土木学会論文報告集
第 324 号・1982 年 8 月
【論　　文】

安全性指標に関する若干の考察

SOME CONSIDERATIONS ON SAFETY INDEX

長　　　　　尚*
By Takashi CHOU

1. まえがき

安全性指標（safety index，あるいは信頼性指標（reliability index）ともよばれる）の歴史はかなり古い．平均値と標準偏差を用いて安全率を評価するという考え方は，1920 年代に Mayer によって提案され，その後 1961 年に Basler によってこの考え方に基づく試みがなされたといわれている[1),2)]．しかしこれらはあまり注目を受けず，今日のように安全性指標が構造物の安全性を評価する尺度として使用されるようになったのは，1969 年の Cornell による 2 次モーメント法（second-moment method）の提案からである[3)]．これは，安全性に影響を与える確率変数の統計的データの不足あるいは確率統計的処理の困難さ，および設計基準への導入と計算の便宜等を考慮して，確率変数もしくは破壊基準関数の分布の形に関係のない平均値と分散（2 次までのモーメント）のみを用いて次のように定義された．「破壊基準関数の変動係数の逆数を安全性の尺度としての安全性指標 β とする．」以下この指標を β_C と書く．

その後この β_C には，数学的に等価であっても破壊基準関数の表現のし方によって異なった値となる，式の表現に関する不変性の欠如（lack of invariance）があることが指摘された[4)]．そこで，この不変性（Veneziano[5)] によって不変性は，Dimension invariance, Nuisance invariance, Failure criterion invariance, Distribution invariance の 4 つに分類されているが，ここではこのうちの Nuisance invariance および Failure criterion invariance を指す．なお本文ではこの不変性を「式の表現に関する不変性」とよぶことにする）を有する安全性指標が Hasofer/Lind によって次のように定義された[6)]．「互いに相関のない個々の確率変数を，後述の式 (35) もしくは (36) によって正規化変換し，それを用いて表現された破壊基準限界曲面への原点からの距離が安全性指標 β である．」以下この指標を β_{HL} と書く．

以上の安全性指標は個々の確率変数の確率分布の形を意識しないで定義されたものであるが，これらの確率分布の形を考慮に入れた安全性指標が必要なこともある．そのような安全性指標の提案が，Rackwitz/Fießler[7)] および Lind[8)] によってなされている．これらはいずれも「個々の確率変数を何らかの方法で標準正規変数に変換して，破壊基準関数を標準化空間で表現したとき，原点からのその限界曲面への距離が安全性指標 β である．」としたものである．以下この指標を全確率分布安全性指標（full-distribution safety index）とよび β_F と書く．

本文の目的は，全確率分布安全性指標 β_F のもつ意味を明確に示し，簡単で有効な一計算法を述べるとともに，Cornell の提案した β_C および Hasofer/Lind の提案した β_{HL} の性質について β_F と関連させて説明し，若干の計算例によって考察を加えることにある．

以下本文においては，次に示すような破壊基準で表わされる，単一の破壊モードを対象とする．

$$Z=g(\boldsymbol{x})\leq 0 \quad\cdots\cdots(1)$$

ここに，Z は安全性の余裕（safety margin），$g(\cdot)$ は破壊基準関数（failure function），および $\boldsymbol{x}$ は安全性に影響を与える確率変数で次式のように定義する．

$$\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)^T \quad\cdots\cdots(2)$$

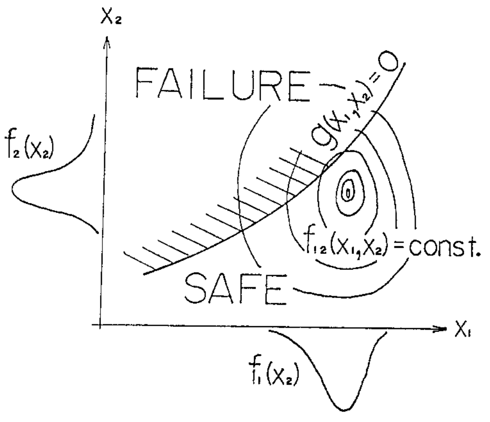
また，便宜上各確率変数は互いに相関はないものとする．

2. 全確率分布安全性指標 β_F

(1) 基　本

式 (1) で表わされる破壊基準に関する破壊確率 p_f は，一般に次式を計算することにより得られる．

* 正会員　工博　信州大学教授　工学部



図—1 x-空間の例

$$p_f=\int\cdots\cdots\cdots\int_{g(\boldsymbol{x})\leq 0} f_{1n}(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n \quad \cdots\cdots(3)$$

ここに，$f_{1n}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ の結合確率密度関数である．変数が2個の場合を示した **図—1** で説明すると，この場合の破壊確率 p_f は $g(\boldsymbol{x})\leq 0$ の領域（図で斜線を付した領域）の結合確率密度関数 $f_{12}(x_1, x_2)$ の体積に相当する．

さて，標準正規変数の累積分布関数を $\phi(\cdot)$ とし，ある確率変数 x_i の累積分布関数を $F_i(x_i)$ とすれば，x_i は次式により標準正規変数 z_i で表現することができる．

$$x_i=F_i^{-1}[\phi(z_i)] \quad \cdots\cdots(4)$$

したがって，破壊確率 p_f は次式を計算することからも得られる．

$$p_f=\int\cdots\cdots\cdots\int_{\hat{g}(\boldsymbol{z})\leq 0} \varphi_{1n}(z_1,\cdots,z_n)dz_1\cdots dz_n \quad \cdots\cdots(5)$$

ここに，$\varphi_{1n}(\cdot)$ は標準正規変数

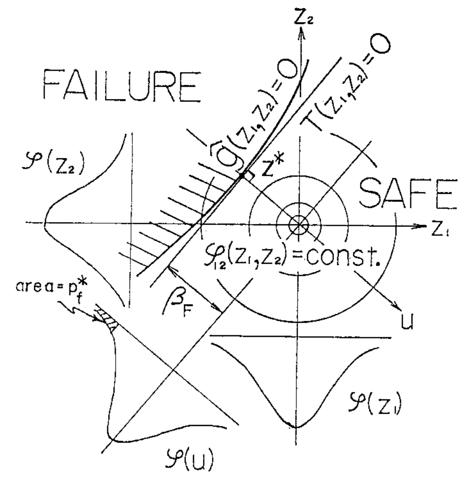
$$\boldsymbol{z}=(z_1,\cdots,z_n)^T \quad \cdots\cdots(6)$$

