

## 等分布上縁載荷による単純支持 I 形 断面部材の弾性安定

ON ELASTIC STABILITY OF SIMPLY SUPPORTED I-SECTION BEAM  
UNDER FULL UNIFORM LOAD ON TOP PERIMETER

能 町 純 雄\*・角 田 与 史 雄\*\*・高 橋 義 裕\*\*\*

By Sumio NOMACHI, Yoshio KAKUTA and Yoshihiro TAKAHASHI

### 1. 結 言

薄肉 I 形断面部材は、構造物を構成する頻度の高い部材である。したがって、この種の断面部材の全体的および局部的座屈問題は、種々の角度から広く検討されている。しかし、これらの検討は座屈の原因となる座屈前応力分布が、部材軸方向に一定で、部材の幅方向にのみ変化する応力分布を仮定しているものが大部分である。これらの最近の研究については、一様圧縮、一様曲げ、一様残留応力を対象とし、有限帯板法を用いる座屈解析が広範に行われている<sup>1)~13)</sup>。しかし、座屈前応力分布が二次元的に変化し、かつすべての二次元応力成分を含む座屈問題も少なくない。その一例として、上フランジに直接荷重が載荷される I 形断面部材の座屈問題を考えることができる。このことについての既往の研究を略述すれば、ポテンシャルエネルギーを用いての K. Girkmann<sup>1)</sup>の研究、上下フランジをはりに置き換えポテンシャルエネルギーを用いての M. Fischer<sup>2)</sup>の研究、有限要素法を用いての K.C. Rokey ら<sup>3)</sup>の研究、作用荷重により生ずる二次元応力をスパン中央での最大曲げ応力で代表させ有限帯板法により解析する T.R.G. Smith ら<sup>4)</sup>の研究、はり理論による応力分布を座屈前応力分布とし差分により解析する Y.L. Tien ら<sup>5)</sup>の研究などがある。また、実験的研究（主として静的集中荷重を上フランジに作用させる）としては、A. Bergfelt<sup>6)</sup>、T. Höglund<sup>7)</sup>、C. Chern<sup>8)</sup>、M. Herzog<sup>9)</sup> らの研究がある。しかし、これらの研究のうち K. Girkmann<sup>1)</sup>の研究のみが、二次元弾性論的座屈前応力分布を考慮しているにすぎないが、彼の導いた式は工学的に利用するには、大変複雑す

ぎる。

本論文では、任意に分布する二次元応力の全成分を座屈前応力分布とする帯板要素の要素式を設定し、この要素式をくみ上げ薄肉断面部材の弾性座屈を検討することを目的としているが、ここでは等分布上縁載荷を受ける単純支持 I 形断面部材を取り上げその弾性座屈に限定して検討を行うものである。

### 2. 有限帯板法による座屈解析

#### (1) 二次元全応力成分を座屈前応力分布とする帯板要素式

有限帯板法による解析では、まず折板構造物を構成する各平板を幅方向に多数の帯板要素に分割し、さらに力学的にこれを再構成し解析を行うが、これを座屈問題に用いるためには、部材の幅方向と軸方向とに変化するすべての二次元応力分布で座屈前応力分布が与えられる帯板要素の要素剛性方程式を設定する必要がある。

図-1 (a) に示す等分布上縁載荷を受ける I 形断面部材の弾性座屈を有限帯板法により解析する。図-1 (a) の断面から取り出された図-1 (b) に示す幅  $b$  の帯板要素について考える。座屈前応力分布を図-1 (c) に示す  $(\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau_{xy}^*)$ 、座屈変形に伴う面外変位  $w$ 、面内変位  $u, v$  とし、それぞれ帯板要素の短辺方向への分布を次のように仮定する。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \\ \tau_{xy}^* \end{Bmatrix} = (1-\eta) \begin{Bmatrix} \sigma_x^{*r,r+1} \\ \sigma_y^{*r,r+1} \\ \tau_{xy}^{*r,r+1} \end{Bmatrix} + \eta \begin{Bmatrix} \sigma_x^{*r+1,r} \\ \sigma_y^{*r+1,r} \\ \tau_{xy}^{*r+1,r} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1. a)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3\eta^2+2\eta^3 & \eta-2\eta^2+\eta^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \\ b\theta_r \end{Bmatrix}$$

