

動的荷重下における変位を制約とする 最適性規準法に関する研究

THE OPTIMALITY CRITERION METHOD USING DISPLACEMENT CONSTRAINT UNDER DYNAMIC LOADING

山田 善一*・古川 浩平**・横田 健一***

By Yoshikazu YAMADA, Kohei FURUKAWA and Kenichi YOKOTA

1. 緒 言

近年、電子計算機の急速な発達と相まって、数理計画の手法を応用した構造物の最適設計の研究が数多くなされてきた。これは構造物要素を分割して複数の設計変数にまとめたうえで、数理計画手法を適用し、電子計算機により能率よくかつ組織的に最適な構造物を設計する方法である。この方法を用いれば、どのような構造物であっても、ひとたびモデル化して数式に置き換えてしまえば、あとは同じように解析・設計され、非常に汎用的である。しかし最近の構造物の大規模化に伴い、設計変数の数は非常に多くなる傾向にある。このため、いかに電子計算機が高速になったとはいえ、最適解への収束性や設計に要する計算時間・容量などが問題になってきた。この問題を克服するために、サブオプティマイゼーションを用いたり^{1),2)}、設計変数間の関係を概算的に仮定する方法^{3),4)}などが用いられてきたが、その問題の解決はいまだ容易ではない。

このような多くの設計変数を有する大規模構造物に対しても敏速に収束するような設計法が求められてきた。その1つが最適性規準に基づいた設計法である^{5)~12)}。この方法は満足すべき最適性を先駆的に規定したうえで、その最適性条件を満たす設計点に向かって設計を進めていく方法であり、数理計画手法の基本である試行錯誤とは根本的に異なっている。そのため収束性は敏速であり、かつ、問題の規模や変数の数と繰り返し回数とはあまり関係がないことも明らかにされて⁷⁾、この点が従来の数理計画手法を用いた最適設計に比べて有利だとされている。しかしこの設計法では、最適化の過程で最適性規準以外の制約条件の検討は一般には行われず、最

適性規準によって得られた最適解が他の制約を犯していないか別途検証する方法をとっている。たとえば全応力設計における変位制約や、本研究で提案した手法における応力制約がその例である。そのため、最適化の過程ですべての制約を考慮して得られた最適解と等しい解が得られる保証はない。またすべての構造物に適用できる最適性規準といえるものは現在のところ見当たらず、数理計画手法を用いた最適設計のような汎用性はない。しかし、上述したような利点も多いため最適設計において今後有力な手法の1つになるものと考えられる。

最適性規準としては古くから全応力設計という考え方があった。全応力設計を最適性規準と考え、いわゆる最適設計との結びつきを考察したのは Razani⁹⁾ が初まりであろう。その後 Gellatly, Berke らによって一般的な変位制約をもった問題へと拡張されている^{7),8)}。これらの研究の大部分は静的な荷重条件を対象としたものであった。

動的な荷重条件下の問題においては、静的問題と異なり、固有振動数や振動モードを考慮する必要があり、また応答スペクトルを用いた耐震解析などにあっては、構造物の固有周期に応じて荷重の大きさが変化するという性質がある。したがって、一般的に収束性が悪くなり、計算時間も多く必要とする。そのため動的荷重下での最適設計において、収束が早くかつ確実な手法の開発が何より待たれていた。

このようなことから動的荷重下における最適性規準^{9)~12)}に基づく最適設計の研究がなされてきたが、静的問題とは取り扱いが異なり、かつより複雑なために、その研究は少ない。これらの研究はいずれも固有振動数¹²⁾か応力^{9)~11)}を制約としているものであり、動的変位を制約とした研究はいまだなされていない。動的荷重下の問題においては変位が最も厳しい制約になる場合も多く、特に、その傾向は大規模な構造物においてより顕著である。

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

** 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学教室

*** 正会員 工修 阿南工業高等専門学校助教授 土木工学科

このような観点から本研究において、多くの設計変数をもつ構造物について、その構造物が動的荷重下において変位の制約を受ける場合、どのような設計変数の組合せが最適解を与えるかという問題を少数回の繰り返しで求めることができる、動的最適性規準に基づく最適設計手法を提案し、その収束性や汎用性について考察する。その結果と数理計画手法の1つである SUMT の結果と比較し、提案した手法の優位を明らかにする。

2. 動的最適性規準法の定式化

(1) 動的応答解析

地動の作用を受ける多自由度系の運動は、減衰を粘性減衰項で代表させると、次のような運動方程式で表現される。

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = -M\ddot{z} \dots\dots\dots(1)$$

ここに、 M は質量マトリックス、 C は減衰マトリックス、 K は剛性マトリックス、 y は変位ベクトル、 z は地動の加速度ベクトル、である。減衰のない系に対する規準化されたモーダルマトリックス Φ および一般化変位ベクトル q を用い、 $y = \Phi q$ と変換し、簡単のために比例減衰を考えると、式 (1) は次のように表わされる。

$$[I]\ddot{q} + [(2\beta_j\omega_j)]\dot{q} + [(\omega_j^2)]q = -[(\Gamma_j)]\ddot{z} \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 $[I]$ は単位マトリックス、 $\beta_j, \omega_j, \Gamma_j$ はそれぞれ j 次振動の減衰定数、固有振動数、刺激係数である。

最大変位 x は、各次モードの自乗和平方根法から近似的に次のように求めることができる。

$$x = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\Gamma_j \phi_j q_j^{\max})^2} \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 ϕ_j は規準化された j 次モードである。 q_j^{\max} は外力の応答スペクトル曲線と固有振動数より求めることができる。

(2) 動的最適性規準の確立

動的荷重を受ける構造物の剛性はその固有値 λ で表わすことができる。ここでは、レイリー商を用いて固有値を表現し、その固有値が与えた許容固有値となるような最小重量構造物を求めるための動的最適性規準について考察する。構造物の固有値は式 (3) に示す動変位を用いてレイリー商により次のように与えられる。

$$\lambda = \omega^2 = \frac{x^t K x}{x^t M x} \dots\dots\dots(4)$$

構造物の総重量 W は次式で与えられる。

$$W = \sum_{i=1}^m A_i l_i \rho_i \dots\dots\dots(5)$$

ここに、 A_i, l_i, ρ_i はおのおの i 要素の断面積、要素長、比体積重量である。構造物の固有振動数 ω が与えられた許容振動数 ω_a となる最小重量構造物は、目的関数 W と等号の制約 $\omega^2 - \omega_a^2 = 0$ より形成されるラグランジュ関数

$$L = \sum_{i=1}^m A_i l_i \rho_i + \frac{1}{\nu} (\omega^2 - \omega_a^2) \dots\dots\dots(6)$$