の結合確率密度関数，および

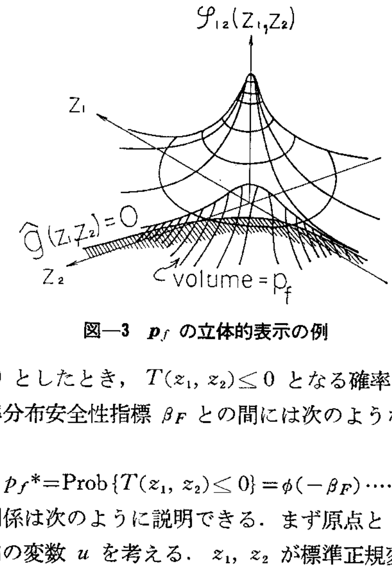
$$\hat{g}(\boldsymbol{z})=g\{F_1^{-1}[\phi(z_1)],\cdots,F_n^{-1}[\phi(z_n)]\} \quad \cdots\cdots(7)$$

である．**図—2** に変数が2個の場合について示してあり，この場合の結合確率密度関数 $\varphi_{12}(z_1, z_2)$ の等高線は原点を中心にした同心円となる．破壊確率 p_f は **図—1** の場合と同じように，$\hat{g}(z_1, z_2)\leq 0$ の領域の $\varphi_{12}(z_1, z_2)$ の体積である．その立体的模様が **図—3** に示してある．

さて **図—2** において，原点 $(z_1=z_2=0)$ から破壊限界曲線 $\hat{g}(z_1, z_2)=0$ に垂線を下ろすと，その長さが全確率分布安全性指標 β_F である．この垂線と破壊限界曲線との交点を $\boldsymbol{z}^*$ とし，この点での曲線との接線を $T(z_1, z_2)=0$ としたとき，$T(z_1, z_2)\leq 0$ となる確率 p_f^* と全確率分布安全性指標 β_F との間には次のような関係がある．



図—2 z-空間の例



図—3 p_f の立体的表示の例

$$p_f^*=\mathrm{Prob}\{T(z_1, z_2)\leq 0\}=\phi(-\beta_F) \quad \cdots\cdots(8)$$

この関係は次のように説明できる．まず原点と $\boldsymbol{z}^*$ を結ぶ方向の変数 u を考える．z_1, z_2 が標準正規変数でかつその結合確率密度関数 $\varphi_{12}(z_1, z_2)$ の等高線は同心円であるから，この変数 u も標準正規変数であることになり，次式が成立する．

$$\mathrm{Prob}\{u\leq -\beta_F\}=\phi(-\beta_F) \quad \cdots\cdots(9)$$

一方，$u\leq -\beta_F$ と $T(z_1, z_2)\leq 0$ とは同じ意味であるから，式 (8) が誘導される．つまり $T(z_1, z_2)\leq 0$ の領域の結合確率密度関数 $\varphi_{12}(z_1, z_2)$ の体積は，$u\leq -\beta_F$ の領域の標準正規確率密度関数 $\varphi(u)$ の面積に一致する．

以上のことは変数の数が2個に限らず多数の場合にも成立することは容易に類推できる．したがって式 (8) を一般化して表現すると次のようになる．

$$p_f^*=\mathrm{Prob}\{T(\boldsymbol{z})\leq 0\}=\phi(-\beta_F) \quad \cdots\cdots(10)$$

ここに，$T(\boldsymbol{z})=0$ は原点から破壊限界曲面へ下ろした垂線と曲面との交点 $\boldsymbol{z}^*$ における接平面の式である．

Hasofer が指摘した[9]ように，式 (3) もしくは (5) で計算される真の破壊確率 p_f と全確率分布安全性指標 β_F との間には，理論的には次のような関係がある．

$$p_f \leqq 1-\chi_n{}^2(\beta_F{}^2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

ここに，$\chi_n{}^2(\cdot)$ は自由度 n のカイ2乗分布関数である．しかし通常破壊基準関数 $g(\boldsymbol{x})$ は確率変数 $\boldsymbol{x}$ の単調関数もしくはそれに近い性質をもっている（一般に強度を構成している確率変数はその値が増加した方が，荷重は減少した方が，それぞれ安全性の余裕 Z は増える）ので次式が成立する．

$$p_f \fallingdotseq \mathrm{Prob}\{T(\boldsymbol{z}) \leq 0\} = p_f{}^* = \phi(-\beta_F) \cdots\cdots (12)$$

この式 (12) が成立することをもう少し詳しく説明する．p_f に対する式 (5) のように $p_f{}^*$ を表現すると次のようになる．

$$p_f{}^* = \underset{T(\boldsymbol{z}) \leq 0}{\int \cdots\cdots\cdots\cdots \int} \varphi_{1n}(z_1, \cdots, z_n)dz_1 \cdots dz_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

この式 (13) と式 (5) を比較すると，積分領域だけが異なっている．ところで β_F は原点から曲面 $\hat{g}(\boldsymbol{z})=0$ へ至る最短距離であるから，結合確率密度関数 $\varphi_{1n}(\boldsymbol{z})$ の値の一番大きい（原点に近いほど大きい）点 $\boldsymbol{z}^*$ を両積分領域で共通に含んでいる．さらに $g(\boldsymbol{x})$ が単調関数もしくはそれに近い関数であると，破壊限界曲面 $\hat{g}(\boldsymbol{z})=0$ は十分滑らかな曲面である．そのため積分領域で両者に違いが生じるのは，図―2，3 にもみられるように，$\varphi_{1n}(\boldsymbol{z})$ の値の小さい部分で，この違いは積分値にあまり影響を与えない．したがって式 (12) が成立する．

以上により，全確率分布安全性指標 β_F は，個々の確率変数がどんな確率分布であっても，

$$p_f \fallingdotseq \phi(-\beta_F) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

により，真の破壊確率 p_f と対応のつく安全性指標であるということができる．

この全確率分布安全性指標 β_F の不変性の問題に関しては次のことがいえる．まず破壊基準関数が数学的に等価であれば，その表現が異なる場合でも，標準化空間における原点からの距離は変わらないから，Nuisance invariance, Failure criterion invariance などの式の表現に関する不変性の欠如は存在しない．さらに前述したように構造設計問題においては，式 (11) はあまり意味がないから Dimension invariance の欠如は気にする必要はなく，また，Distribution invariance も式 (14) によりほぼ満たされている．つまりあらゆる意味で不変性の欠如という欠点は β_F には少ないといえる．

(2) 計 算 法

Rackwitz/Fießler は全確率分布安全性指標 β_F を求めるために，式 (7) の $\hat{g}(\boldsymbol{z})$ に対して，Hasofer/Lind の提案した反復計算法[6]を適用している．そして，式 (4) が陽な形で表現できないときは，次式を用いることを提案[7]している．

$$x_i = \mu_i{}' + \sigma_i{}' z_i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

ここに，

$$\mu_i{}' = x_i{}^* - \phi^{-1}[F_i(x_i{}^*)] \frac{\varphi\{\phi^{-1}[F_i(x_i{}^*)]\}}{f_i(x_i{}^*)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

$$\sigma_i{}' = \frac{\varphi\{\phi^{-1}[F_i(x_i{}^*)]\}}{f_i(x_i{}^*)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