\* 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科  
\*\* 正会員 工博 北海道大学助教授 工学部土木工学科  
\*\*\* 正会員 工修 北海学園大学講師 工学部土木工学科

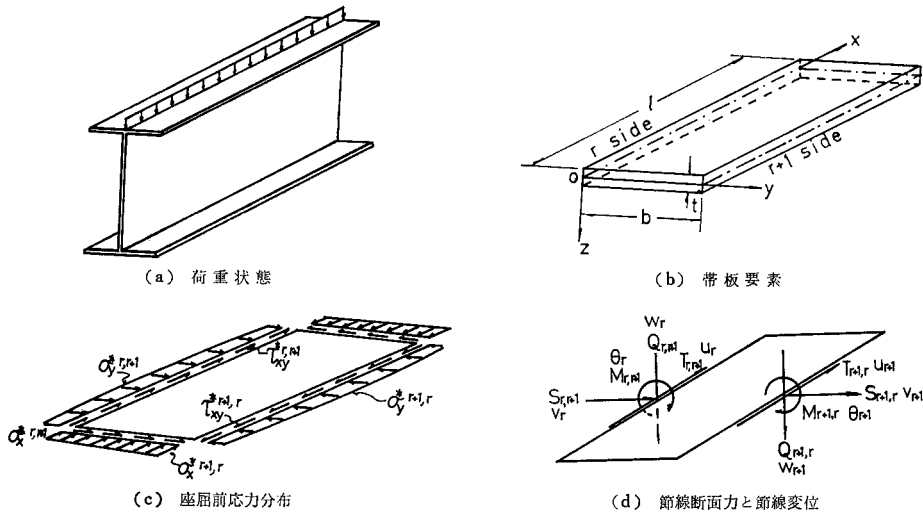


図-1

$$+ \begin{bmatrix} \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\eta^2 - 2\eta^3 & -\eta^2 + \eta^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r+1} \\ v_{r+1} \\ w_{r+1} \\ b\theta_{r+1} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (1 \cdot b)$$

ここで  $\eta = y/b$  であり、 $\sigma_x^{*r,r+1}, \dots, \tau_{xy}^{*r+1,r}, u_r, \dots, b\theta_{r+1}$  等は、帯板要素の節線  $r$  および  $r+1$  に作用

する座屈前応力分布，節線変位である。また節線変位に対応する節線断面力を  $T, S, Q, M$  で表わし、 $T, S, Q, M$  はそれぞれの節線における単位長さ当たりの  $x$  方向の面内力， $y$  方向の面内力，せん断力および曲げモーメント（図-1 (d) 参照）を示すものとする。このとき帯板要素の座屈変形に伴うトータル・ポテンシャルエネルギー  $\pi$  は、変形が微小で面外と面内の変形が連成しないものとするとき次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} D \int_0^l \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \\ & + \frac{1}{2} N \int_0^l \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2(1-\nu) \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} \right] dx dy \\ & - \frac{1}{2} t \int_0^l \int_0^b \sigma_x^* \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy \\ & - \frac{1}{2} t \int_0^l \int_0^b \sigma_y^* \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ & - t \int_0^l \int_0^b \tau_{xy}^* \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dx dy \\ & - \int_0^l \{ (T_{r,r+1} u_r + S_{r,r+1} v_r + Q_{r,r+1} w_r + M_{r,r+1} \theta_r) \\ & + (T_{r+1,r} u_{r+1} + S_{r+1,r} v_{r+1} + Q_{r+1,r} w_{r+1} + M_{r+1,r} \theta_{r+1}) \} dx \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここで  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ ， $N = \frac{Et}{1-\nu^2}$  である。

式 (1・a) および (1・b) を式 (2) に代入し  $\pi$  の停留原理を用いることにより節線断面力の式が次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} T_{r,r+1} \\ S_{r,r+1} \\ Q_{r,r+1} \\ M_{r,r+1} \\ T_{r+1,r} \\ S_{r+1,r} \\ Q_{r+1,r} \\ M_{r+1,r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & A_{15} & A_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & A_{25} & A_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 & A_{37} & A_{38} \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & 0 & 0 & A_{47} & A_{48} \\ A_{51} & A_{52} & 0 & 0 & A_{55} & A_{56} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & 0 & 0 & A_{65} & A_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{73} & A_{74} & 0 & 0 & A_{77} & A_{78} \\ 0 & 0 & A_{83} & A_{84} & 0 & 0 & A_{87} & A_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \\ \theta_r \\ u_{r+1} \\ v_{r+1} \\ w_{r+1} \\ \theta_{r+1} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

