

## 連行を考慮した漸変成層流の基礎方程式について

BASIC EQUATIONS OF THREE-LAYERED, GRADUALLY VARIED  
FLOW WITH ENTRAINMENT

玉 井 信 行\*

By Nobuyuki TAMAI

## 1. はじめに

漸変 2 層流の開水路流れとしての取扱いはかなり古くから行われている<sup>1)</sup>。しかしながら、河川の非定常流れに適用するという観点からいえば、いまだ多くの問題が残されている。これらの問題を一足飛びに解決することはできないので、焦点を絞った研究を積み重ねる必要があると考えられる。

ここでは漸変流という前提に加えて、次のような範囲を考察の対象とする。

(i) 弱混合ないし緩混合状態を考える。前半では 3 層系につき一般的な展開を示し、後半では特別に簡略化できる場合につき従来の例と比較する。

(ii) 感潮域全域の巨視的な挙動を対象とする。縦断方向の距離スケールとして 10 km のオーダーを考えるので、1 次元解析を行うことを前提とする。

(iii) 速度および密度の分布としては鉛直方向の分布関数のみを考える。これは横断方向の分布を看過しているゆえではなく、河川における実測の困難さを考え、現在の時点ではこうした近似度に止まらざるを得ないと判断したゆえである。したがって、今回の考察は水路の単位幅に対する考察であり、長方形断面水路には最も簡単に展開できる。

(iv) 1 次元漸変流という枠組より、河口流出部の詳細な構造とか内部渦<sup>2)</sup>は考察の範囲外とする。構造的な面に関しては、各基本式の意義と連行現象の再考を中心とする。

(v) 基礎式は質量保存則と運動量保存則を中心とし、統一的な演繹により連行に伴う付加摩擦力の評価、および、縦分散項の内容を明らかにする。

## 2. 3 層系に関する考察

## (1) 概 説

ここでは感潮河道部にみられる成層流れを対象とする。従来の解析例のほとんどすべては 2 層系を考えている。しかしながら、上・下層の層厚はそれほど大きくはないので両者の混合による中間層の層厚は相対的にはかなりの程度に達し、3 層流と考える方が望ましいことが指摘されてきた。これを補足すると、2 層モデルは大局的にいって水域に関する 2 つの情報しか与えず、連続的・多段的に変化している密度場を簡略化し過ぎる嫌いがある。本論文で 3 層モデルを話題にする目的は、この情報量を増大させることと、それにより各層の挙動の予測精度を上げることにある。

3 層モデルに関する従来の提案としては 2 つのものがある。須賀<sup>3)</sup>の論文においては連行は下層側のみから生ずるとされている。日野・灘岡<sup>4)</sup>の論文では密度分布の変曲点と無流面とを独立な積分区分として取り扱っている。この場合には連行効果が考慮され、体積・密度・運動量の保存則を考慮するのみでは不足する方程式の数は、モーメント法で補われている。

本論文においては河川の現場において測定が相対的に容易と思われる、密度に基づいた界面の分割を行い、2 層間の連行としては上下方向をともに考えて 1 次元化を行う。また、この際に密度と速度分布の平均値からの偏差を考慮し、同一の区界積分法で得られている従来の結果を進展させ、あわせて現地への適用にあたっての基礎式を得ようとする。

## a) 界面の定義および分布関数

中間層が発達する場合においては、密度は中間層内で急激に変化する。また、下層内の密度も  $x$  方向に緩やかに変化する (図-1 参照)。したがって、水面および底

\* 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

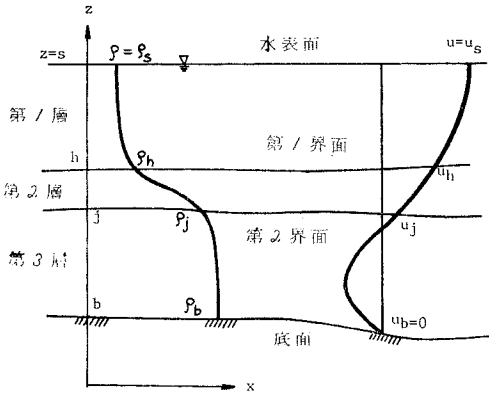


図-1 3層流れに関する座標系および記号

面における密度  $\rho_s, \rho_b$  を基準として、第1界面と第2界面を次のように定めるものとする。

$$\begin{cases} \rho_h(x, t) = \rho_s(x, t) + 0.1 \Delta\rho(x, t) \cdots \text{第1界面} \\ \rho_j(x, t) = \rho_s(x, t) + 0.9 \Delta\rho(x, t) \cdots \text{第2界面} \\ \Delta\rho(x, t) = \rho_b(x, t) - \rho_s(x, t) \cdots \text{全密度差} \end{cases} \quad (1)$$

ここに、 $s, h, j, b$  はそれぞれ水面、第1界面（上層と中間層の境界）、第2界面（下層と中間層の境界）、および底面の  $z$  座標である。 $z$  は鉛直上向きを正とする座標であり、密度  $\rho$  および水平速度  $u$  に付された添字はそれぞれの  $z$  座標位置における密度および速度を表わす。

非定常運動においてはすべての位相において分布関数形が等しいとは考えにくい、1周期の間を代表的ないくつかの分布で近似的に表現することは可能であろう。したがって、ここでは相似関数形で表わされることだけを仮定し、具体的な関数形については実際の問題を解く場合に適宜指定することとし、ここでは細部に言及しないこととする。層の名称としては上方より第1層、第2層、第3層とよぶことにする（図-1 参照）。