$x_i{}^*$ は考えている点（最終的には $z_i{}^*$ に対応する），$f_i(\cdot)$ は確率変数 x_i の確率密度関数である．これは，図―4 に示すように，

$$f_i(x_i{}^*) = f_N(x_i{}^*),\ F_i(x_i{}^*) = F_N(x_i{}^*) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

となるように，近似的に正規分布 $f_N(\cdot)$，$F_N(\cdot)$ に置き換えたことになっている．

Lind は $\hat{g}(\boldsymbol{z})=0$ の曲面への原点からの最短距離である β_F を求めるための計算過程を，非線形計画問題として定式化[8]している．

これらの方法はいずれも式 (4) もしくは (15) によって標準化空間で表現された破壊基準関数 $\hat{g}(\boldsymbol{z})$ を用いているが，以下においては変換する前の $g(\boldsymbol{x})$ を直接用い，しかも式 (15) のような置き換えを必要としない，簡単で有効な計算法について述べる．

原点から曲面 $\hat{g}(\boldsymbol{z})=0$ へ下ろした垂線と，この曲面との交点 $\boldsymbol{z}^*$ を求める反復公式および安全性指標 β_{HL} を求める公式は，Hasofer/Lind によって次のように示された．

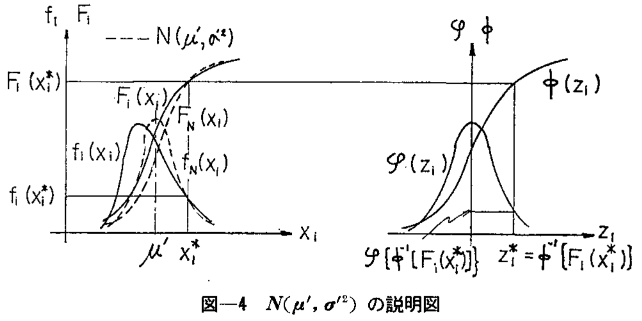
$$\boldsymbol{z}^{j+1} = \boldsymbol{\nabla}\hat{g}(\boldsymbol{z}^j)\left\{\frac{\boldsymbol{z}^{jT}\boldsymbol{\nabla}\hat{g}(\boldsymbol{z}^j) - \hat{g}(\boldsymbol{z}^j)}{\boldsymbol{\nabla}\hat{g}(\boldsymbol{z}^j)^T\boldsymbol{\nabla}\hat{g}(\boldsymbol{z}^j)}\right\} \cdots\cdots (19)$$

$$\beta_{HL} = \frac{\boldsymbol{z}^{*T}\boldsymbol{\nabla}\hat{g}(\boldsymbol{z}^*)}{\sqrt{\boldsymbol{\nabla}\hat{g}(\boldsymbol{z}^*)^T\boldsymbol{\nabla}\hat{g}(\boldsymbol{z}^*)}} \text{ または } \|\boldsymbol{z}^*\| \cdots (20)$$

ここに，j は反復回数，

$$\boldsymbol{\nabla}\hat{g} = \left(\frac{\partial\hat{g}}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial\hat{g}}{\partial z_n}\right)^T \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

および $\boldsymbol{z}^*$ は $\boldsymbol{z}^{j+1}$ の最終収束値である．



図―4 $N(\mu', \sigma'^2)$ の説明図

Rackwitz/Fießler が示しているように，全確率分布安全性指標 β_F は，これらの式 (19)，(20) をそのまま用いて求めることができる．しかしその場合には，$\hat{g}(\boldsymbol{z})$ への変換作業が必要なうえに，式 (4) が陽な形で表現できない場合には式 (15) のような置き換えをしなければならない．そこで変換する前の元のままの破壊基準関数 $g(\boldsymbol{x})$ を用いて，そのような作業が必要でない方法[10]について考えてみよう．

式 (4) によってある確率変数 x_i を標準正規変数 z_i で表現するには，次式がその基礎となっている．

$$\phi(z_i)=F_i(x_i) \qquad (22)$$

この式 (22) の両辺を z_i で微分すると次の式を得る．

$$\varphi(z_i)=f_i(x_i)\frac{dx_i}{dz_i} \qquad (23)$$

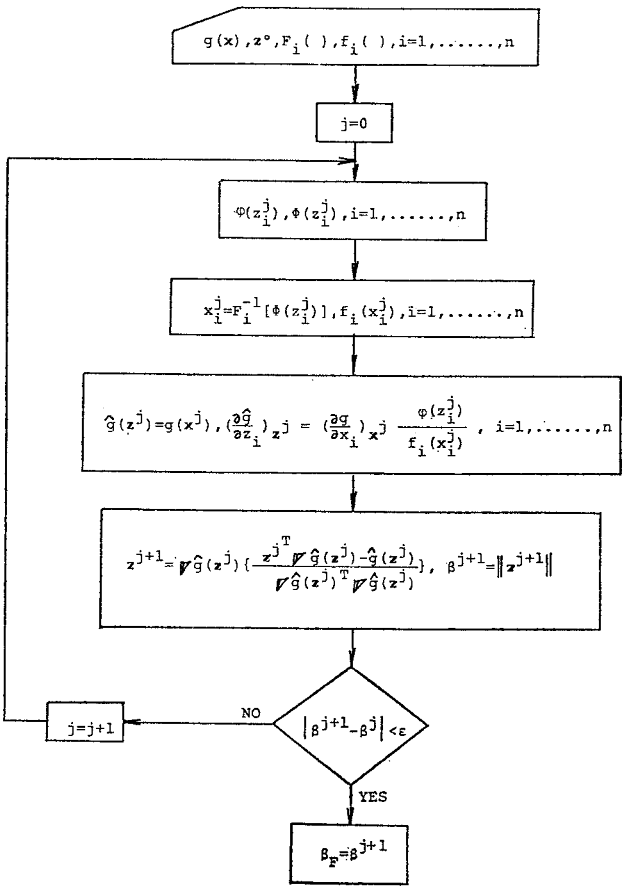
この式 (22) より次式が成立する．

$$\frac{dx_i}{dz_i}=\frac{\varphi(z_i)}{f_i(x_i)} \qquad (24)$$

一方次のような関係がある．

$$\frac{\partial\hat{g}}{\partial z_i}=\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dz_i} \qquad (25)$$

式 (24) を式 (25) に代入すると次式を得る．



図—5 計算手順の流れ図

$$\frac{\partial\hat{g}}{\partial z_i}=\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot\frac{\varphi(z_i)}{f_i(x_i)} \qquad (26)$$