の停留値を求めればよい。ここに、 ν はラグランジュ乗数の逆数であり、本研究ではこの ν をラグランジュ係数とよぶ。断面積の変化が動変位に与える影響は小さいとして無視すると、

$$\frac{\partial L}{\partial A_i} = l_i \rho_i + \frac{1}{\nu} \frac{\partial \omega^2}{\partial A_i} = l_i \rho_i + \frac{1}{\nu} \frac{(x^t \frac{\partial K}{\partial A_i} x)(x^t M x) - (x^t K x)(x^t \frac{\partial M}{\partial A_i} x)}{(x^t M x)^2} \dots\dots\dots(7)$$

となる。ここで、曲げを受ける構造物を考え、 i 要素に関連した質量、剛性マトリックスの各要素を M_i^e, K_i^e とし、 A_i, I_i を i 要素の断面積、断面2次モーメントとすると、

$$M_i^e = \alpha^e A_i \dots\dots\dots(8)$$

$$K_i^e = \beta^e I_i \dots\dots\dots(9)$$

となる。ここに、 α^e, β^e は定数である。また A_i と I_i の関係は後に式 (38) で仮定するが、ディメンジョンの適合性からも、

$$I_i = \tau A_i^2 \dots\dots\dots(10)$$

とおける。ここに、 τ は定数である。よって、

$$\frac{\partial M_i^e}{\partial A_i} = \alpha^e = \frac{\alpha^e A_i}{A_i} = \frac{M_i^e}{A_i} \dots\dots\dots(11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_i^e}{\partial A_i} &= \frac{\partial(\beta^e \tau A_i^2)}{\partial A_i} = 2\beta^e \tau A_i \\ &= \frac{2\beta^e \tau A_i^2}{A_i} = \frac{2K_i^e}{A_i} \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

これらの関係を用いて、

$$\frac{\partial M}{\partial A_i} = \frac{M_i}{A_i} \dots\dots\dots(13)$$

$$\frac{\partial K}{\partial A_i} = \frac{2K_i}{A_i} \dots\dots\dots(14)$$

となる。ここに、 M_i, K_i は i 要素に関連した部分にのみ値の入っている質量、剛性マトリックスである。式 (4)、(13)、(14) を式 (7) に代入することにより、次式により式 (6) の最小値を求めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial A_i} &= l_i \rho_i + \frac{1}{\nu} \frac{(2x^t K_i x)(x^t M x) - (x^t K x)(x^t M_i x)}{A_i \cdot (x^t M x)^2} \\ &= l_i \rho_i + \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{2x^t K_i x}{A_i \cdot x^t M x} - \frac{x^t K x}{x^t M x} \cdot \frac{x^t M_i x}{A_i \cdot x^t M x} \right\} \\ &= l_i \rho_i + \frac{1}{\nu} \frac{2x^t K_i x - \omega^2 x^t M_i x}{A_i \cdot x^t M x} = 0 \dots\dots(15) \end{aligned}$$

式 (15) より

$$-\nu = \frac{2 \mathbf{x}^t \mathbf{K}_i \mathbf{x} - \omega^2 \mathbf{x}^t \mathbf{M}_i \mathbf{x}}{A_i l_i \rho_i \cdot \mathbf{x}^t \mathbf{M} \mathbf{x}} \dots\dots\dots(16)$$

ラグランジュ係数 ν は定数であるため、すべての要素において式 (16) に示す ν が等しくなったときに最小重量構造物を得ることができる。式 (16) を書き換え $-\nu$ をあらためて ν_i とおくと、

$$\nu_i = \frac{2 \mathbf{x}^t \mathbf{K}_i \mathbf{x} - \omega^2 \mathbf{x}^t \mathbf{M}_i \mathbf{x}}{A_i l_i \rho_i \cdot \mathbf{x}^t \mathbf{M} \mathbf{x}} \dots\dots\dots(17)$$

よって構造物の重量を最小にする動的問題における最適性規準は、式 (17) に示す各要素の ν_i がすべて等しくなること、と表現することができる。

(3) 動的最適性規準の検証

式 (17) に示す ν_i をすべての要素で等しくすることが動的問題における最適性規準である。と 2.(2) で述べた。ここでは ν_i をすべて等しくした構造物が振動数一定のもとでの最小重量設計であることを検証する。

いまある設計変数 A_1, A_2, \dots, A_m を与えたとき、式 (17) に示す ν_i が $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ であったとする。この構造物に対して固有値を変化させずにすべての ν_i が等しくなるように A_i を変化させる方法は、 ν_i の小さな要素の A_i を小さくし、 ν_i の大きな要素の A_i は大きくすることである。そこである値 $\bar{\nu}$ を考え、この値より大きな ν_i をもつ要素の A_i は大きくし、 $\bar{\nu}$ より小さな ν_i をもつ要素の A_i は小さくする。このとき $\bar{\nu}$ は新しい構造物の固有値が元の構造物の固有値と等しくなるように決める。こうすることにより、固有値を一定に保ちながら、全要素の ν_i が等しくなった構造物が得られ、その構造物が最小重量となることを検証する。

上記の $\bar{\nu}$ を境にして設計変数 A_i の増減を考える。各要素の断面変化量 δA_i は次のように表わされる。

$$\delta A_i = \alpha(\nu_i - \bar{\nu}) \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 α は定数である。 δA_i による固有値の変化量 $\delta \lambda_i$ は、

$$\delta \lambda_i = f_i \delta A_i \dots\dots\dots(19)$$

ここに、

$$f_i = \frac{\partial \lambda}{\partial A_i} = \frac{2 \mathbf{x}^t \mathbf{K}_i \mathbf{x} - \omega^2 \mathbf{x}^t \mathbf{M}_i \mathbf{x}}{A_i \cdot \mathbf{x}^t \mathbf{M} \mathbf{x}} = l_i \rho_i \nu_i \dots\dots\dots(20)$$

である。ここで対象とする構造物の要素長、比体積重量は一定とし、おのおの l, ρ で表わすと式 (19) は

$$\delta \lambda_i = l_i \rho_i \cdot \alpha(\nu_i - \bar{\nu}) = \alpha \rho l_i (\nu_i^2 - \nu_i \bar{\nu}) \dots\dots\dots(21)$$

となる。構造物全体としての固有値は設計変数の変化にかかわらず一定であることより、全体の固有値の変化 $\delta \lambda$ は、

$$\delta \lambda = \sum_{i=1}^m \delta \lambda_i = \sum_{i=1}^m \alpha l_i \rho_i (\nu_i^2 - \nu_i \bar{\nu})$$

$$= \alpha l \rho \left(\sum_{i=1}^m \nu_i^2 - \bar{\nu} \sum_{i=1}^m \nu_i \right) = 0 \dots\dots\dots(22)$$