第1層の密度を

$$\rho = \rho_s + m_1'(z) \cdot \Delta\rho_1 \quad (h \leq z \leq s) \quad (2)$$

と表わす。 $m_1'(z)$  は水面の密度からの偏差を示す分布関数である。ここに、 $\Delta\rho_1 = \rho_h - \rho_s = 0.1 \Delta\rho$  である（式(1)、参照）。このとき第1層の平均密度  $\rho_1$  は次式で表わされる。

$$\rho_1 = \rho_s + \frac{\Delta\rho_1}{s-h} \int_h^s m_1'(z) dz \quad (3)$$

また、密度  $\rho$  を層平均値からの偏差の形で記述すれば、分布関数を  $m_1(z)$  と書いて式(2)の代わりに次式を得る。

$$\begin{cases} \rho = \rho_1 + m_1(z) \cdot \Delta\rho_1 \\ m_1(z) = m_1'(z) - \frac{1}{s-h} \int_h^s m_1'(z) dz \end{cases} \quad (h \leq z \leq s) \quad (4)$$

第2、第3層の密度についてもまったく同様である。

添字の数字は各層における量を示すものとして、式(3)、(4)と同一の意味で用いられている。

$$\begin{cases} \rho = \rho_2 + m_2(z) \cdot \Delta\rho_2 \\ \Delta\rho_2 = \rho_j - \rho_h = 0.9 \Delta\rho \\ m_2(z) = m_2'(z) - \frac{1}{h-j} \int_j^h m_2'(z) dz \\ \rho = \rho_h + m_2'(z) \cdot \Delta\rho_2 \end{cases} \quad (j \leq z \leq h) \quad (5)$$

$$\begin{cases} \rho = \rho_3 + m_3(z) \cdot \Delta\rho_3 \\ \Delta\rho_3 = \rho_b - \rho_j = 0.1 \Delta\rho \\ m_3(z) = m_3'(z) - \frac{1}{j-b} \int_b^j m_3'(z) dz \\ \rho = \rho_j + m_3'(z) \cdot \Delta\rho_3 \end{cases} \quad (b \leq z \leq j) \quad (6)$$

速度についても同様にして次式のように表現する。

$U_i$  は第  $i$  層の平均流速、 $f_i'$  は第  $i$  層の上端からの速度偏差、 $f_i$  は第  $i$  層の平均流速からの偏差を表わす分布関数である。

$$\begin{cases} u = U_1 + f_1(z) \cdot \Delta u_1 \\ \Delta u_1 = u_s - u_h \\ f_1(z) = f_1'(z) - \frac{1}{s-h} \int_h^s f_1'(z) dz \\ u = u_s + f_1'(z) \cdot \Delta u_1 \end{cases} \quad (h \leq z \leq s) \quad (7)$$

$$\begin{cases} u = U_2 + f_2(z) \cdot \Delta u_2 \\ \Delta u_2 = u_h - u_j \\ f_2(z) = f_2'(z) - \frac{1}{h-j} \int_j^h f_2'(z) dz \\ u = u_h + f_2'(z) \cdot \Delta u_2 \end{cases} \quad (j \leq z \leq h) \quad (8)$$

$$\begin{cases} u = U_3 + f_3(z) \cdot \Delta u_3 \\ \Delta u_3 = u_j \\ f_3(z) = f_3'(z) - \frac{1}{j-b} \int_b^j f_3'(z) dz \\ u = u_j + f_3'(z) \cdot \Delta u_3 \end{cases} \quad (b \leq z \leq j) \quad (9)$$

b) 未知量および基本式系

前項で述べたように各層の端部における密度、速度が既知となれば、層平均密度および任意点での値を知ることができる。また、界面は密度変化の比率で定義することにしたので、密度に関する未知量は  $\rho_s, \rho_b$  の2つである。速度についても底面の局所流速  $u_b$  は0であるので、未知量は  $u_s, u_h, u_j$  の3つである。層の位置としては底面の  $z$  座標  $b$  は境界条件として与えられるので、未知量は  $s, h, j$  の3つである。したがって、未知量は合計8個存することになる。

一方、これに対応する支配方程式群は各層における質量保存則、および水平方向の運動量保存則の合計6個であり、方程式の数が不足する。鉛直方向の運動量保存則

は、漸変流の前提のもとに静水圧を算定する際に活用されるが、それ以上の情報は与えない。このために補助的に用いられるのが体積の保存則である。この式は不均質流れの中においては近似的にしか成立しない関係であることに留意する必要がある。不足する方程式の数は2つであるので、ここでは第1層と第3層の体積保存則を利用することにする。第2層は密度の変化が激しく、不均質流れの特徴が最も強く現われると考えられるので、この層を除いて適用するのが順当と判断される。

本論文においては、各層間の物質輸送は移流型で記述することとし、いわゆる連行速度を用いて表現する。したがって、界面においては拡散型による輸送は形式上0とおき、移流された物質が層内で輸送される時点では拡散作用も同時に存するものとする。こうした各層間の輸送を考慮するので、運動量則においてもブーシネスク近似を適用せずに考えることにする。さらに、 $x$ 軸は水平座標であるが、考察の対象とする河川下部部の底勾配は局所的に大きな場所においても $10^{-2}$ のオーダー以下と考えられるので、流れの方向と $x$ 方向とは有意な誤差を生ずることなく置換して用いることができる。