この式 (26) を計算するためには z_i に対応する x_i を求める必要がある．これは式 (4) により関係がつくから，式 (26) は $\hat{g}(\boldsymbol{z})$ を用いなくて，$g(\boldsymbol{x})$ を用いることにより計算することができる．また

$$\hat{g}(\boldsymbol{z}^j)=g(\boldsymbol{x}^j) \qquad (27)$$

であるから，式 (19)，(20) の計算は $g(\boldsymbol{x})$ をそのまま用いて実行することができる．

したがって，全確率分布安全性指標 β_F は，**図—5** に示すような手順により，破壊基準関数を標準化空間で表現した $\hat{g}(\boldsymbol{z})$ を用いないで，元の破壊基準関数 $g(\boldsymbol{x})$ を直接用いることにより求めることができる．しかもある確率変数の確率密度関数が数値だけで与えられていても，式 (4)，(26) は評価できるので，$f_i(x_i)$ が関数式でなくて生の統計データのように数値で与えられているような場合でも，容易に β_F を求めることができる．そのため，統計データを無理に既存の確率分布にあてはめる必要は必ずしもないことになる．

この方法の Rackwitz/Fießler の方法との違いは，破壊基準関数の標準化空間への変換を必要としないということと，確率変数の確率分布を近似的な正規分布に換算しなくてよいという 2 点である．そのため，本法の方が計算量が少なくて済む．

なお Rackwitz/Fießler の近似的な正規分布に置換する方法を応用しても，標準化空間に変換しない，元空間の $g(\boldsymbol{x})$ を用いて β_F を計算することは可能である（彼ら自身はその方法について述べていないが）．すなわち，式 (15)，(17) より

$$\frac{dx_i}{dz_i}=\sigma_i'=\frac{\varphi(z_i)}{f_i(x_i)} \qquad (28)$$

という式 (24) と同様な関係が得られ，したがって本法と同じ計算手順で β_F を求めることができる．ただし Rackwitz/Fießler の方法は誘導の過程で式 (15)～(17) のような近似的な正規分布に換算するという考え方が入っているのに対して，本法ではそのような考え方の助けを借りていない．

この全確率分布安全性指標 β_F は，確率変数 $\boldsymbol{x}$ の中にいろいろな確率分布の変数が混在していても，それぞれの確率分布に対応して式 (4) および (26) を適用すれば計算できることは改めて指摘するまでもなかろう．

3. β_C および β_{HL} のもつ意味

(1) Cornell の提案した安全性指標 β_C

Cornell の提案した安全性指標 β_C は次式のように表わされる.

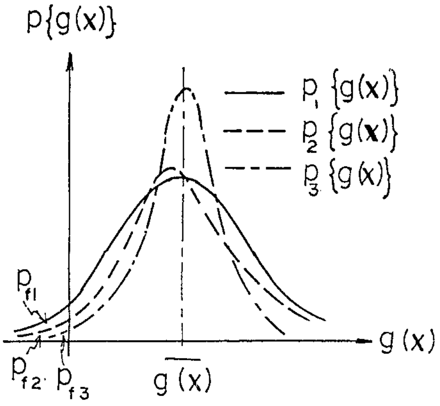
$$\beta_C=\frac{\overline{g(\boldsymbol{x})}}{\sigma_g}\cdots\cdots(29)$$

ここに，$\overline{g(\boldsymbol{x})}$ は破壊基準関数 $g(\boldsymbol{x})$ の平均値，σ_g はその標準偏差である．この式 (29) を計算するにあたっては，$g(\boldsymbol{x})$ が非線形関数の場合，平均値まわりの一次近似法が普通用いられる.

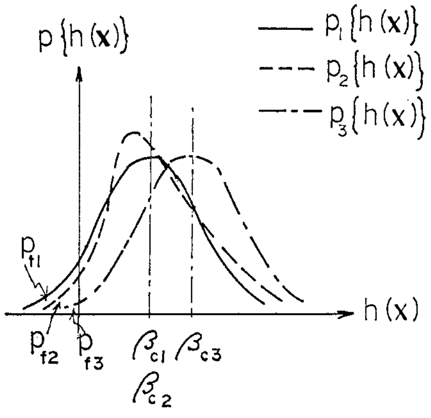
いま **表—1** に示すような，同一の破壊基準関数 $g(\boldsymbol{x})$ で表現される，3種類のケースについて考えてみよう．すなわち，ケース1と2は平均値と標準偏差は同じであるが，確率分布が異なり，ケース1と3は平均値と確率分布は同じであるが，標準偏差が異なるものである．**図—6** にそれぞれのケースの確率密度関数 $p_i\{g(\boldsymbol{x})\}$ と破壊確率 p_{fi} の関係が示してある.

表—1 破壊基準関数の種類

ケース	確率分布の種類	平均値	標準偏差
1	A	m	σ_1
2	B	m	σ_1
3	A	m	σ_2



図—6 $p\{g(\boldsymbol{x})\}$



図—7 $p\{h(\boldsymbol{x})\}$

ここで，

$$h(\boldsymbol{x})=\frac{g(\boldsymbol{x})}{\sigma_g}\cdots\cdots(30)$$

とおき，これを $g(\boldsymbol{x})$ の代わりに横軸にとって **図—6** と同様な関係を図示すると，**図—7** のようになる．この図から，

$$\overline{h(\boldsymbol{x})}=\frac{\overline{g(\boldsymbol{x})}}{\sigma_g}=\beta_C\cdots\cdots(31)$$

の関係があることがわかり，次のことがいえる.

a) $g(\boldsymbol{x})$ が同一の確率分布の場合，β_C の増加に伴って破壊確率は減少する.

b) $g(\boldsymbol{x})$ の2次までのモーメントが同じで，したがって β_C が同じであっても，確率分布が異なると破壊確率は違ってくる.

ところで，破壊基準関数 $g(\boldsymbol{x})$ が正規分布に従う場合には次のような変数変換

$$u=\frac{g(\boldsymbol{x})-\overline{g(\boldsymbol{x})}}{\sigma_g}\cdots\cdots(32)$$

を行うと，この u は標準正規変数となるから，$g(\boldsymbol{x})$ が負となる，つまり

$$u\leq-\frac{\overline{g(\boldsymbol{x})}}{\sigma_g}(=-\beta_C)\cdots\cdots(33)$$

となる確率（=破壊確率 p_f）は次式から求められる.

$$p_f=\mathrm{Prob}\{g(\boldsymbol{x})\leq 0\}=\phi(-\beta_C)\cdots\cdots(34)$$

Cornell の提案した安全性指標 β_C がこの式 (34) により正確な破壊確率と対応がつくためには，破壊基準関数 $g(\boldsymbol{x})$ が正規分布である必要がある.