となり、 $\bar{\nu}$ は次式で与えられる。

$$\bar{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^m \nu_i^2}{\sum_{i=1}^m \nu_i} \dots\dots\dots(23)$$

よって求める断面変化量は次のようになる。

$$\delta A_i = \alpha \left(\nu_i - \frac{\sum_{j=1}^m \nu_j^2}{\sum_{j=1}^m \nu_j} \right) \dots\dots\dots(24)$$

このとき、構造物重量の変化量 δW は、

$$\begin{aligned} \delta W &= \rho l \sum_{i=1}^m \delta A_i = \alpha \rho l \sum_{i=1}^m \left(\nu_i - \frac{\sum_{j=1}^m \nu_j^2}{\sum_{j=1}^m \nu_j} \right) \\ &= -\frac{\alpha \rho l}{\sum_{i=1}^m \nu_i} \left\{ \left(\sum_{i=1}^m \nu_i \right)^2 - m \sum_{i=1}^m \nu_i^2 \right\} \leq 0 \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

式 (25) より、 ν_i が等しくない場合 δW は負となり、さらに重量減少が可能であり、最小重量ではない。 ν_i がすべて等しくなったとき、 $\delta W = 0$ となりこれ以上重量を減少させることができない最小重量構造物となる。このように、動的最適性規準は式 (17) に示す ν_i をすべて等しくすることが理解できるであろう。

(4) 動的最適性規準の変位制約への拡張

変位制約をもつ構造物の最小重量設計は、一般に次式に示すラグランジュ関数の停留値より求められる。

$$L = \sum_{i=1}^m A_i l_i \rho_i + \frac{1}{\nu} (x_1 - x_a) \dots\dots\dots(26)$$

ここに、 x_1 は変位制約を課した点の動的変位、 x_a は変位制約を課した点に与えられた許容変位、である。式 (26) の停留値を求めるためには、 $\partial x_1 / \partial A_i$ を求めねばならない。 x_1 はすでに式 (3) に示したように、モード、刺激係数、固有振動数、応答スペクトル関数、減衰定数などの複雑な要素を含んでおり、この偏微分を行うことは実際上非常に難しい。そのため式 (26) から変位制約をもつ構造物の動的最適性規準を求めることは実際的には不可能である。

そこですでに式 (6) に示した振動数制約をもつ構造物の最小重量設計問題を変位制約問題へ変換することを考える。この場合 $\partial x_1 / \partial A_i$ を求める必要がなく、定式化が非常に簡単になる。構造物の変位と固有周期とは道路橋示方書によれば次のような関係にあるものと考えられる¹³⁾。

$$T = \alpha \sqrt{\delta} \dots\dots\dots(27)$$

ここに、 T は固有周期、 α は定数、 δ は変位である。この式を用いて x_1 と x_a との間に次のような関係式を得

る。

$$x_1 \omega^2 = x_a \omega_a^2 \dots\dots\dots(28)$$

ここに、 ω は式 (4) より求める固有振動数、 ω_a は許容振動数である。 ω_a は式 (6) に示す振動数制約の問題ではあらかじめ与えられるが、変位制約問題では以下に示すように他の変数から求められる。すなわち、

$$\omega_a^2 = \omega^2 x_1 / x_a \dots\dots\dots(29)$$

となり、この ω_a^2 を式 (6) に代入すれば、

$$L = \sum_{i=1}^m A_i l_i \rho_i + \frac{1}{\nu} \omega^2 (1 - x_1 / x_a) \dots\dots\dots(30)$$

が得られ、この式 (30) は変位制約問題の式となる。式 (30) が非常に都合なのは、この式には2つの意味が含まれているからである。その第1は、動的変位 x_1 を x_a に収束させるという変位制約問題であることであり、第2は式 (29) に示すような関係を用いたことで、式 (6) から求めた全要素の ν_i を等しくすることによって最小重量構造物が得られる、という動的最適性規準を、振動数制約問題だけでなく変位制約問題においても、そのまま利用できることである。すなわち、 ω_a の代わりに x_a を与えるだけで、面倒な $\partial x_1 / \partial A_i$ を計算することなく、振動数制約問題から得られた動的最適性規準を変位制約問題に準用できるからである。結局、 x_1 を x_a に収束させることと、 ν_i を全要素で等しくする、という2条件を満たせば、与えられた変位制約を満足した最小重量構造物が得られることがわかる。

(5) 動的最適性規準に基づいた最適設計手法

2.(4) で述べたように変位制約を用いた動的最適性規準に基づいた最適設計手法は、次の2条件を同時に満足するように定式化されなければならない。すなわち、動的変位を与えられた許容変位に収束させることと、全要素の ν_i を等しくすることの2条件である。ここではそのための最適化手法の定式化を行う。

動的変位 x_1 を変化させずに ν_i を等しくするのであれば、すでに 2.(3) で示した方法により簡単に行うことができる。最適化においては、与えた初期値における構造物の動的変位 x_1 が許容変位 x_a と等しいということは一般にはあり得ない。2.(3) で示した方法では x_1 を x_a に収束させる過程が抜けているため、次のような定式化を行う。

すでに述べたように、 ν_i を等しくするためには、 ν_i の大きな要素の A_i は大きく、 ν_i の小さな要素の A_i は小さくすることが必要である。そのため、各要素の断面変化量 δA_i を ν_i に比例した形で次のようにおく。

$$\delta A_i = \beta \nu_i \dots\dots\dots(31)$$

ここに、 β は定数である。 δA_i による固有値の変化量 $\delta \lambda_i$ は、式 (19),(20),(31) より、

$$\delta \lambda_i = f_i \delta A_i = l_i \rho_i \nu_i \beta \nu_i = \beta l_i \rho_i \nu_i^2 \dots\dots\dots(32)$$

となる。よって固有値の総変化量 $\delta \lambda$ は、

$$\delta \lambda = \sum_{i=1}^m \delta \lambda_i = \beta \sum_{i=1}^m l_i \rho_i \nu_i^2 = \delta \lambda_0 \dots\dots\dots(33)$$

により得られる。ここに、 $\delta \lambda_0$ は各設計サイクルにおいて変化すべき固有値の総変化量であり、動的変位を与えられた許容変位に収束させるという条件より、式 (29) を用いて次のように求められる。

$$\delta \lambda_0 = \omega_a^2 - \omega^2 = \omega^2 (x_1 / x_a - 1) \dots\dots\dots(34)$$