## (2) 第1層に対する基礎方程式

### a) 体積保存則

感潮河口部においては水域の密度は空間的・時間的に変化している。しかし、塩分濃度の変化は基準濃度に比し十分に小さいので、こうした不均質な場においても体積保存則が近似的に成立することが知られる<sup>9)</sup>。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots(10)$$

これを第1層内で積分する。

$$\int_h^s \frac{\partial u}{\partial x} dz + (w_s - w_h) = 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここに、添字は鉛直速度成分  $w$  を考える  $z$  座標位置を示す。

式(11)の第1項の積分範囲  $s$  と  $h$  はともに  $x$  の関数であるので、この項は次のように書くことができる。

$$\int_h^s \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_h^s u dz - u_s \frac{\partial s}{\partial x} + u_h \frac{\partial h}{\partial x} \quad \dots\dots\dots(12)$$

また、水面および第1界面  $z=h$  における鉛直流速は次のように書くことができる。

$$\begin{cases} w_s = \frac{\partial s}{\partial t} + u_s \frac{\partial s}{\partial x} \\ w_h = \frac{\partial h}{\partial t} + u_h \frac{\partial h}{\partial x} + (w_{e,1} - w_{e,1}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(13)$$

ここで、 $w_{e,1}$  は第2層から第1層への移流速度、 $w_{e,1}$  は逆に第1層から第2層への移流速度を示す。

式(12)、(13)を式(11)に代入し、速度分布の表示式

(7)を利用すれば、体積保存則は層平均量を用いて次式のように書くことができる。

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U_1 h_1) = w_{e,1} - w_{e,1} \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここに、 $h_1 = s - h$  は第1層の層厚である。

ここで、連行速度について考察を加える。式(13)<sub>2</sub>の右辺は第1、第2項が密度界面の運動を表わし、 $w_e$ はそれを超えて上・下層の流質が分離して他の層へ混入する速度を表わす。この速度は式(13)の定義によれば流体粒子の速度であり、これを直接計測するのが最も根元的である。しかし、そのためには界面と同様に運動している座標から眺めねばならないので、通常不可能である。したがって、 $w_e$ は式(14)の左辺の量を計測して得られるのが普通である。このときには体積変化に基づいているので、式(14)で得られる連行速度は厳密に言えば体積型の連行速度といえる。また、式(14)のみでは $w_{e,1}$ と $w_{e,1}$ とを独立に計測することはできず、そのためには質量保存則を待つ必要がある。しかし本論文は連行速度の計測が主目的でなく、それを考慮した成層流れの挙動を解明することが主目的であるので、連行速度については次のような経験則を導入することにする。

連行現象は乱れによって生ずると考えられ、それを記述する巨視的な代表量は主流の速度差である。ここでは代表速度として平均流速をとる。連行量自体は流れの方向と関係なく出現し、また、連行は速度の遅い層から速い層に向かって生ずると考える。ここでは2層間における正負の連行の和として全体の輸送量が定まると考えているので、1方向の輸送を考える場合には片方の層は停止していると考えてよい。したがって次式が成立する。

$$w_{e,1} = E|U_1|, \quad w_{e,1} = E|U_2| \quad \dots\dots\dots(15)$$

ここに、 $E$ は連行係数である。式(15)を用いて、式(14)は最終的には次のように書き直される。

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U_1 h_1) = E(|U_1| - |U_2|) \quad \dots\dots\dots(16)$$

式(15)の形式による連行量の表現につき、著者の考えを述べておく。上下方向への運動の総和として、第1層と第2層との連行量は式(16)の右辺で示される。したがって、 $|U_1| = |U_2|$ のとき連行量は0である。体積の保存則を考える場合には、界面位置の上昇あるいは下降により連行速度が判定される。したがって、連行量が0であることは界面の位置が変化しないことを表わす。この結果は、2層の速度が同一方向のときは混乱なく了解されるであろう。2層の速度が逆方向のときには、界面付近には見掛け上大きな相対速度差が出現する。しかし、おのおのの層が有している速度の絶対値、すなわち乱れの強さは同一であり、この乱れ速度が鉛直上向きになる確率と鉛直下向きになる確率は等しいと考えるのが自然である。すなわち、同量の輸送が上下方向に生じ、結果

として界面位置は変化しない。これは水層内の2層系でおおのこの層に乱れを与えた場合には容易に連想できることであり、式(15)は単にせん断流れの場合のみでなく、こうした場合を含み得る記述と考えた次第である。

さらに、速度の絶対値が等しく界面が移動しない場合においても、変動成分による物質の移動は生じ得る。この点は質量保存則における連行量の表現に現われ、後述の式(20)はこうした物質輸送を表わし得る形式となっている。

式(15)の形式の仮説が結果に及ぼす影響については「あとがき」においても触れている。

相対速度で考える場合にも、各層の流れが逆向きの場合には困難がつきまとう。それは連行の方向をどのように与えるかである。速度の絶対値が大きい層へと連行が生ずると約束すると、等しい場合には定まらない。また、上層の速度がわずかに大きいと連行の方向は上向きであるが、何らかの原因で下層の速度の絶対値がわずかに増大し上層速度の値を上回ると、大量の連行がただちに反転して生ずることになり、非常に不安定な事象となる。これらの考察の上に立ち、本論文では式(15)の形を採用することとした。

**b) 質量保存則**

質量保存則の微分形式は次式で表わされる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \dots\dots(17)$$