したがって個々の確率変数の中に正規分布もしくは対数正規分布でないものがあったり，またそうであっても x_{Ni}, $\ln x_{Lj}$ の1次式で破壊基準関数が表わされないような場合には，β_C は正確な破壊確率 p_f と対応しないことになる．構造設計の問題ではむしろこのような場合が一般的である.

しかし一般に一つの破壊基準関数に関する安全性の評価をする場合には，その関数 $g(\boldsymbol{x})$ の確率分布の形は一意的に決まる（その分布形は不明にしても）ことになるから，上述の a) より β_C の値の大小と真の破壊確率の小大（その値は別として）とは完全に対応がつくことになる．したがってこの β_C は，確率分布の形に関係のない，安全性の相対的な尺度としての意味は一応有しているといえる．ただし，式の表現に関する不変性の欠如という欠点，すなわち数学的に等価で，したがって破壊確率は同じ破壊基準であっても，破壊基準関数の表現が異なると β_C の値が違ってくるという欠点は，この β_C の指標としての有効性を著しく損なわしめることにもなる

ので注意を要する.

(2) Hasofer/Lind の提案した安全性指標 β_{HL}

Hasofer/Lind の提案した安全性指標 β_{HL} においては，個々の確率変数 x_i を

$$x_i=\bar{x}_i+\sigma_i z_i \cdots\cdots (35)$$

もしくは

$$x_i=\frac{\bar{x}_i}{\sqrt{1+V_i^2}}\exp[\{\sqrt{\ln(1+V_i^2)}\}z_i]$$
$$\fallingdotseq \bar{x}_i \exp(V_i z_i) \cdots\cdots (36)$$

を用いて標準正規変数 z_i で表現しているので，β_{HL} は **2.** で説明した全確率分布安全性指標 β_F の特殊な場合に相当する．なお式 (35)，(36) 中の σ_i, V_i は標準偏差，変動係数である．すなわち個々の確率分布がどんな場合であっても，正規分布もしくは対数正規分布とみなした全確率分布安全性指標ということになる．

したがって，個々の確率変数が正規分布もしくは対数正規分布の場合には，$g(\boldsymbol{x})$ が非線形関数であっても，

$$p_f \fallingdotseq \phi(-\beta_{HL}) \cdots\cdots (37)$$

によりかなり正確な破壊確率 p_f と β_{HL} は対応することになる[11]．他の確率変数の場合には式 (37) は必ずしも成立しないから，やはり β_{HL} も安全性の相対的な尺度であるといえる．ただし Cornell の提案した β_C と違って，全確率分布安全性指標 β_F の場合と同じ理由から，式の表現に関する不変性の欠如は存在しない．

表—2 確率分布

変数	確率分布	平均値	変動係数	上限値	下限値
x_1	ワイブル	3.75	0.08	0	+∞
x_2	対数正規	2.0	0.05	0	+∞
x_3	正規	1.0	0.05	−∞	+∞
x_4	極値 I 型	3.75	0.2	−∞	+∞
x_5	ベータ	1.0	0.1	0.5	1.5

なお Veneziano[5] は，$R-S$ と $RD-SD$ あるいは $\ln\{(R+D)/(S+D)\}$ などとの Nuisance invariance が β_{HL} には欠如していると述べているが，前述したようにそのような不変性の欠如は存在しない．

一般に構造設計の問題の現状では，個々の確率変数の確率分布に関する情報は不十分であるうえに，信頼性理論を直接導入することは非常に困難である．そこで確率論的考え方の実用化を目標として，確率分布の形に関係のない，しかも破壊確率が表面に出ない，算出方法が簡単な，安全性を評価する尺度を定義しようと，Cornell は意図し，安全性指標 β_C を提案した．この Cornell の意図は β_{HL} によって一応完成されたといえよう．

4. 計算例[12]および考察

たとえば，鋼材断面の曲げ破壊に関する破壊基準関数は次のような形で表現できる．

$$g(\boldsymbol{x})=x_1x_2x_3-x_4x_5 \cdots\cdots (38)$$

ここに，x_1 は鋼材の降伏点強度，x_2 は断面塑性係数，x_3 は強度算定修正係数，x_4 は作用曲げモーメント，および x_5 は曲げモーメント算定修正係数である．**2.(2)** で述べた計算法を具体的に示すために，**表—2** に与えられた確率変数の場合の計算過程を **表—3** に示す．なお **表—2** においては，破壊基準関数をある定数で除して各確率変数を無次元化してある．以下の計算例においても同様な扱いをすることを断っておく．

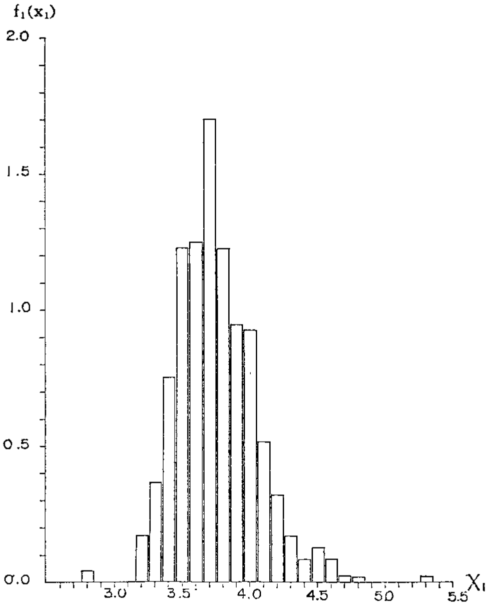
次に用いる確率分布の違いが全確率分布安全性指標 β_F に及ぼす影響をみるために，**表—4** に示すような確率分布を有する若干の例について計算を行った．**表—4** において，D は **図—8** に示すような生の統計データそのままの確率分布，N は正規分布，LN は対数正規分布，W は下限値を $\bar{x}_i(1-5V_{xi})$ とした

表—3 β_F の計算過程の例

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$\hat{g}(z)$	β^j
z_i^0	−1.0	−1.0	−1.0	1.0	1.0		2.24
$\phi(z_i^0)$	0.1587	0.1587	0.1587	0.8413	0.8413		
$\varphi(z_i^0)$	0.2420	0.2420	0.2420	0.2420	0.2420		
x_i^0	3.4470	1.9001	0.9500	4.4389	1.1030	1.326	
$f_i(x_i^0)$	0.7042	2.5485	4.8394	0.2486	2.4009		
$(\partial\hat{g}/\partial z_i)_{z^0}$	0.6202	0.3109	0.3275	−1.0734	−0.4474		
z_i^1	−1.3119	−0.6577	−0.6927	2.2706	0.9463		2.95
$\phi(z_i^1)$	0.0948	0.2554	0.2442	0.9884	0.8280		
$\varphi(z_i^1)$	0.1687	0.3214	0.3138	0.0303	0.2550		
x_i^1	3.3386	1.9329	0.9654	6.0150	1.0960	−0.363	
$f_i(x_i^1)$	0.4803	3.3271	6.2768	0.0197	2.5591		
$(\partial\hat{g}/\partial z_i)_{z^1}$	0.6556	0.3113	0.3227	−1.6851	−0.5993		
z_i^2	−0.9105	−0.4323	−0.4481	2.3404	0.8323		2.72
$\phi(z_i^2)$	0.1813	0.3328	0.3270	0.9904	0.7974		
$\varphi(z_i^2)$	0.2636	0.3634	0.3608	0.0258	0.2822		
x_i^2	3.4777	1.9548	0.9776	6.1237	1.0850	0.002	
$f_i(x_i^2)$	0.7737	3.7198	7.2166	0.0164	2.8017		
$(\partial\hat{g}/\partial z_i)_{z^2}$	0.6511	0.3321	0.3399	−1.7067	−0.6167		
z_i^3	−0.8913	−0.4546	−0.4653	2.3366	0.8443		2.72