マトリックスの要素は、付録-1 に示す。

(2) 長軸両端単純支持帯板要素の要素剛性方程式

帯板要素の  $x$  軸方向両端を単純支持と仮定する。したがって式 (3) で示される各節線断面力、節線変位、座屈前応力分布は  $x$  に関し次のようなフーリエ級数展開できる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{\infty} T_i \cos \frac{i\pi}{l} x, & S &= \sum_{i=1}^{\infty} S_i \sin \frac{i\pi}{l} x \\ Q &= \sum_{i=1}^{\infty} Q_i \sin \frac{i\pi}{l} x, & M &= \sum_{i=1}^{\infty} M_i \sin \frac{i\pi}{l} x \\ u &= \sum_{i=1}^{\infty} U_i \cos \frac{i\pi}{l} x, & v &= \sum_{i=1}^{\infty} V_i \sin \frac{i\pi}{l} x \\ w &= \sum_{i=1}^{\infty} W_i \sin \frac{i\pi}{l} x, & \theta &= \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \sin \frac{i\pi}{l} x \\ \sigma_x^* &= \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{xj}^* \sin \frac{j\pi}{l} x, & \sigma_y^* &= \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{yj}^* \sin \frac{j\pi}{l} x \\ \tau_{xy}^* &= \sum_{j=1}^{\infty} \tau_{xyj}^* \cos \frac{j\pi}{l} x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

と展開する。式 (4) を式 (3) に代入し、節線断面力  $T_{r,r+1}$  と  $T_{r+1,r}$  に対しては、 $\cos m\pi x/l$  を、その他の断面力に対しては、 $\sin m\pi x/l$  を乗じ  $0 \leq x \leq l$  で有限フーリエ変換を行う。したがって式 (3) は、それぞれのフーリエ係数による関係式に変換され次のように表わすことができる。

$$\{f_m\}_e = [K_m]_e \{\delta_m\}_e - \sum_{i=1}^{\infty} [K_i^G]_e \{\delta_i\}_e \dots(5)$$

本論文では、式 (5) を要素剛性方程式とよぶ。  $\{f_m\}_e$ 、 $\{\delta_m\}_e$  は、それぞれ帯板要素の節線断面力ベクトルと節線変位ベクトルであり、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \{f_m\}_e &= \{T_m^{r,r+1} \ S_m^{r,r+1} \ Q_m^{r,r+1} \ M_m^{r,r+1}/b \\ &\quad T_m^{r+1,r} \ S_m^{r+1,r} \ Q_m^{r+1,r} \ M_m^{r+1,r}/b\}^T \\ \{\delta_m\}_e &= \{U_m^r \ V_m^r \ W_m^r \ b\theta_m^r \ U_m^{r+1} \ V_m^{r+1} \\ &\quad W_m^{r+1} \ b\theta_m^{r+1}\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

また  $[K_m]_e$  は、要素剛性マトリックスを、 $[K_i^G]_e$  は、要素安定係数マトリックスを示す。

要素安定係数マトリックスは、要素剛性マトリックスを用い、単位の作用荷重により生ずる応力分布 (=座屈前応力分布) を求め、組み立てる。したがって式 (5) は、次のように書くことができる。

$$\{f_m\}_e = [K_m]_e \{\delta_m\}_e - \lambda \sum_{i=1}^{\infty} [K_i^G]_e \{\delta_i\}_e \dots(7)$$

ここで  $\lambda$  は、座屈荷重の大きさを与える指標である。式 (7) の各マトリックス要素は、付録-2 に示してある。

以上のことより、全要素を与えられた構造全体に組み上げ、全体の剛性方程式を組み立てる。したがって、座屈問題においては、次の同次式を扱うことになる。

$$[K_m] \{\delta_m\} - \lambda \sum_{i=1}^{\infty} [K_i^G] \{\delta_i\} = \{0\} \dots\dots\dots(8)$$