ここに、 $c$ は質量濃度、 $K_x$ は $x$ 方向の渦動拡散係数、 $K_z$ は $z$ 方向の渦動拡散係数である。密度と濃度が線形の変化を示す希薄溶液に対しては  $\partial c/\partial x = \partial \rho/\partial x$  と書き直すことができるので、式(17)は次式となる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \dots\dots(18)$$

これを第1層にわたって鉛直方向に積分する。前項と同様に積分の上・下限の変化を考慮すると次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_h^s \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_h^s \rho u dz - \rho_h(w_{e_{11}} - w_{e_{12}}) = \nu_1^2 K_x H \dots\dots(19)_1$$

ここに、

$$\nu_1^2 K_x H \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_x \int_h^s \rho dz - K_x \rho_s \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + K_x \rho_h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \int_h^s \rho \frac{\partial K_x}{\partial x} dz \dots\dots(19)_2$$

また、溶質の空中への放出はないので  $(\partial \rho/\partial z)|_{z=s} = 0$  であり、界面での輸送は移流型で記述するので  $(\partial \rho/\partial z)|_{z=h} = 0$  を考慮している。

式(19)<sub>1</sub>の左辺第3項における  $\rho_h$  は第1界面  $z=h$  における密度を表わしている。しかしながら連行は界面からの分離現象を表わすので、第2層から第1層へ移行する水粒子とその逆の運動をする水粒子とでは密度が異なると考えるのが自然である。代表密度として層平均密度を考え、連行過程に関連する項を次式で表わす。

$$\rho_h(w_{e_{11}} - w_{e_{12}}) = \rho_2 w_{e_{11}} - \rho_1 w_{e_{12}} \dots\dots(20)$$

式(19)<sub>1</sub>、(20)と式(14)とを連立させれば  $w_{e_{11}}$  と  $w_{e_{12}}$  とを独立に知ることができる。

本論文における取扱いと同様に、各層からの連行を独立に考える形式は日野ら<sup>9)</sup>によっても行われている。彼らは連行速度を計測することを目的としているので上・下層の密度差に着目した定式化を行った。定常的な塩水くさびに沿う計測では、上層から下層への連行速度  $w_{e_{12}}$  は下層から上層への連行速度  $w_{e_{11}}$  の約1/2に達している。

次に、式(19)<sub>1</sub>の左辺第1項、第2項を層平均量で記述する。このとき式(16)の体積保存則を利用し、また、式(15)、(20)を用いると最終的に次式を得る。

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{h_1} E|U_1| - \frac{I_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \rho_1 \cdot \Delta u_1 \cdot h_1) \dots\dots(21)_1$$

ここに、

$$I_1 = \int_0^1 m_1(\eta_1) \cdot f_1(\eta_1) d\eta_1, \eta_1 = \frac{z-h}{s-h} \dots\dots(21)_2$$

である。 $I_1$ は密度分布と速度分布の断面内の相関を表わす係数であり、式(21)<sub>1</sub>の右辺第2項は1次元分散項である。 $x$ 方向の渦動拡散項は移流項に比べて小さいと考えられるので無視されている。流れ方向の拡散項を無視することは通例行われる簡略化である。物質の混合問題においては、断面内の速度および密度偏差に基づく分散項は渦動拡散項よりはるかに大きいことがわかっているので、この項を右辺第2項に残留させているわけである。

**c) 運動量保存則**

$x$ 方向の運動量保存則は次式で表わされる。

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \dots\dots(22)$$

漸変流を対象としているので、 $z$ 方向の運動量式は静水圧の式となる。ここに、質量力の $x$ 成分  $X$ は0であり、 $\epsilon_x$ 、 $\epsilon_z$ はそれぞれ $x$ 方向、 $z$ 方向の渦動粘性係数である。式(18)の両辺に  $u$  を乗じて式(22)の両辺に  $u$  を乗じると次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u w) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$+ \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + u \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (23)$$

ここで  $x$  方向の拡散項は式 (21) と同様に省略されている。

この式を第 1 層にわたって積分し、層平均量を用いた記述に直す。慣性項の総和は次式となる。

$$\begin{aligned} \text{慣性項} = & \rho_1 h_1 \left( \frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) + I_1 \frac{\partial}{\partial t} (h_1 \Delta \rho_1 \cdot \Delta u_1) \\ & + I_1 U_1 \frac{\partial}{\partial x} (h_1 \Delta \rho_1 \cdot \Delta u_1) + 2 I_1 h_1 \Delta \rho_1 \cdot \Delta u_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \\ & + I_2 \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 h_1 \Delta u_1^2) + I_3 \frac{\partial}{\partial x} (h_1 \Delta \rho_1 \cdot \Delta u_1^2) \\ & + \rho_2 (U_1 - U_2) E |U_1| \dots \dots \dots (24)_1 \end{aligned}$$

ここに新たに定義される分布関数の相関係数は次の 2 つである。

$$I_2 = \int_0^1 f_1^2 d\eta_1, \quad I_3 = \int_0^1 m_1 \cdot f_1^2 d\eta_1 \dots \dots \dots (24)_2$$

また、界面における運動量の輸送は次式で示される。

$$\rho_h u_h (w_{e_{11}} - w_{e_{12}}) = \rho_2 U_2 E |U_1| - \rho_1 U_1 E |U_2| \dots \dots \dots (24)_3$$