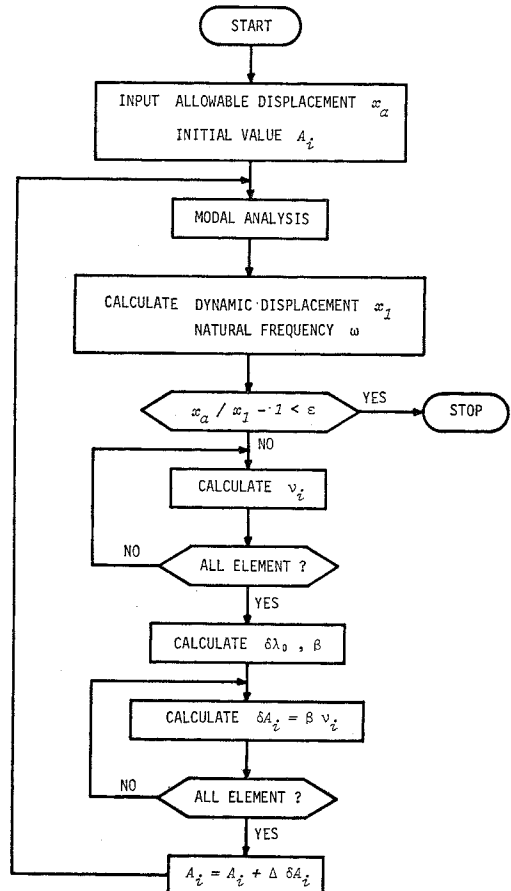
この式 (34) により変位を収束させる条件が満たされる。これより定数 β は、

$$\beta = \frac{\delta \lambda_0}{\sum_{i=1}^m l_i \rho_i \nu_i^2} \dots\dots\dots(35)$$

となり、これを式 (31) に代入することにより、求める断面変化量 δA_i は次のように求められる。

$$\delta A_i = \beta \nu_i = \frac{\delta \lambda_0}{\sum_{j=1}^m l_j \rho_j \nu_j^2} \cdot \nu_i \dots\dots\dots(36)$$

式 (36) に示す右辺の β により動的変位を収束させる条件が満たされ、 $\beta \nu_i$ により各要素の ν_i を等しくさせる



図一1 最適化のフローチャート

条件が満たされる。すなわち式 (36) によって上記の 2 条件を満たすように断面変更がなされる。断面変更は動的変位が収束するまで繰り返され、各サイクルにおける設計変数の値は次のように求めることができる。

$$A_i^{(n+1)} = A_i^{(n)} + \Delta \cdot \delta A_i^{(n)} \dots \dots \dots (37)$$

ここに、 $A_i^{(n+1)}$ は (n+1) 回目の設計サイクルにおける i 要素の設計変数、 $A_i^{(n)}$ は n 回目の設計サイクルにおける i 要素の設計変数、 Δ はきざみ幅、 $\delta A_i^{(n)}$ は n 回目の設計サイクルにおける i 要素の断面変化量、である。この設計手法のフローチャートを 図-1 に示す。

本設計手法はすでに述べたように、動的変位と ν_i の 2 条件を同時に満足するように繰り返し計算を行うのであるが、最適化のアルゴリズムをなるべく簡単にし、収束を早めるために、次の 2 点を考慮している。第 1 点として全要素の ν_i を等しくする方法として、式 (36) に示すように、 ν_i の大きな要素の断面を大きく増やし、 ν_i の小さな要素の断面は少ししか増やさないという方法をとっている。この方法は 2.(3) に示した方法よりはるかに簡単であり、かつ $\delta \lambda_i$ の項により変位の収束条件も取り入れることができるが、何回かの繰り返し計算を行わないと ν_i が等しくならない。第 2 点として、フローチャートにも示すように、収束判定を動的変位の収束だけで行い、 ν_i がすべて等しいという条件での収束判定を行っていない。これは両条件で収束判定を行うと繰り返回数も多く必要とすることと、後に計算例で示すように ν_i は厳密に等しくならなくても、ある程度等しくなれば厳密な最適解の 0.2% 程度まで収束することがわかったからである。

その反面、別の条件が必要となる。すなわち設計変数の初期値としてある程度小さな値を与える必要がある。これらが大きすぎると、全要素で ν_i が等しくなるより先に、動的変位が収束してしまって計算が打ち切れ、うまく最適解に収束しないからである。このことに関しては、3. の計算例によ

ってさらに明らかにする。

3. 数値計算例および考察

数値計算例で用いる動的荷重として地震荷重を想定し、図-2 に示すような応答スペクトル曲線を外力として用いる¹⁴⁾。これは本州四国連絡橋の耐震設計に用いられているもので、入力最大の加速度は 200 ガルとし、減衰は各次モードとも 2% として、図-2 の相当する曲線を用いる。本研究では動的荷重として地震を用いているが、他の荷重であってもまったく同様に適用できる。

最初に数値計算例の対象として用いる構造物は 図-3 に示すもので、5 要素からなる構造物である。頂点には $M=50t$ の重量が載っているものとし、頂点の許容変位を 0.1m とする。この構造物の断面積 (A)、断面 2 次モーメント (I)、断面係数 (Z) の関係を次のように仮定する¹⁵⁾。

$$A = 0.8 \sqrt{I} \dots \dots \dots (38)$$

$$Z = 0.78 I^{3/4} \dots \dots (39)$$

本研究では主として曲げを受ける構造物を数値計算例の対象としているため、断面 2 次モーメント I を設計変数とし、他の断面諸量は式 (38)、(39) より

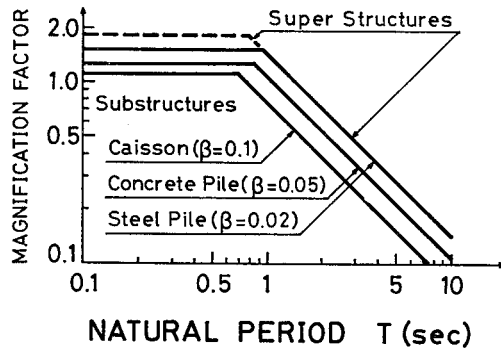


図-2 応答スペクトル曲線

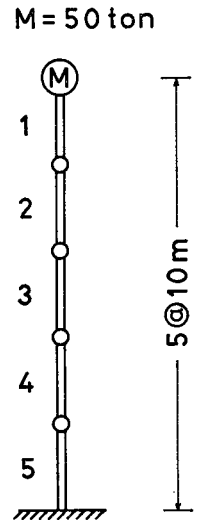


図-3 計算例に用いる 5 要素構造物

表-1 5 要素構造物の最適設計結果

	収束回数	要素番号					x_i (m)	W (t)
		1	2	3	4	5		
初期値		$I_i(m^4)$ ν_i	0.001 -5.73×10^{-4}	0.001 4.66×10^{-3}	0.001 1.39×10^{-2}	0.001 2.78×10^{-2}	0.001 4.83×10^{-2}	1.469 9.93
2.(5) の手法による最適解	11	$I_i(m^4)$ ν_i	0.024 0.276	0.110 0.312	0.244 0.334	0.413 0.344	0.616 0.348	0.0999 150.98
第 2 欄の解を初期値として 2.(3) の手法による最適解	10	$I_i(m^4)$ ν_i	0.021 0.335	0.106 0.335	0.243 0.334	0.419 0.336	0.626 0.337	0.0998 150.89
第 3 欄の解を初期値として 2.(5) の手法による最適解	2	$I_i(m^4)$ ν_i	0.021 0.335	0.105 0.335	0.242 0.334	0.418 0.335	0.625 0.337	0.0999 150.74