表—4 計算種別

ケース	分類番号	確率変数				
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
A	N 1	D	N	N	N	N
	N 2	N	N	N	N	N
	N 3	LN	N	N	N	N
	N 4	W	N	N	N	N
	N 5	B	N	N	N	N
	L 1	D	LN	LN	LN	LN
	L 2	N	LN	LN	LN	LN
	L 3	LN	LN	LN	LN	LN
	L 4	W	LN	LN	LN	LN
	L 5	B	LN	LN	LN	LN
B・C	1	N	N	N	N	N
	2	LN	LN	LN	LN	LN
	3	W	W	W	W	W
	4	B	B	B	B	B
	5	W	N	N	E	N



図—8　x_1 の確率密度

ワイブル分布，Bは上，下限値を $\bar{x}_i(1\pm5\,V_{xi})$ としたベータ分布，Eは極値I型分布を，それぞれ意味し，各確率変数の平均値と変動係数は 表—5 に示してある．

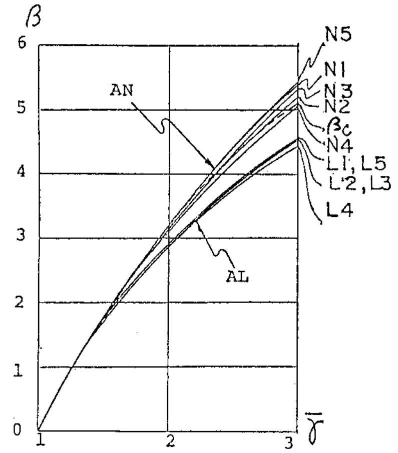
表—5　x の平均値および変動係数

変　数	平均値	変　動　係　数		
		A	B	C
x_1	3.75	0.08	0.1	0.2
x_2	$\bar{\gamma}$	0.05	0.05	0.1
x_3	1.0	0.05	0.05	0.1
x_4	3.75	0.2	0.2	0.2
x_5	1.0	0.1	0.1	0.1

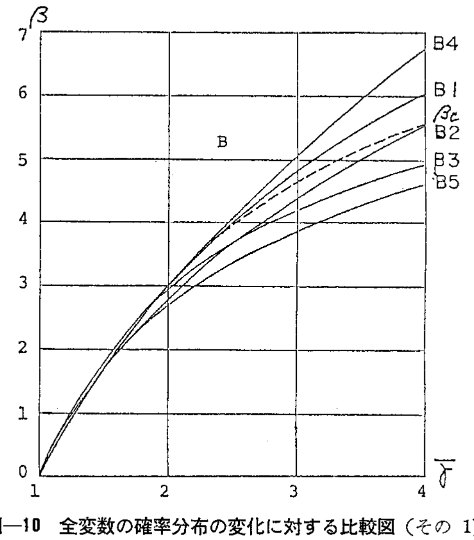
全確率分布安全性指標 β_F の計算結果を，Cornell の提案した安全性指標 β_C の計算結果とともに 図—9～11 に示す．ここで示した計算例において，A のケースは x_1 だけの確率分布の形をいろいろ変え，その他の確率変数を正規分布もしくは対数正規分布に固定したときの，結果の違いをみるためのものである．B, C のケースは一部を除いて，すべての確率変数をある一定の確率分布にしたとき，これらの分布形の違いが結果にどのような影響をもたらすかをみるためのもので，ケースBとCの違いは変動係数にある．

まず 図—9 より5つの確率変数のうち1つでもその分布形が異なると，中央安全率 $\bar{\gamma}$ の増加に伴って β_F の値の差が大きくなることがわかる．この 図—9 では5つの変数のうちただ1つの変数についてだけ確率分布の形を変化させたため，それぞれの間の値の開きは比較的少ないが，すべての変数の確率分布の形を同時に変化させると，図—10，11 にみられるように，結果に顕著な差が出てくる．

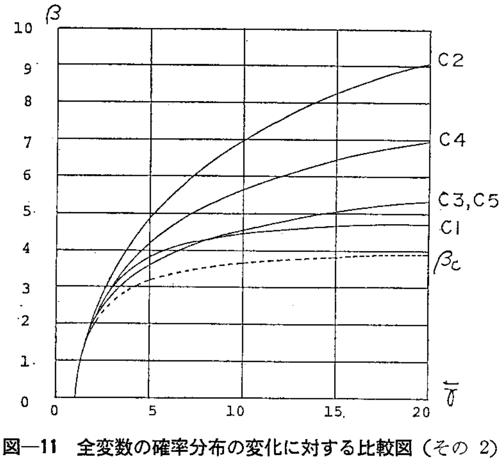
また 図—11 において，β_C および C_1 の β_F（すべての変数を正規分布とした場合）の値に限界があり，その限界値以上の安全性を得ることは，中央安全率 $\bar{\gamma}$ をい



図—9　x_1 の確率分布の変化に対する比較図



図—10　全変数の確率分布の変化に対する比較図（その 1）



図—11　全変数の確率分布の変化に対する比較図（その 2）

くら高めても不可能であることが示されている．これはすでに指摘[6),13)]されているように，次の破壊基準関数，

$$g(\boldsymbol{x})=x_1-x_2 \cdots\cdots(39)$$

についての β_C（この場合は x_1, x_2 が正規分布するとしたときの β_F に一致する）に次のような限界値があることからも説明することができる．

$$\beta_C=\frac{\bar{\gamma}-1}{\sqrt{\bar{\gamma}V_{x1}^2+V_{x2}^2}}=\frac{1}{V_{x1}}\left(\bar{\gamma}=\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}\rightarrow\infty\right) \cdots\cdots(40)$$