式 (24)<sub>3</sub> は  $\partial(\rho u w)/\partial z$  の項の積分において出現する  $\rho_h u_h w_h$  という項の内容である。この項をここでは  $\rho_h u_h w_h = \rho_2 U_2 w_{e_{11}} - \rho_1 U_1 w_{e_{12}}$  と考えている。すなわち、連行される水塊は出発前の層の平均速度を有して他の層へ混入してゆく、と考えるのである。界面における流速  $u_h$  としては 2 層の平均流速の平均値を考えることもできるが、この場合には上下層の速度のある組合せにつき、運動量輸送に不自然な場合が出現するので、上記の考えに落ち着いた。

このように考えて加速度の表示を求める演算を進めると (式 (29) が最終結果)、式 (24)<sub>3</sub> の右辺第 2 項はその過程で相殺され消失する。したがって、上層から下層への連行は上層の加速度変化に対して影響しないことがわかる。同一の結果は、連行過程のすべての場合に成立する。

式 (24)<sub>1</sub> において  $\Delta$  を付した量のオーダーについて付言しておく、 $\Delta \rho_1 \ll \rho_1$  であるが、微係数としては  $\partial(\Delta \rho_1)/\partial x \sim \partial \rho_1/\partial x$  である。また、 $\Delta u_1 = u_s - u_h$  は第 1 層内の速度偏差の最大値であり、必ずしも微量ではない。

圧力項は次のように算定される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = & \frac{1}{\rho_1 h_1} \left[ -\frac{1}{2} g \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 h_1^2) - g \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_1 \Delta \rho_1) - p_h \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \frac{1}{2 h_1} f_{id} |U_1 - U_2| (U_1 - U_2) \\ & \text{(圧力)} \\ - & \frac{\rho_2}{\rho_1 h_1} (U_1 - U_2) E |U_1| - \frac{1}{\rho_1 h_1} \left[ I_1 \frac{\partial}{\partial t} (h_1 \Delta \rho_1 \cdot \Delta u_1) + I_1 U_1 \frac{\partial}{\partial x} (h_1 \Delta \rho_1 \cdot \Delta u_1) + 2 I_1 h_1 \Delta \rho_1 \cdot \Delta u_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \right. \\ & \text{(連行による付加応力)} \quad \left. \text{(運動量の分散による付加項)} \right] \\ & + I_2 \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 h_1 \Delta u_1^2) + I_3 \frac{\partial}{\partial x} (h_1 \Delta \rho_1 \cdot \Delta u_1^2) \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(z) = & \int_z^s \rho g dz = \int_z^s (\rho_1 + m_1(z) \Delta \rho_1) g dz \\ = & \rho_1 g (s - z) + \Delta \rho_1 \cdot g M_1(z) \end{aligned}$$

ここに  $M_1(z) = \int_z^s m_1(z) dz$  である。さらに

$$\int_h^s p(z) dz = \frac{1}{2} \rho_1 g h_1^2 + \lambda_1 \Delta \rho_1 \cdot g \dots \dots \dots (25)_1$$

ここに

$$\lambda_1 = \int_h^s M_1(z) dz \dots \dots \dots (25)_2$$

である。したがって、圧力勾配の積分項は次式となる。

$$\begin{aligned} \int_h^s -\frac{\partial p}{\partial x} dz = & -\frac{1}{2} g \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 h_1^2) \\ & - g \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_1 \Delta \rho_1) - p_h \frac{\partial h}{\partial x} \dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

ここに  $p_h$  は第 1 界面における圧力の強さで、 $p_h = \rho_1 g h_1 + \Delta \rho_1 \cdot g \cdot M_1(h)$  である。

渦動粘性項は次のように書き表わされる。まず、 $x$  方向の渦動粘性項を記す。

$$\begin{aligned} \int_h^s \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) dz = & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_h^s \rho \epsilon_x u dz \\ & - (\rho \epsilon_x u)_s \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + (\rho \epsilon_x u)_h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \int_h^s \frac{\partial \rho}{\partial x} \epsilon_x u dz - \frac{\partial}{\partial x} \int_h^s \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} \rho u dz \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

この表示は微係数同士の積から成る項は省略した結果である。 $x$  方向の代表スケールは第 1 層の層厚  $h_1$  に比し大と考えられるので、 $(\partial^2/\partial x^2)$  は  $\partial/\partial x$  に比し小であると考えられる。したがって、慣性項から出現する見掛けの運動量輸送項 (式 (24)<sub>1</sub> の右辺の第 3 項以下) に比べて、 $x$  方向の渦動粘性項 (式 (27)) を結果的には省略する。

$z$  方向の渦動粘性項は、水表面における風応力を無視すると第 1 界面における界面抵抗のみとなり次式で示される。ここでも微係数の積より成る項は省略する。

$$\int_h^s \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = -\rho_h \epsilon_{zh} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_h = -\tau_{iu} \dots \dots \dots (28)$$

$\tau_{iu}$  は第 1 界面におけるせん断応力であり、界面における輸送は移流型と考えているので渦動拡散項は消失する。

式 (23), (24), (26), (28) より第 1 層の運動量保存則は次式で示される。

ここに  $f_{iu}$  は第 1 界面における摩擦抵抗係数である。

(3) 第 2 層および第 3 層に対する基礎方程式

これらの層に対しても 2. (2) と同様な考察を行えばよい。層厚をそれぞれ  $h_2, h_3$  と書くと結果は以下のよりに表わされる。このとき第 1 層における考察で省略された、 $x$  方向の渦動粘性項ならびに拡散項は同様に省略されている。また、前述したように第 2 層では質量および運動量保存則の 2 式のみを考えればよい。