求める。

本研究で提案した最適性規準法を用いて、図-3 に示す構造物の最適化を行った結果を表-1 に示す。この例では動的変位の収束精度として 0.1% を用いている。表-1 の最上欄は与えた初期値であり、第 2 欄に最適解を示す。最適化に要する繰り返し回数はわずか 11 回であり、本設計法は非常に収束が早いことがわかる。変位は初期値における 1.469 m から、制約として与えられた 0.1 m に、また ν_i は初期値では -5.73×10^{-4} から 4.83×10^{-2} とばらついていたのが、ほぼ等しい値に収束している。

表-1 の最適解での ν_i をみると、0.276~0.348 の値をとっており、厳密に全要素の ν_i が等しいとはいえない。そこですでに 2.(3) に示した手法によって、等変位条件下での最小重量設計（すなわち全要素の ν_i を厳密に等しくする）を、第 2 欄の解を初期値として行った結果を表-1 の第 3 欄に示す。これに要した繰り返し回数は 10 回である。この結果は動的変位の収束精度を満たしていないから、この解を初期値として再び変位制約下の最適化問題として求めた結果を同じく表-1 の第 4 欄に示す。この解は最適性の 2 条件である、変位の収束と全要素の ν_i が等しいという条件を満たしている。目的関数である重量 W を第 2 欄と第 4 欄で比べると、0.24 t 減少しているが、これはわずか 0.16% の減少にしかない。0.16% 重量を減少させるために、収束までに倍の繰り返しを必要とし、かつ式 (24) に示す任意定数 α をうまく与えねばならない（本例では $\alpha=0.001$ を用いた）。このように重量減少のメリットと繰り返し回数の増加と任意定数の決定というデメリットとを比べると、全要素の ν_i を厳密に等しくするという条件は省いて、変位の収束条件のみを用いた方が有利であると考えられる。また同じことを、後の計算例で用いたラーメ

ン構造物にも適用したが、その重量減少もわずか 0.17% であった。以上のことを考え合わせて、本設計法では ν_i は厳密に等しくならなくてもほぼ等しい値になれば最適解が得られると考え、収束計算の打切りは変位制約のみで判定する手法を用いている。

本設計法では最適解に収束するまでに何回かの繰り返し計算が必要であり、収束への影響が大きい式 (37) に示すきざみ幅 Δ と初期値についてまず考察を加える。ついで他のいくつかの項目について検討し、数値計画手法の 1 つである SUMT との比較を行い、本設計法の収束性、汎用性、有効性などについて考察を加える。

(1) きざみ幅 Δ の影響

表-2 にきざみ幅 Δ を変えて計算を行った結果を示す。いずれの例も断面 2 次モーメントの初期値として、 $I=0.001 \text{ m}^4$ を用いている。表-2 の初期値の欄に示すように初期の段階では ν_i は -5.73×10^{-4} から 4.83×10^{-2} までの値をとり、頂点の変位 $x_1=1.469 \text{ m}$ である。表の中で例-1 から例-6 の I_i, ν_i, x_1, W は得られた最適解の値である。例-1 から例-3 に順にきざみ幅 Δ を小さくしている。きざみ幅 Δ が小さいほどより小さい重量の構造物が得られるが、反面収束するまでの回数が多いことがわかる。逆に Δ が大きいと収束回数は少ないが、最適値と離れた点に収束してしまう。

例-1 のきざみ幅 $\Delta=0.5$ の場合、得られた ν_i は大きくばらついている。例-2, 3 の場合も ν_i はかなりばらついている。これらの収束状況を詳しく検討してみると、 Δ が大きい例では、式 (37) に示す $\Delta \cdot \delta A_i^{(n)}$ が $A_i^{(n)}$ に比べて大きいため、繰り返しの初期の段階で断面がすぐに大きくなってしまいうので、最適解に収束しない。逆に Δ が小さい例では、最適解の近傍で式 (37) に示す $\Delta \cdot \delta A_i^{(n)}$ が $A_i^{(n)}$ に比べて小さく、1 度の設計変

表-2 きざみ幅 Δ の影響

例	Δ	収束回数	要素番号					x_1 (m)	W (t)	
			1	2	3	4	5			
初期値			I_i	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	1.469	9.93
			ν_i	-5.73×10^{-4}	4.66×10^{-3}	1.39×10^{-2}	2.78×10^{-2}	4.83×10^{-2}		
1	0.5	11	I_i	0.018	0.045	0.141	0.513	1.490	0.100	167.01
			ν_i	0.410	1.108	0.598	0.183	0.068		
2	0.1	19	I_i	0.032	0.140	0.275	0.413	0.558	0.100	154.93
			ν_i	0.762	0.194	0.294	0.374	0.439		
3	0.05	39	I_i	0.032	0.140	0.274	0.413	0.559	0.100	154.90
			ν_i	0.077	0.196	0.296	0.373	0.438		
4	$1.0 A_i$	7	I_i	0.024	0.111	0.245	0.414	0.615	0.0998	151.29
			ν_i	0.261	0.309	0.333	0.346	0.352		
5	$0.6 A_i$	11	I_i	0.024	0.110	0.244	0.413	0.616	0.0999	150.98
			ν_i	0.276	0.312	0.334	0.344	0.348		
6	$0.3 A_i$	23	I_i	0.023	0.109	0.243	0.413	0.616	0.100	150.88
			ν_i	0.279	0.313	0.334	0.344	0.347		

更での断面の変化量が小さすぎるため、収束回数が増加することがわかる。よってうまく最適解に収束させるためには、繰り返しの初期の段階では Δ が小さく、最適解近傍では大きな Δ を与える必要がある。本研究で提案している設計手法はすでに 2.(5) で述べたように、初期値として最適解に比べてかなり小さな値を用いている。そのため、設計変数の値は初めは小さく、後には大きくなるので、 Δ を設計変数 $A_i^{(m)}$ に比例させると上述の問題

を解決することができる。このように考えて、 Δ を $A_i^{(m)}$ に比例させた場合を表-2 の例-4 から例-6 に示す。例-1~3 と同様きざみ幅が大きいほど収束が早い。得られた最適解は3例ともほとんど等しく、かつ、いずれも例-1~3 の解より重量が小さい。以上の例に示すように、きざみ幅 Δ は定数ではなく設計変数に比例させた方がよいことがわかる。これらの計算結果やその他の例を考え合わせて以下の計算では $\Delta=0.6 A_i$ を用いる。

