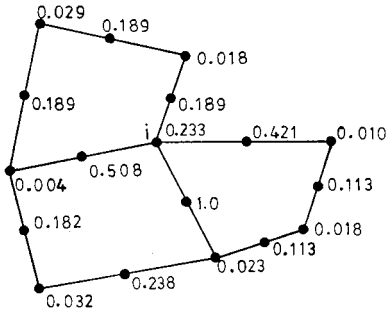


図-10 節点*i*に対する各節点の寄与の比

の寄与が大きい。

6. 節点番号付の条件

以上の結果から、どのように寄与が与えられて、対角値の非ゼロ化がなされるか明らかとなった。しかし、これらの非ゼロ化の理論を、計算対象ごとにあてはめ、詳しく調べることは、能率的でないと思われる。そこで、計算対象により変わらず、計算精度も悪くならなくて、しかも利用しやすい節点番号付の条件を、改めて定めることが望ましい。

そこで、前述の非ゼロ化の理論を次の項目で示すように取り扱い、節点番号付の条件を次のように定めた。

a) 寄与する節点の流速 u または v が与えられている場合は、座標系のとり方により寄与がゼロか、非常に小さくなることがあるので、寄与は、ゼロであるとして取り扱う。

b) 境界上にあり流速 u, v とも与えられていない頂点節点は、他の節点からの寄与を必要としないが、図-11のように、節点 i が内部にある場合に近いと、他の節点からの寄与がなければ計算精度が悪くなること、および、他節点から寄与を与えるように、節点番号を付け

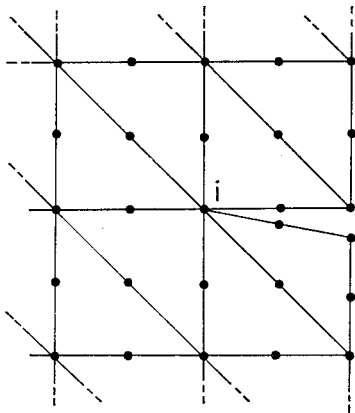


図-11 節点*i*が境界にあっても、節点*i*からの寄与のみでは計算精度が悪くなる例

ることは容易であるので、境界上にある頂点節点も内部の頂点節点と同等に取り扱う。

c) 四辺形要素に関して、頂点節点からの寄与は小さく、この寄与だけでは、計算精度が悪くなるので、頂点節点からの寄与は、ゼロとして取り扱う。

このような考え方に基づくと、三角形要素、四辺形要素に対し、節点番号付の条件は、次のようになる。

「圧力が与えられていないすべての頂点節点について、次のことが成り立たなければならない。圧力が与えられていない頂点節点の節点番号を i とし、この節点を頂点節点にもつ要素を E_1, E_2, \dots, E_n とする。これらの要素 E_1, E_2, \dots, E_n の辺上にある中間節点で、しかも流速 u と v とも与えられていない節点の番号をすべて書き出し、それらのうち最も小さい番号を s とすると、 $s < i$ でなければならない」

なお、中間節点と圧力が与えられている頂点節点については、この条件を満足する必要がない。また、この条件を満足しなくても、解ける場合がある。

7. 本手法による計算例

(1) 計算に用いたプログラム

計算に用いたプログラムの連立一次方程式の解法は、三角分解法である。係数行列の記憶法は、係数行列の非ゼロ要素に三角分解中に生じる非ゼロ要素を加えたすべての非ゼロ要素の記憶場所を一次元にとる手法^{9), 8)}、すなわちプロファイル法によった。

本プログラムは、三角分解を節点番号順に行い、ピボット選択操作を行わないプログラムである。

(2) 粘性流体解析

以上の理論を確かめるため、山田が行った例題について計算した。計算結果は、山田のものと同じであった。

この例題の解析領域の寸法は、縦、横とも 2 cm である。境界条件は、図-12~図-16 において、境界 AB と DC の圧力がそれぞれ $54 \text{ g/s}^2\text{cm}$, $0 \text{ g/s}^2\text{cm}$, 境界 AD と BC の横方向流速がそれぞれ 1.0 cm/s , 0.5 cm/s , 縦方向流速がともに 0 cm/s と指定されている。

この計算に用いた節点番号付は、前述の条件を満足するもの a) と b)、満足しないが解けるもの c) の 3 種類とした。

a) バンド幅が最少になる最適節点番号付をしたもの。

これを図-12 と 図-13 に示す。なお、() で示した節点番号付は、境界 AB の流速 u と v が既知で、圧力が未知の境界条件のとき、元の節点番号付では、条