一方，x_1, x_2 が対数正規分布するものとし，破壊基準関数を，

$$g(\boldsymbol{x})=\ln x_1-\ln x_2 \cdots\cdots(41)$$

としたときの β_C（式 (39) において x_1, x_2 を対数正規分布としたときの β_F と同じ）には次に示すように，限界値は存在しない．

$$\beta_C=\frac{\ln(\bar{\gamma})}{\sqrt{V_{x1}^2+V_{x2}^2}}=\infty\quad(\bar{\gamma}\rightarrow\infty) \cdots\cdots(42)$$

このように，各確率変数を正規分布としたとき，もしくは結果的にそういうことになっている β_C, β_{HL} においては，中央安全率をいくら高めても安全度はある水準以上には上がらないということになる．したがって，もし別な判断により確保すべき安全性指標の値が与えられ，この値がその限界値を越えていれば，そのような条件を満たす設計は，上記のような安全性指標を使う限り不可能である．このような意味からも，一部でなされているような，破壊確率から β の値を求め，これを β_C もしくは β_{HL} に適用するようなことは行うべきでない．相対的な尺度としての安全性指標で議論するときには，破壊確率とか別な指標もしくは判断により得た値の混用は避けなければならない．

最後に，**2**. で述べたように全確率分布安全性指標 β_F が正確な破壊確率と対応がよいかどうかを，ここで示した計算例の一部について確かめてみた．**表—6** がその結果で，表中の β_M は計算の効率のよいモンテカルロ法[14)]を用いて一定水準以上（β_M で有効数字 3 桁の精度が確保できるような）の精度を有する p_f を計算し，次式から求めたものである．

$$\beta_M=|\phi^{-1}(p_f)| \cdots\cdots(43)$$

β_F と β_M はかなり一致し，式 (14) が成立していることがわかる．

ちなみに，次のような破壊基準関数の場合について考えてみよう．

$$g(\boldsymbol{x})=x_1-x_2(x_2-10)-30 \cdots\cdots(44)$$

ここに，x_1, x_2 は正規分布で，平均値および標準偏差は次に示すようなものとする．

$$\bar{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \cdots\cdots(45)$$

表—7 に各安全性指標とそれに対応する破壊確率を示す．この例では β_C に指標としての意味がまったくないほどに，β_M とは異なった値となっている．β_F はそれほどの違いはないが，それでも β_M との対応は悪い．その原因は，**図—12** にみられるように，正確な破壊確率を計算する積分領域は $\hat{g}(z)=0$ より外の全域であるが，β_F もしくは β_{HL} に対応する積分領域は，**2**. で述べたように，$T(z)=0$ より上側の領域に相当し，積分領域が約半分になっているところにある．したがって β_F もしくは β_{HL} に対応する破壊確率が β_M に対応する破壊確率の約半分になっている．

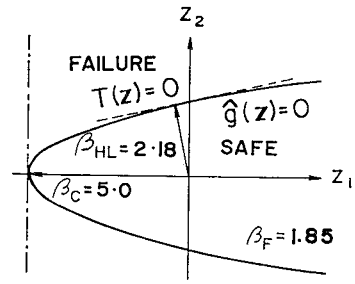
しかしこの例を構造設計の問題で考えれば，荷重が平均値よりある程度大きくなるか，また逆に小さくなると破壊するというようなことに相当する．通常そのような問題はないから，**2**. で述べたように，全確率分布安全性指標は，**表—6** にみられるごとく，正確な破壊確率に

表—6 β_F と β_M の比較例

β \ γ		2.0	2.5	3.0	4.0
B 1	β_F	2.99	4.00	4.83	6.06
	β_M	3.01	4.00	4.82	6.05
B 2	β_F	2.81	3.68	4.41	5.54
	β_M	2.81	3.70	4.40	5.55
B 3	β_F	2.96	3.69	4.21	4.94
	β_M	2.91	3.66	4.18	5.01
B 5	β_F	2.68	3.36	3.87	4.62
	β_M	2.59	3.26	3.79	4.59
C 1	β_F	2.00	2.56	2.97	3.51
	β_M	1.99	2.53	2.95	3.48
C 2	β_F	2.09	2.77	3.32	4.20
	β_M	2.12	2.78	3.34	4.20
C 3	β_F	1.96	2.44	2.79	3.29
	β_M	1.89	2.37	2.72	3.25
C 5	β_F	1.97	2.44	2.79	3.28
	β_M	1.89	2.36	2.71	3.24

表—7 β_C, β_F, β_M の比較例

	β_C	$\beta_F(\beta_{HL})$	β_M
安全性指標	5.0	2.18	1.85
破壊確率	3×10^{-7}	0.0156	0.0320



図—12 β_C, β_F, β_M の比較例

十分対応のついた指標であるということができる．

念のためにもう一つ例を示す．鉄筋コンクリートはり断面の現行設計の破壊基準関数は次式で表わされる[15]．

$$g(\boldsymbol{x})=\sigma_S\alpha_A\left(\alpha_d-\frac{\sigma_S\alpha_A}{1.7\,\sigma_C\alpha_b}p_0\right)E_Rp_0 -(m_D+m_L)E_S\nu_E \cdots\cdots(46)$$

ここに，σ_S は鉄筋の降伏点強度，σ_C はコンクリートの圧縮強度，α_A は鉄筋断面積のその平均値に対する比，α_d は有効高さのその平均値に対する比，α_b は断面幅のその平均値に対する比，E_R は強度算定修正係数，m_D は死荷重率，m_L は活荷重率，E_S は曲げモーメント算定修正係数であり，これら9個が確率変数である．また p_0, ν_E は定数で次式から求められる．

$$p_0=\frac{\sigma_{ca}k_0}{2\,\sigma_{sa}},\ \nu_E=\frac{1}{2}\sigma_{ca}k_0\left(1-\frac{k_0}{3}\right) \cdots\cdots(47)$$

ここに，σ_{ca} はコンクリートの許容曲げ圧縮応力度，σ_{sa} は鉄筋の許容引張応力度，k_0 はつり合い断面の中立軸比で

$$k_0=\frac{15\,\sigma_{ca}}{15\,\sigma_{ca}+\sigma_{sa}} \cdots\cdots(48)$$

である．

表—8 に示すような平均値，変動係数をもち（道路橋で，強度の公称値がそれぞれ $\sigma_S{}^n=3\,000\,\mathrm{kg/cm^2}$ (294 MPa)，$\sigma_C{}^n=240\,\mathrm{kg/cm^2}$ (23.5 MPa)，公称死活荷重比が1.0の場合に相当[15])，σ_S と σ_C がワイブル分布（下限値＝平均値−5×標準偏差とする），m_L が対数正規分布で，他は正規分布として計算すると，$\beta_F=3.46$，$\beta_M=3.39$ を得た．やはり両者はかなり一致している．

なお本文では触れなかったが，全確率分布安全性指標を用いたコード・キャリブレーションは，基本的には先に発表した方法[15]と同じような手順により容易に行えることを付け加えておく．