(2) 初期値の影響

表-3, 4 に初期値を変えて計算を行った結果を示す。表-3 は全要素に同じ初期値を与えた場合であり、表-4 は各要素で異なった初期値を与えた場合である。表-3 の例-1 から例-3 まではほとんど同じ最適解に収束している。初期値が小さいほど収束回数は多くなるが、初期値が1桁下のオーダーであっても、繰り返し回数は2回増加するだけでほとんど差のないことがわかる。それに対して例-4, 5 では最適解に収束していない。そのことは負の ν_i のあることでも明らかである。この例では与えた初期値が最適解の近傍であり、式 (37) に示す断面変更が十分できない間に、変位の収束条件を満たしてしまっただけである。この場合も、2.(3) に示した方法を用いることによって最適解を得ることはできるが、繰り返し回数が多くなり実用的でない。

本手法では、変位の収束条件を満たすまでに、ある程度の断面変更がなければ、 ν_i を等しくすることはできない。そのためには最適解に比べてかなり小さい値を初期値として与えねばならないことがわかる。このことは、初期値として十分小さい値を与えておきさえすれば、それが許容領域であると否とにかかわらず収束するため、初期値に関しほとんど考慮する必要のないことを示している。

表-4 には最適解の傾向、すなわち、上へ

表-3 初期値の影響 (全要素同じ初期値の場合)

例	初期値 (m')	収束回数	要素番号					x_1 (m)	W (t)	
			1	2	3	4	5			
1	0.0001	13	I_i	0.023	0.110	0.243	0.413	0.615	0.1000	150.94
			ν_i	0.276	0.312	0.334	0.344	0.348		
2	0.001	11	I_i	0.023	0.110	0.244	0.413	0.616	0.0999	150.98
			ν_i	0.276	0.312	0.334	0.344	0.348		
3	0.01	9	I_i	0.023	0.110	0.244	0.413	0.616	0.0999	151.00
			ν_i	0.276	0.312	0.334	0.345	0.348		
4	0.1	5	I_i	0.057	0.129	0.244	0.400	0.598	0.0999	156.87
			ν_i	-0.121	0.237	0.358	0.392	0.392		
5	1.0	7	I_i	1.149	1.030	0.895	0.746	0.662	0.0999	295.80
			ν_i	-0.185	-0.066	0.076	0.326	0.746		

表-4 初期値の影響 (各要素で異なった初期値を与えた場合)

	収束回数	要素番号					x_1 (m)	W (t)	
		1	2	3	4	5			
初期値	—	I_i	0.010	0.008	0.006	0.004	0.002	0.926	23.54
最適解	10	I_i	0.023	0.110	0.244	0.413	0.616	0.0999	150.97
		ν_i	0.276	0.311	0.334	0.344	0.348		

行くほど断面が小さくなっているのと逆の傾向の初期値を与え、計算を行った結果を示す。このような初期値であっても最適解に滑らかに収束している。以上のように本設計手法では、初期値は許容領域に与える必要はなく、最適解に比べてある程度小さい値を与えれば十分であることがわかる。

(3) 収束精度の影響

以上の計算では動的変位の収束精度として 0.1% を用いていた。表-5 にこの収束精度を変化させて計算を行った結果を示す。収束精度を厳しくしても収束回数はほとんど同じである。一般に数理計画手法を用いた最適化においては収束精度の影響は大きく、収束精度を少し厳しくしただけで繰り返し回数が大幅に増加することはしばしば経験することである。そのため収束精度をいかに決めるかということは最適化にあたり頭を悩ます問題の1つである。本設計手法では収束精度が繰り返し回数に与える影響はほとんどないため、収束精度は繰り返し回数を考慮することなく、対象とする問題に必要な精度

表-5 収束精度の影響

例	収束精度	収束回数	要素番号					x_1 (m)	W (t)	
			1	2	3	4	5			
1	1%	10	I_i	0.023	0.112	0.248	0.421	0.627	0.0992	152.37
			ν_i	0.277	0.314	0.337	0.347	0.351		
2	0.1%	11	I_i	0.023	0.110	0.244	0.413	0.616	0.0999	150.98
			ν_i	0.276	0.312	0.334	0.344	0.348		
3	0.01%	12	I_i	0.023	0.110	0.243	0.413	0.615	0.1000	150.87
			ν_i	0.276	0.311	0.334	0.344	0.348		

をとることができる。

(4) 断面変更の過程とその収束性

これまでは最適化の最初と最後だけを取り上げてきたが、ここではその収束過程に注目してみる。初期値として全要素 0.001 m⁴、きざみ幅 Δ=0.6 A_i を用いたときの収束状況を図-4 に示す。図-4 には要素 1 と 5 の断面 2 次モーメント I と v の収束過程および目的関数 W と頂点変位 x₁ の収束過程を示す。収束過程のはじめの段階では設計変数が小さいためその変化は緩やかであるが、その後急速に最適解に収束している様子がわかる。細かすぎて図-4 からは読み取れないが、表-1 をみてもわかるように最初の v₁⁽¹⁾ は負であり、それに応じて 2 サイクル目の I₁⁽²⁾ ははじめの I₁⁽¹⁾ より小さい値をとっている。またすでに述べたように本手法では、動的変位の収束と v_i を等しくするという 2 条件を同時に満たしつつ収束していくのがわかる。この 図-4 や 表-2 から 表-5 をみてもわかるように、10 回前後の繰り返し回数で最適解に収束しており、数理計画手法を用いた最適設計に比べて非常に少ない回数で収束することがわかる。数理計画手法を用いた最適設計との違いは次の 2.(5) で明らかにする。

(5) SUMT による結果との比較

今まで計算例に用いてきたのと同じモデルを対象にし

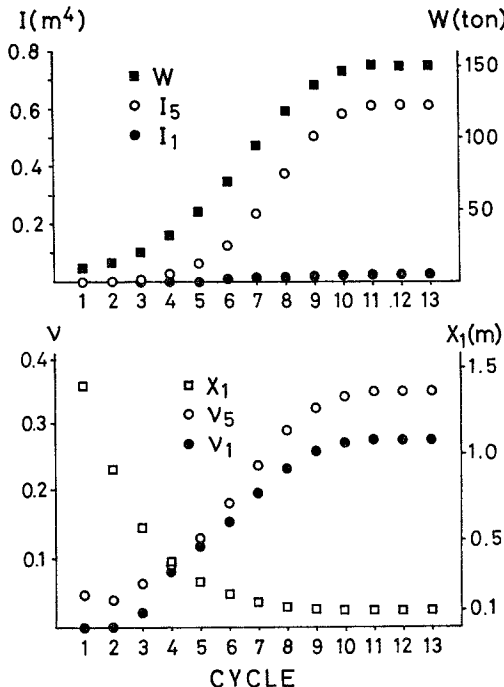


図-4 最適性規準法による収束状況

表-6 SUMT による最適設計結果

例		要素の断面 2 次モーメント (m ⁴)					x ₁ (m)	W (t)	CPU time (s)	構造解析の回数
		1	2	3	4	5				
1	初期値	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0849	314.00	42.2	847
	最適値	0.025	0.067	0.221	0.421	0.770	0.0993	151.63		
2	初期値	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	0.0300	526.41	38.8	786
	最適値	0.022	0.066	0.212	0.425	0.806	0.0993	151.67		