第 2 層に関する質量保存則は次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho_2 h_2) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 U_2 h_2) \\ &= -\rho_2 E|U_1| + (\rho_1 + \rho_3) E|U_2| - \rho_2 E|U_3| \\ & \quad - \text{II}_1 \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \rho_2 \cdot \Delta u_2 \cdot h_2) \dots \dots \dots (30)_1 \end{aligned}$$

ここに、係数の定義は次式で与えられる。

$$\text{II}_1 = \int_0^1 m_2 f_2 d\eta_2, \quad \eta_2 = \frac{z-j}{h-j} \dots \dots \dots (30)_2$$

第 2 層の運動量保存則は次式で示される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{\rho_2 h_2} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left[ p_h \cdot h_2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \rho_2 g h_2^2 + \lambda_2 g \Delta \rho_2 \right] + p_h \frac{\partial h}{\partial x} - \rho_j \frac{\partial j}{\partial x} \right\} \\ & \quad + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{f_{iu}}{2 h_2} |U_1 - U_2| (U_1 - U_2) \\ & \quad - \frac{f_{it}}{2 h_2} |U_2 - U_3| (U_2 - U_3) \\ & \quad + \frac{E|U_2|}{\rho_2 h_2} [\rho_1 (U_1 - U_2) - \rho_3 (U_2 - U_3)] \\ & \quad - \frac{1}{\rho_2 h_2} \left[ \text{II}_1 \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \rho_2 \cdot \Delta u_2 \cdot h_2) \right. \\ & \quad \left. + \text{II}_1 U_1 \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \rho_2 \cdot \Delta u_2 \cdot h_2) \right. \\ & \quad \left. + 2 \text{II}_1 \Delta u_2 \cdot \Delta \rho_2 \cdot h_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. + \text{II}_2 \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 \Delta u_2^2 \cdot h_2) + \text{II}_3 \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \rho_2 \cdot \Delta u_2^2 \cdot h_2) \right] \\ & \dots \dots \dots (31) \end{aligned}$$

式 (31) の右辺の各項の順序は式 (29) と同一である。

ここに、

$$\begin{cases} p_j = \rho_1 g h_1 + \Delta \rho_1 \cdot g M_1(h) + \rho_2 g h_2 + \Delta \rho_2 \cdot g M_2(j) \\ M_2(z) = \int_z^h m_2(z) dz, \quad \lambda_2 = \int_j^h M_2(z) dz \\ \text{II}_2 = \int_0^1 f_2^2 d\eta_2, \quad \text{II}_3 = \int_0^1 m_2 f_2^2 d\eta_2 \end{cases} \dots \dots \dots (32)$$

である。 $f_{it}$  は第 2 界面における摩擦抵抗係数である。

次いで第 3 層に関する基本式を提示する。第 3 層の体積保存則は次式となる。

$$\frac{\partial h_3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U_3 h_3) = -E|U_2| + E|U_3| \dots \dots (33)$$

第 3 層の質量保存則は次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho_3 h_3) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_3 U_3 h_3) = -\rho_3 E|U_2| + \rho_2 E|U_3| \\ & \quad - \text{III}_1 \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \rho_3 \cdot \Delta u_3 \cdot h_3) \dots \dots \dots (34)_1 \end{aligned}$$

ここに、

$$\text{III}_1 = \int_0^1 f_3 m_3 d\eta_3, \quad \eta_3 = \frac{z-b}{j-b} \dots \dots \dots (34)_2$$

第 3 層の運動量保存則は次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_3}{\partial t} + U_3 \frac{\partial U_3}{\partial x} = \frac{1}{\rho_3 h_3} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left( p_j h_3 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \rho_3 g h_3^2 + \lambda_3 g \Delta \rho_3 \right) + p_j \frac{\partial h_3}{\partial x} - [\rho_3 g h_3 \right. \\ & \quad \left. + \Delta \rho_3 \cdot g M_3(b)] \frac{\partial b}{\partial x} \right\} - \frac{f_b}{2 h_3} |U_3| U_3 \\ & \quad + \frac{\rho_2}{\rho_3} \frac{f_{it}}{2 h_3} |U_2 - U_3| (U_2 - U_3) \\ & \quad - \frac{\rho_2 E}{\rho_3 h_3} |U_3| (U_3 - U_2) \\ & \quad - \frac{1}{\rho_3 h_3} \left[ \text{III}_1 \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \rho_3 \cdot \Delta u_3 \cdot h_3) \right. \\ & \quad \left. + \text{III}_1 U_3 \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \rho_3 \cdot \Delta u_3 \cdot h_3) \right. \\ & \quad \left. + 2 \text{III}_1 \Delta \rho_3 \cdot \Delta u_3 \cdot h_3 \frac{\partial U_3}{\partial x} + \text{III}_2 \frac{\partial}{\partial x} (\rho_3 \Delta u_3^2 \cdot h_3) \right. \\ & \quad \left. + \text{III}_3 \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \rho_3 \cdot \Delta u_3^2 \cdot h_3) \right] \dots \dots \dots (35)_1 \end{aligned}$$

記号の定義は次式である。

$$\begin{cases} M_3(z) = \int_z^j m_3(z) dz, \quad \lambda_3 = \int_b^j M_3(z) dz \\ \text{III}_2 = \int_0^1 f_3^2 d\eta_3, \quad \text{III}_3 = \int_0^1 m_3 f_3^2 d\eta_3 \end{cases} \dots \dots \dots (35)_2$$