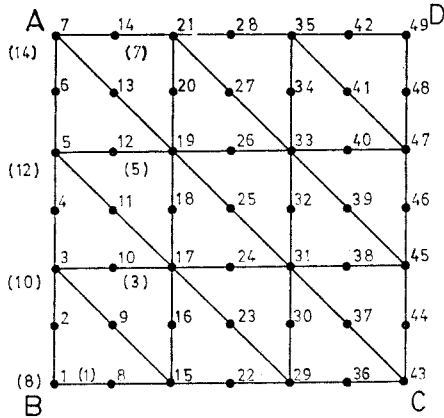


図-12 最適節点番号付によるもの

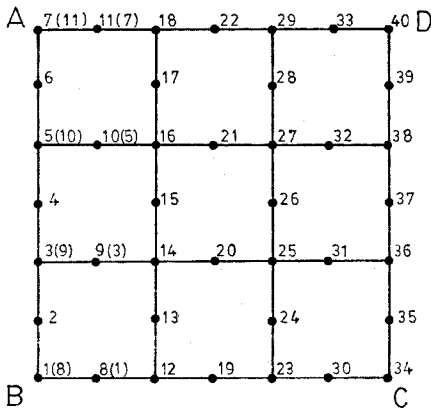


図-13 最適節点番号付によるもの

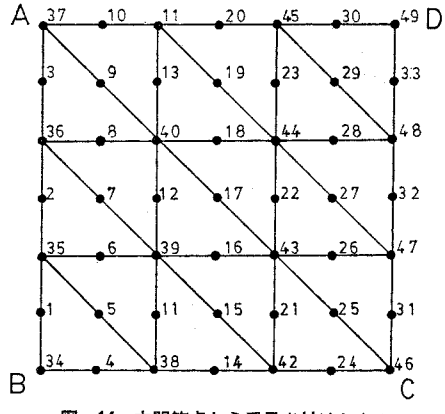


図-14 中間節点から番号を付けたもの

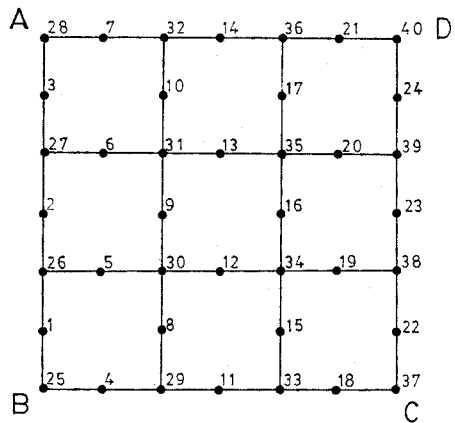


図-15 中間節点から節点番号を付けたもの

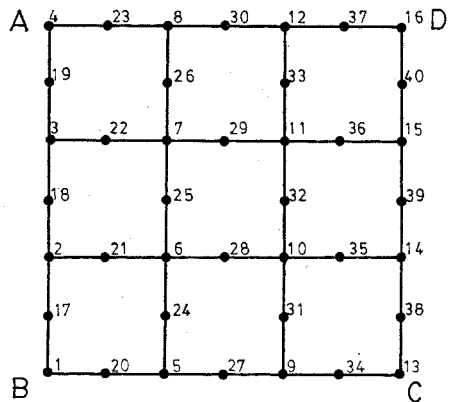


図-16 頂点節点から節点番号を付けたもの

件に合わないので解けないため、境界上の頂点節点と内部の中間節点との番号を入れかえたものである。このようにすると、バンド幅を変えることなく、条件を満足させることができる。

b) はじめ中間節点に番号を付け、次に頂点節点に番号を付けたもの。これを 図-14、図-15 に示す。

この節点番号付による計算は、圧力項に関する行を最後に配置して解く方法によるものと、ほぼ同等となると思われる。というのは、すべての頂点節点が、中間節点からの寄与のすべてを受けることとなり、他方、三角形要素、四辺形要素とも中間節点からの寄与が支配的であるからである。この節点番号付によると、バンド幅は、非常に大きくなってしまふ。このため、スパースマトリックス法で解いても計算時間は、多くなる。

c) はじめ頂点節点に番号を付け、次に中間節点に番号を付けたもの。これを 図-16 に示す。

この節点番号付による計算は、すべての頂点節点が中間節点からの寄与をまったく受けず、バンド幅も大きくなるので、この節点番号付は、最も悪い節点番号付であ

る。三角形要素では、この節点番号付では、解けないので、四辺形要素のみとする。

これらの節点番号付法の違いによる計算結果を評価するために、得られた結果を影響マトリックスに乘じ、その結果と与えられた右辺の値の差をとり、その差の絶対値の最大値を調べた。a) と b) の節点番号付での、こ