て、SUMT によって最適設計を行った結果を表-6 に示す。この計算に用いた SUMT のプログラムはすでにタワーピアー系の最適設計⁽⁴⁾や鋼床版床組の最適設計⁽¹⁰⁾などに適用して、よい結果が得られているものである。SUMT による最適化において初期値は許容領域に与える必要があるため、最適性規準法で用いたのと同じ初期値を与えることはできない。SUMT の計算例では、全要素とも同一の初期値を与えた例-1 と各要素で異なる初期値を与えた例-2 の 2 種の計算を行った。

この表-6 の結果と表-3 の例-1 から例-3 の結果とを比べてみれば、各要素の断面 2 次モーメントは少し異なっているが、目的関数である重量はほとんど等しい。W の差は変位の収束状況の差に起因するものであり、SUMT における変位の収束条件をより厳しくすれば同じ重量に収束するであろう。しかし SUMT において収束条件を厳しくすれば、計算時間が大幅に増加するためここで計算を打ち切っている。重量がほとんど同じで断面 2 次モーメントが異なっているのは、対象とする構造物が単純な形をしているため、制約と目的関数とが平行に近いなべの底のような形状をしているためであろうと推定される。以上のように本研究で提案した最適設計手法による解と SUMT による解とはほとんど差がないことがわかる。

SUMT による最適設計に要した CPU 時間は京都大学大型計算機センターの M200 で平均 40.5 秒であり、最適性規準による最適設計では 0.75 秒であった。SUMT では最適性規準法に比べて実に 50 倍の計算時間がかかっている。数理計画手法は基本的に試行錯誤を前提としているため、構造解析の回数が多大なものとなるからである。表-6 に示すように SUMT では最適解を得るまでに平均 816 回の構造解析を必要としたが、最適性規準法では平均 11 回ですんでいる。その差が計算時間に反映しているといえる。

(6) 設計変数を多くした場合の影響

今までの計算例に用いてきた図-3 の構造物を、高さや付加重量などは変えずに、要素数だけを 10 と倍にしたモデルを考え、これを図-5 に示す。表-7 にこの設計変数が 10 の構造物を最適性規準法により最適化を行った結果を示す。用いた初期値は全要素とも I=0.001

表-7 10 要素構造物の最適設計結果

初期値 (m ⁴)	収束 回数	x_1 (m)	W (t)
0.001	11	0.100 0	146.24

要素 番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I_i	0.008	0.036	0.078	0.133	0.197	0.268	0.348	0.435	0.530	0.632
ν_i	0.276	0.293	0.313	0.330	0.343	0.352	0.358	0.362	0.365	0.366

M=50 ton

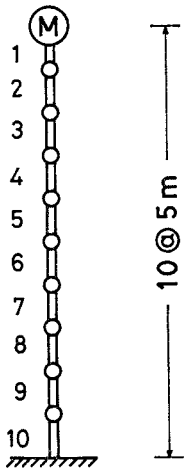


図-5 計算例に用いる 10 要素構造物

m⁴ である。設計変数を増やしたために重量 W はより小さくなっている。収束回数は 11 回と 5 要素の例と同じである。一般に最適性規準法では収束性は構造物の規模や設計変数の数と関係がないといわれているが⁷⁾、本研究で提案している手法についても同様のことがいえる。数値計画手法(たとえば SUMT) による最適設計では、設計変数が 5 から 10 に増加すると少なくとも数倍以上は繰り返し回数が増すことは明らかである。

そのことを考え合わせると、本研究で提案している手法のメリットは大きく、特に設計変数の大きな構造物でその利点はより発揮されることが考えられる。また最適解における ν_i の値は、5 要素の例とほとんど同じである。

(7) 要素長 l_i が異なった場合

今までに述べてきた計算例はすべて要素長 l_i が等しい例であった。実際に最適化を行う場合、構造物の形状などのため、すべての要素長を等しくすることは難しい。そこで計算例に用いてきた構造物の要素長を図-6 に示すように 5m と 10m の 2 種に変化させ

M=50 ton

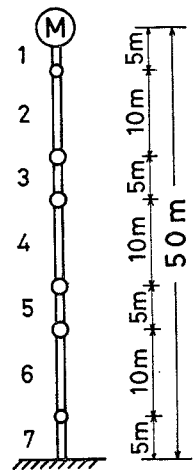


図-6 異なった要素長をもつ構造物

表-8 要素長 l_i が異なる場合の最適設計結果

初期値 (m ⁴)	収束 回数	要素番号							x_1 (m)	W (t)	
		1	2	3	4	5	6	7			
0.001	11	I_i	0.008	0.058	0.135	0.239	0.357	0.498	0.651	0.100 0	148.60
		ν_i	0.268	0.300	0.324	0.341	0.351	0.355	0.358		

て最適化を行った結果を表-8 に示す。要素長が異なっても上述の例と同じ ν_i に収束している。このように本設計法は要素長が異なった場合にもなら変更を加えることなく適用することができる。

(8) 他の構造物への適用例

図-7 に示す単純ばりに鉛直方向に 100 ガルの入力考えた場合の最適設計結果を表-9 に示す。図-7 に示すように、全断面に $m=1\text{t/m}$ の分布荷重が載っており、まん中の質点と右から 4 番目の質点に $M=20\text{t}$ の荷重が載っているものとする。変位制約は中点の鉛直変位を 0.03m ととっている。12 回の繰り返し計算で

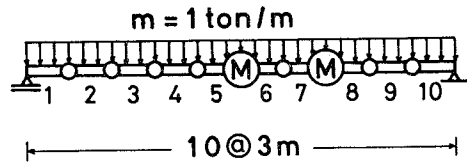


図-7 計算例に用いた単純ばり

表-9 単純ばりの最適設計結果

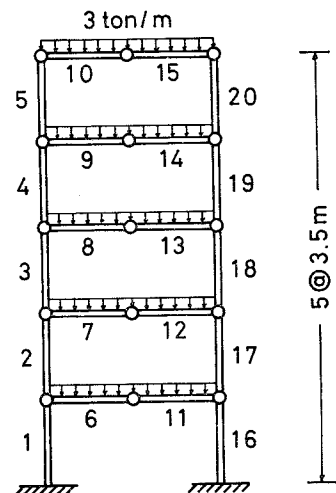
要素番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$I_i(10^{-2}\text{m}^4)$	0.116	0.408	0.747	1.080	1.391	1.464	1.329	1.010	0.547	0.155
ν_i	7.85	7.78	7.69	7.61	7.48	7.53	7.53	7.58	7.66	7.71