3. 2 層流における従来例との比較

最初に 2 層系における未知量の数について触れておく。この場合の未知量は上・下層それぞれの密度および速度の 4 個に加えて、水面と界面の位置が未知であり、合計 6 個の未知量がある。したがって、上・下層でそれぞれ体積・質量・水平方向の運動量の保存則を考える必要がある。

(1) 下層の基本式について

2 層系においては第 1 層が上層となり、この層の基本式は 2. (2) のものと同一である。すなわち、式 (16)、(21)、(29) である。

下層については 3 層系の場合の第 3 層の方程式を考え、添字の 2 を 1 に、3 を 2 に置換すればよい。圧力項においては  $p_j$  を  $p_h$  に、 $p_h$  を  $p_s=0$  に置換すること

になる。

式 (33), (34), (35) を書き直すと次式となる。

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U_2 h_2) = -E|U_1| + E|U_2| \dots\dots\dots(36)_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_2 h_2) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 U_2 h_2) = -\rho_2 E|U_1| + \rho_1 E|U_2| - \Pi_1 \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \rho_2 \cdot \Delta u_2 \cdot h_2) \dots\dots\dots(36)_2$$

$$\Pi_1 = \int_0^1 f_2 m_2 d\eta_2, \quad \eta_2 = (z-b)/(h-b) \dots\dots\dots(36)_3$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} &= \frac{1}{\rho_2 h_2} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} (p_k h_2 + \frac{1}{2} \rho_2 g h_2^2 + \lambda_2 g \Delta \rho_2) + p_k \frac{\partial h_1}{\partial x} \right. \\ &- [\rho_2 g h_2 + \Delta \rho_2 g M_2(b)] \frac{\partial h}{\partial x} \left. \right\} - \frac{f_b}{2 h_2} |U_2| U_2 \\ &+ \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{f_i}{2 h_2} |U_1 - U_2| (U_1 - U_2) \\ &+ \frac{\rho_1 E}{\rho_2 h_2} |U_2| (U_1 - U_2) \\ &- \frac{1}{\rho_2 h_2} \left[ \Pi_1 \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \rho_2 \cdot \Delta u_2 \cdot h_2) + \Pi_1 U_2 \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \rho_2 \cdot \Delta u_2 \cdot h_2) \right. \\ &+ 2 \Pi_1 \Delta \rho_2 \cdot \Delta u_2 \cdot h_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} + \Pi_2 \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 \Delta u_2^2 \cdot h_2) \\ &\left. + \Pi_3 \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \rho_2 \cdot \Delta u_2^2 \cdot h_2) \right] \dots\dots\dots(36)_4 \end{aligned}$$

ここに、 $M_2, \lambda_2, \Pi_2, \Pi_3$  は式 (32) における定義と同意である。

(2) 連行に伴う付加応力に関する考察

従来の通説によれば、連行に伴う付加応力は界面抵抗係数  $f_i$  を  $2E$  だけ割増すことによって評価できるとされている。また、式 (29) および式 (36) の形式で書き表わした場合に、上・下層で連行の影響が符号を変えただけの形で現われる。式 (29), (36) をみると、この両者はともに正しくないことがわかる。これは従来の考察がエネルギー式を対象として論じられ、連行に伴う運動量交換の過程が忠実に反映されていなかったゆえと考えられる。

まず、連行に伴う付加摩擦係数を上層についてみる。上層に関する付加摩擦係数  $f_{i_m1}$  は式 (29) の右辺第4項と第5項との比に基づいて次式で与えられる。

$$f_{i_m1} = \frac{2(\rho_2/\rho_1)E|U_1|}{|U_1 - U_2|} \simeq \frac{2E|U_1|}{|U_1 - U_2|} \dots\dots\dots(37)$$

したがって、 $f_{i_m1} = 2E$  となるのは  $U_2 = 0$  のときのみである。

下層に関する付加摩擦係数  $f_{i_m2}$  は、式 (36)<sub>4</sub> の右辺

第8項と第9項より

$$f_{i_m2} = \frac{2E|U_2|}{|U_1 - U_2|} \dots\dots\dots(38)$$

となる。 $U_2 = 0$  の場合には下層への混入はなく、下層における加速度は変化しない。

特別な例として塩水くさびが停止している場合を取り上げてみよう。連行を考慮する場合には上層への連行量を補償する流れが下層に存在するので、厳密な意味で  $U_2 = 0$  が成立するのはくさびの先端位置のみである。したがって、 $U_2 = 0$  とはおかず、 $|U_2| \simeq 0$  である。このとき式 (37), (38) より

$$f_{i_m1} \simeq 2E, \quad f_{i_m2} \simeq 0 \dots\dots\dots(39)$$

である。したがって、界面の上下において運動量式の左辺の加速度項に与える効果が異なり、界面は  $x$  の負の方向に移動する。これがすなわち連行を生む要因であり、この補償流れにより底面でのせん断応力の変化による加速度への寄与分が発生し、全体としてバランスすることになる。

ここで注意すべきは、上述の議論はすべて加速度の形に変化した後での議論であるので、界面の上下で不連続が生じたものである。体積・質量・運動量の形式においては、界面における量は界面の上下で同一である。