の値は、 $0.18 \times 10^{-5} \sim 0.27 \times 10^{-5}$ の範囲であった。なお、最も精度のよい節点番号付は、a) の方法での () で示した節点番号付法であったが、誤差の値から考えて、これらの節点番号付による計算精度は、大差ないと考えられる。他方、c) の節点番号付での、この値は、 0.12×10^{-3} であり、a) と b) の方法に比較して、2桁精度が悪い。これは寄与が小さいことによると考えられる。

さらに、計算で得られた各節点の流速と圧力の値を、最も誤差の小さいものを基準として、比較した結果、a), b) の場合は、完全に6桁まで一致し、 ± 1 を許すと7桁まで一致した。c) の場合は、完全に4桁まで一致し、 ± 1 を許すと5桁まで一致した。なお、計算機の有効桁数は、8桁である。以上の結果から、本方法により正しく計算されることが明らかとなり、現在、実用に供している⁹⁾。

次に、流体有限要素法定式化において、圧力の項を部分積分しないで、連続の式を部分積分すると、やはり、対称の影響マトリックスが得られる。このような定式化において、a) の節点番号付により計算をした。この結果、同程度の精度で解が得られた。

(3) 慣性項を考慮した粘性流体解析

慣性項を考慮した非圧縮性流れの場合は、 $[K_{ij}]$ の対角値 k_{11} , k_{22} が⁵⁾、次のように表わされ¹⁾、繰り返し計算により求められる。

$$\int_{\rho^{(e)}} \left[\mu \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) + \rho u_n^{(e)} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} + \rho v_n^{(e)} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy$$

.....(52)

ここで、 u_n , v_n は前回の計算で得られた流速である。この場合も寄与の問題は、前述と同じであるので、同じ方法で解くことができる。これについても、山田⁹⁾ が行った列題について計算したが、山田のもの一致した。

ただし、この場合は、影響マトリックスが非対称となり、(1) で述べたプログラムそのままでは、解けないので、非対称を解けるようにプログラムを修正して利用した。この修正方法は、応力解析有限要素法で摩擦を境界にもつ場合に非対称マトリックスが現われる^{7), 8)} が、これと同じ方法である。

8. 結 論

有限要素法解析において、つり合いの微分方程式に、

ある変数を追加し、元の微分方程式と等価な微分方程式を求め、この方程式により定式化を行うと、解くべき連立一次方程式の対角値にゼロを含むことがある。このような場合には、連立一次方程式を解くとき、ピボット選択操作を必要とする。

本論文では、流速に関して2次、圧力に関して1次の内挿関数を用いた流体解析を一例として、節点間の隣接関係と非ゼロ化要素の値との関係を明らかにした。

この結果から、ピボット選択操作を必要としない“条件付節点番号付法”を提案し、この条件を示した。

この方法は、いわゆる消去法を基礎とするような連立一次方程式解法をそのまま利用できる利点をもっている。

この“条件付節点番号付法”の節点番号付の条件は、個々の問題により異なるが、本論文において行った流体解析での条件を求めた過程と同じ過程を行うことにより、個々の問題に対してもこの条件を求めることができると思われる。

さらに、ピボット選択を行うプログラムを利用する場合においても、この節点番号付の条件により節点番号付を行っておくと、少ない計算で安定なピボットをみつかることができると思われる。

参 考 文 献

- 1) Kenneth H. Huebner (山田嘉昭訳): 有限要素法, 科学技術出版社, pp. 343~362, 1978年.
- 2) 山田嘉昭・大坪 敬・伊藤邦憲: 非圧縮定常粘性流への有限要素法への応用, 日本鋼構造協会第7回研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集, pp. 597~604, 1973年6月.
- 3) Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method, chap. 3, McGraw-Hill, 1977.
- 4) Hood, P.: Frontal solution program for unsymmetric matrices, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10, pp. 379~399, 1976.
- 5) 白石成人・谷口健男: マトリックス構造解析に対するグラフ理論による一考察, 土木学会論文報告集, No. 294, pp. 15~24, 1980年2月.
- 6) 岩崎峯夫: 有限要素法における剛性マトリックス組立の有効なプログラム法, 土木学会, 第28回年次学術講演会講演概要, pp. 84~85, 1973年10月.
- 7) 岩崎峯夫: 有限要素法における摩擦導入の一方, 土木学会, 第20回橋梁構造工学発表会概要, pp. 59~66, 1973年12月.
- 8) 岩崎峯夫: 有限要素法による土の破壊機構の研究について, 昭和48年度港湾技術研究所講演会講演集, pp. 185~208, 1973年12月.
- 9) 秋園純一・岩崎峯夫: 紀淡丸のゴミ回収装置の実船試験, 港湾技研資料, No. 343, p. 21, 1980年6月.

(1981.6.9・受付)