表-10 5 層ラーメン構造物の最適設計結果

要素番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$I_i(10^{-2}\text{m}^4)$	0.118	0.079	0.060	0.039	0.018	0.136	0.167	0.126	0.079	0.020
ν_i	17.6	17.2	17.0	16.8	16.4	15.8	16.4	16.3	15.8	13.8

すべての要素の ν_i が等しくなって最適解に収束している。

表-10 は図-8 に示す 5 層ラーメン構造物の計算結果である。最適解は左右対象となるので、表に示したのは左側の要素 1 から 10 までである。この構造物には死荷重として各層のほりに 3t/m の分



2 @ 3.5m

図-8 計算例に用いた 5 層ラーメン

布荷重が載っているものとし、地震荷重として横方向に 200 ガルを想定している。変位制約は頂点変位 0.05 m である。この例は設計変数が 20 ある例であるが、わずか 10 回の繰り返し計算で左右対象の解に収束している。このように本研究で提案した設計法は、設計変数の大小にかかわらず収束が非常に早く、非常に有効な設計法であることがわかる。

4. 結 論

本研究は動的荷重下における変位を制約とする動的最適性規準に基づく最適設計手法を提案し、その手法の有効性、収束性、汎用性などに対して考察を加えたものである。その結果は次のようにまとめられる。

(1) 本研究で提案した動的最適性規準に基づく設計法は変位を制約としているため、変位制約が支配的な構造物の最適設計に特に有効に適用できる。

(2) 本設計法は収束が非常に早く、10 回程度の繰り返し計算で最適解に収束するため、計算時間が非常に少なくてすむ。5 変数問題を例にとれば、本設計法の計算時間は SUMT による計算時間の約 1/50 である。

(3) 本設計法では設計変数の数の大小と収束性とは関係がないため、設計変数の数の多い構造物の最適設計には特に有効である。

(4) 本設計法は動的荷重を受ける多くの構造物に適用でき、汎用性があるとともに、そのアルゴリズムが簡単なため、プログラミングが容易である。

(5) 本設計法では、初期値としてかなり小さな値を与えておけば十分である。また、収束精度が繰り返し回数に与える影響はほとんどないため、収束精度は繰り返し回数を考慮することなく、対象とする問題に必要な精度をとることができる。

(6) 本設計法による最適解と SUMT による最適解を比較すると、両者の解の間には有意な差は認められない。しかし計算時間に大きな差があることはすでに述べたとおりである。

本研究においては変位制約のみを考慮し、その他の制約、たとえば応力制約などは考えていない。本研究の計算例ではいずれも応力制約は有効ではない。しかし実際の設計においては、主として変位制約と応力制約を考慮する必要があり、これらを考慮した場合について、今後さらに研究を進める予定である。

本研究の計算を行うにあたり、京都大学工学部学生平野 功君の助力を得た。本文の内容について、鹿児島大学工学部 河野健二講師、京都大学工学部 古田 均助

手から貴重な助言をいただいた。本研究の一部は文部省科学研究費の補助を受けて行ったものであり、計算は京都大学大型計算機センターの M200 により行ったことを付記し、謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 杉本博之：トラス構造物の実用的最適設計に関する研究，土木学会論文報告集，第 208 号，pp. 23~31, 1972 年 12 月。
- 2) 奥村敏恵・大久保禎二：Suboptimization による鋼連続桁の最適設計，土木学会論文報告集，第 215 号，pp. 1~14, 1973 年 7 月。
- 3) Templeman, A.B. : Optimization Concepts and Techniques in Structural Design, Introductory Report of 10th Congress of IABSE, pp. 41~60, 1975.
- 4) 山田善一・古川浩平：最適化手法を用いた長大吊橋タワーピア系の耐震設計，土木学会論文報告集，第 281 号，pp. 17~27, 1979 年 1 月。
- 5) Razani, R. : Behavior of Fully Stressed Design of Structures and Its Relationship to Minimum-Weight Design, AIAA Journal, Vol. 3, No. 12, pp. 2262~2268, Dec., 1965.
- 6) Venkayya, V.B. : Design of Optimum Structures, Computers & Structures, Vol. 1, pp. 265~309, 1971.
- 7) Gellatly, R.A. and L. Berke : Optimality-criterion-based Algorithms, Chapter in Optimum Structural Design, Theory and Applications, edited by R.H. Gallagher and O.C. Zienkiewicz, John Wiley and Sons, 1973.
- 8) Gellatly, R.A. and D.M. Dupree : Examples of Computer-aided Optimal Design of Structures, Introductory Report of 10th Congress of IABSE, pp. 77~105, 1975.
- 9) Venkayya, V.B., N.S. Khot, V.A. Tischler and R.F. Taylor : Design of Optimum Structures for Dynamic Loads, Proc. of the Third Conference on Matrix Method in Structural Mechanics, AFFDL-TR-71-160, pp. 619~658, Dec., 1973.
- 10) Venkayya, V.B. and N.S. Khot : Design of Optimum Structures to Impulse Type Loading, AIAA Journal, Vol. 13, No. 8, pp. 989~994, August, 1975.
- 11) Venkayya, V.B. and F.Y. Cheng : Resizing of Frames Subjected to Ground Motion, Proc. of the International Symposium on Earthquake Structural Engineering, pp. 597~612, August, 1976.
- 12) Levy, R. and K. Chai : Implementation of Natural Frequency Analysis and Optimality Criterion Design, Computers & Structures, Vol. 10, pp. 277~282, 1979.
- 13) 日本道路協会：道路標示方書・同解説 V 耐震設計編，p. 39, 昭和 55 年 5 月。
- 14) 土木学会耐震工学委員会本州四国連絡橋耐震合同研究会：本州四国連絡橋耐震合同研究会 研究成果の概要，昭和 46 年 6 月。
- 15) 田中 尚・中村雄次：建築構造物の自動設計と最適設計，コンピュータによる構造工学講座 II-7-B, 培風館，pp. 123~124, 昭和 48 年。
- 16) 山田善一・大宮司尚：鋼床版床組の最適設計の実用化に関する研究，土木学会論文報告集，第 233 号，pp. 35~43, 1975 年 1 月。

(1981.9.21・受付)