このようにみえてくると、いままでに提示されていた式には種々不明瞭な点が存していたことがわかる。たとえば著者による「密度流の水利」新体系土木工学第22巻、技報堂出版、pp. 128~130, pp. 138~139, p. 142の2層系に関する記述にも現段階で考えると誤りがみられ、修正する必要がある。また、従来の直接の例として須賀<sup>7)</sup>により用いられた基礎式を参考に掲げる。記号は今回用いたもの書き改めてある。

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q_1}{\partial x} = E|U_1 - U_2| \dots\dots\dots(a)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q_2}{\partial x} = -E|U_1 - U_2| \dots\dots\dots(b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 h_1) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 Q_1) = \rho_2 E|U_1 - U_2| \dots\dots\dots(c)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = D_X \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2} \dots\dots\dots(d)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{U_1}{g} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + i_{f1} - i_0 = 0 \dots\dots\dots(e)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{U_2}{g} \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (1-\epsilon) h_1 \\ + \frac{\partial h_2}{\partial x} + i_{f2} - i_0 = 0 \dots\dots\dots(f) \end{aligned}$$

ここに、 $i_{f1} = \tau_i/\rho_1 g h_1 = f_i(U_1 - U_2)|U_1 - U_2|/2 g h_1$ ,  $i_{f2} = f_b U_2|U_2|/(g h_2) - f_i(1-\epsilon)(U_1 - U_2)|U_1 - U_2|/2 g h_2$ ,  $\epsilon = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$  であり、 $B$  は水路幅、 $Q$  は流量、 $i_0$  は底

勾配,  $D_X$  は分散係数であり  $D_X=5.93 \text{ au}_* h_2$  という Elder 型も考えるとしているが実際の運用では定数としている。

式 (a)~(f) は長方形断面水路を対象としており, 基本的には今回の解析の対象と同一といつてよい。

連行に関しては下層から上層への 1 方向のみを考え, 相対速度差に比例すると考えている。この方式では上・下層の流向が異なるときに合理的な定式化となり得ない。また, 分散係数  $D_X$  の内容については分布則との関連が不明 (対数則を援用) である。また, 式 (e), (f) における連行の効果は陽の形では示されていず, 他の原則の導入により  $f_i$  を  $2E$  だけ割増すという方式が考えられている。これらの点については本論文の結果は統一的な解釈を与えている。

#### 4. ま と め

本論文の考察により得られた結果は次のようにまとめることができる。

(1) 各層における速度および密度の分布を考慮した基本方程式が 3 層系に対して得られた。中間層である第 2 層においては, 質量および運動量の分散項が見掛けの質量輸送項および見掛けの運動量輸送項として重要な働きをするものと考えられる。

(2) 連行が存在するとき, 加速度が変化するのは被混入側の層であり, 混入側の層の加速度は変化しない。

(3) 連行に伴う界面の付加摩擦抵抗係数はすべての場合について連行係数の 2 倍ではなく, 上・下層の速度も関与して係数値が決定される。

(4) 連行に伴う加速度は界面の上下でつり合っていない。これは連行に伴う補償流の発生を表わしており, 底面の影響と合わせて層全体で均衡する。

#### 5. あとがき

おもに塩水くさびを対象として論じられてきた成層流の 1 次元解析にはいまだ不十分なところがみられる。特

に, 連行現象については近年は考慮される場合も多くなってきたが, 概念把握に混乱が残されていると感じられたので, この問題を中心に本論文を作成した。本論文の考え方は平面的な広がりを持つ準 3 次元的解法にはただちに拡張できる。本論文の中で仮説として提案されているのは, 流向が異なる 2 層間での連行である。これに基づいて導かれる今回の結論は従来の結果に比べてより合理的と考えられ, 前述のような在来の混乱を収束させる方向のものと考えられるので, 本論文の提案を行うこととした。仮説自体の直接的な検証は別の機会に行う予定であるが, この件に関して影響を受けるのは結論の (3) 項の数値のみであり, 本質的な部分ではないと考えられる。

従来の観測例との比較に関していえば, 実験室レベルでの観測では連行の効果は一般には弱く, 異なる理論に対して有意な判定規準を与えないと考えられる。現実の河道における検討はそれ自体で膨大な作業量となるため, 3 層モデルを実際に使用した後における効果の判定は別の機会に譲りたい。

原稿をとりまとめる段階において, 埼玉大学建設基礎工学科 浅枝 隆氏, 東京大学応用水理研究室 池内幸司君との討議は有用であった。記して謝意を表わす。

#### 参 考 文 献

- 1) 本間 仁・安芸皎一編: 物部水理学, 岩波書店, pp. 638~643, 1962.
- 2) 須賀堯三: 河川における塩水くさびと内部渦の特性, 第 23 回水理講演会論文集, pp. 369~374, 1979.
- 3) 須賀堯三: 感潮河川における塩水くさびの水理に関する基礎的研究, 土木研究所資料 1537 号, pp. 190~197, 1979.
- 4) 日野幹雄・灘岡和夫: “区界積分法”による塩水くさびの一般解法, 第 24 回海岸工学講演会論文集, pp. 549~552, 1977.
- 5) 玉井信行: 密度流の水理, 新体系土木工学第 22 巻, 技報堂出版, p. 7, 1980.
- 6) Hino, M., N.S. Hung and K. Nakamura: Entrainment and friction at the interface of salt wedge, Second Int. Symp. on Stratified Flows, Vol. 2, 20 p., 1980.
- 7) 須賀堯三: 一次元二層不定流の数値計算, 第 24 回海岸工学講演会論文集, pp. 544~548, 1977.

(1981.8.14・受付)