表—8　$\boldsymbol{x}$ の確率分布，平均値，変動係数

確率変数	確率分布	平　均　値	変動係数
σ_S	W	3 370 kg/cm² (330 MPa)	0.05
σ_C	W	284 kg/cm² (27.8 MPa)	0.2
α_A	N	1.0	0.03
α_d	N	1.0	0.08
α_b	N	1.0	0.04
E_R	N	1.0	0.1
m_D	N	0.5	0.05
m_L	LN	0.372 4	0.35
E_S	N	1.0	0.1

5. 結　　言

Rackwitz/Fießler および Lind らによって提案された，各確率変数の確率分布の形の影響を考慮に入れた安全性指標（本文では全確率分布安全性指標 β_F と表現）のもつ意味を明確にし，新しい簡単な計算法について提案した．また Cornell の提案になる安全性指標（本文では β_C と表現）および Hasofer/Lind の提案になる安全性指標（本文では β_{HL} と表現）について，β_F と関連させて説明し，その性質を明確にした．さらに若干の計算例を示して考察を加えた．得られた成果を要約すると次のとおりである．

（**1**） 全確率分布安全性指標 β_F は，標準化空間における標準正規変数が，原点から破壊限界曲面へ下ろした垂線とこの曲面との交点における接平面の座標値より小さくなる確率が $\phi(-\beta_F)$ で表わされるという関係を有する．したがって標準化空間で表現された破壊基準関数が線形であれば，$\phi(-\beta_F)$ は正確な破壊確率に一致する．構造設計の問題では，この関数は非線形関数となる場合が一般的であるが，その場合でも $\phi(-\beta_F)$ は正確な破壊確率にほぼ一致する．ゆえに全確率分布安全性指標 β_F は正確な破壊確率にほぼ対応し，Nuisance invariance, Failure criterion invariance の欠如はなく，Dimension invariance, Distribution invariance の欠如という欠点もほとんどない指標である．このことは若干の計算例によっても確かめられた．

（**2**） 標準化空間で表現された破壊基準関数を用いないで，変換しない元の破壊基準関数を直接使用した，簡単で有効な計算法を示した．この方法によると，ある確率変数の確率密度関数が数値的に与えられている場合でも容易に計算することができる．

（**3**） Cornell の提案した安全性指標 β_C は，破壊基準関数が，特定な形をしているとき，正確な破壊確率と対応がつくが，一般にはそのような対応はない．しかしこの β_C の値の大小と真の破壊確率の小大とは完全に対応がつくので，安全性の相対的な尺度としての意味は一応有している．

（**4**） Hasofer/Lind の提案した安全性指標 β_{HL} は，個々の確率変数の確率分布を正規分布もしくは対数正規分布としたときの全確率分布安全性指標 β_F に一致する．したがって個々の確率変数が正規分布もしくは対数正規分布の場合は，破壊基準関数が非線形関数の場合であっても，正確な破壊確率にほぼ対応した指標となる．このほかの確率変数の場合には，そのような関係はないから，やはり β_{HL} も安全性の相対的な尺度であるといえる．なおこの指標は β_C のような式の表現に関する不変性の欠如はなく，しかも個々の確率変数が対数正規分布するとしたことになっている変換の式 (36) を用いると，指標の値に限界値があるというような欠点もなくなる．したがって確率論的考え方の実用化を目ざした Cornell の意図は，この β_{HL} で一応完成されたといえる．

（**5**） 2次モーメント法として生まれた安全性指標

β_C は β_{HL} を経て β_F に至り，結果的に3次以上のモーメントもかなり取り入れられていることになっているから，β_F は2次モーメント法の範ちゅうを出た指標といえる．

（6） 構造設計における典型的な問題を用いて，本文で提案した計算法の過程を具体的に示した．また用いる確率分布の違いが全確率分布安全性指標 β_F にどのような影響を与えるかをみるために若干の計算例を示した．

（7） 各確率変数を正規分布とみなしたことになっている安全性指標では，安全率をいくら高めても安全性指標 β の値は一定値以上にはならない．したがって一定以上の安全性は確保できないという不合理なことが起こるので注意を要する．相対的な尺度としての安全性指標である β_C もしくは β_{HL} を用いて議論するときには，破壊確率とか別な指標もしくは判断により得た値を混用することは避けなければならない．

参 考 文 献

1) Ditlevsen, O. : Uncertainty Modeling with Applications to Multidimensional Civil Engineering Systems, McGraw-Hill, p. 229, 1981.
2) 藤野陽三：確率論に基づく安全照査法と構造設計，土木学会誌，第 63 巻2号，p. 35，1978.
3) Cornell, C.A. : Structural Safety Specifications Based on Second-Moment Reliability Analysis, Final Rep., IABSE Symp. on Concepts of Safety and Method of Design, pp. 235～246, 1969.
4) Ditlevsen, O. : Structural Reliability and the Invariance Problem, SM Rep. No. 22, Univ. of Waterloo, 1973.
5) Veneziano, D. : Contributions to Second Moment Reliability Theory, Research Report R 74-33, Dept. of Civil Eng., M.I.T., 1974.
6) Hasofer, A.M. and N.C. Lind : Exact and Invariant Second Moment Code Format, Proc. of ASCE, Vol. 100, No. EM 1, pp. 111～121, 1974.
7) Rackwitz, R. and B. Fießler : Note on Discrete Safety Checking when using Non-normal Stochastic Models for Basic Variables, Sonderforschungsbereich 96, Technical University of Munich, 14, 1976.
8) Lind, N.C. : Formulation of Probabilistic Design, Proc. of ASCE, Vol. 103, No. EM 2, pp. 273～284, 1977.
9) Hasofer, A.M. : Reliability Index and Failure Probability, Journal of Structural Mechanics, Vol. 3, No. 1, pp. 25～27, 1974.
10) 長 尚・小山 健・庭野 隆：安全性指標 β の安全性の尺度としての有効性について，第 36 回土木学会年次学術講演会講演概要集，I-317，1981.
11) 長 尚・小山 健：安全性指標 β に関する若干の考察，昭和 54 年度土木学会中部支部研究発表会概要集，I-8，1980.
12) 庭野 隆・長 尚・小山 健：確率変数の分布形の違いが安全性指標 β に及ぼす影響について，第 36 回土木学会年次学術講演会講演概要集，I-318，1981.
13) 尾坂芳夫・高岡宣善・星谷 勝：土木構造設計法，技報堂出版，p. 59，1981.
14) Hannus, M. : Numerical Analysis of Structural Reliability, Building Technology and Community Development Publication 5, Technical Research Centre of Finland, 1973.
15) 長 尚：限界状態設計法の採用による経済性の改善について，第 27 回構造工学シンポジウム梗概集，(2)，1981.

（1981.9.14・受付）