式 (8) より軸方向のフーリエ級数項 (座屈半波長の波数) を 1, 2, 3, ...,  $n$  項までとる場合は、次の固有方程式となる。

$$\left[ \begin{array}{cccccc} K_1 & & & & & \\ & K_2 & 0 & & & \\ & & & \cdot & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & K_n \end{array} \right] - \lambda \left[ \begin{array}{cccccc} K_1^G & K_2^G & \cdot & \cdot & \cdot & K_n^G \\ K_1^G & K_2^G & \cdot & \cdot & \cdot & K_n^G \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_1^G & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_n^G \end{array} \right] = 0 \dots\dots\dots(9)$$

式 (9) の根、すなわち固有値の中で最小の固有値が、座屈荷重の大きさを与える指標となる。座屈モードは、式 (9) の最小固有値に対する固有ベクトルとして求める。

3. 数値計算結果と考察

荷重載荷状態としては、頻度の多い上縁荷荷で座屈荷重が最も低い値を与えると判断されるので数値計算は、両端単純支持 I 形断面部材上縁に等分布荷重が作用する場合について行った。図-2 で示される各断面諸元と辺長比  $l/H$  と対し、表-1 に示される各ケースを対象とし数値計算を遂行した。

(1) 解の収束状態

幅方向の帯板要素分割数、座屈前応力分布を求めるた

表-1 数値計算パラメーター値一覧

Case	$t_f/t_w$	H/B	H/ $t_w$
1	1.0	2	50
2	1.5		
3	2.0		
4	1.0	3	
5	1.5		
6	2.0		
7	1.0	4	
8	1.5		
9	2.0		
10	1.0	2	
11	1.5		
12	2.0		
13	1.0	3	
14	1.5		
15	2.0		
16	1.0	4	
17	1.5		
18	2.0		
19	1.0	2	150
20	1.5		
21	2.0		
22	1.0	3	
23	1.5		
24	2.0		
25	1.0	4	
26	1.5		
27	2.0		
28	1.0	2	
29	1.5		
30	2.0		
31	1.0	3	
32	1.5		
33	2.0		
34	1.0	4	
35	1.5		
36	2.0		

めに使用したフーリエ級数の項数、軸方向の座屈半波長の波数による解の収束性を次のように検討した。すなわち、i) フランジ中心間距離  $H$  の分割数  $n_H$ 、ii) 圧縮部フランジ幅  $B$  の分割数  $n_{fc}$ 、iii) フーリエ級数の項

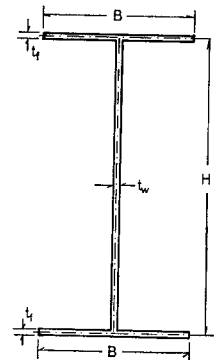


図-2 I 形断面部材

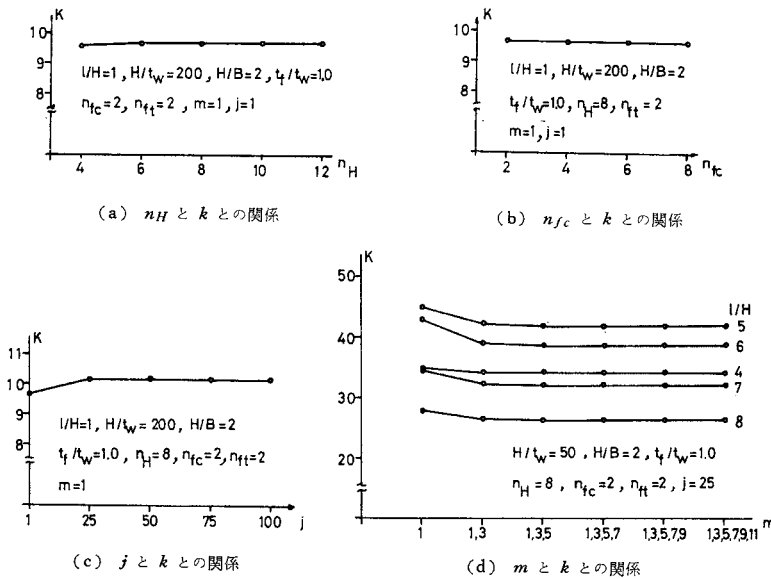


図-3

数  $j$ , iv) 座屈半波長の波数  $m$ , の4項目について行った。ただし、解の収束性に与える影響が小さいと考えられる引張部フランジの分割数  $n_{ft}$  は2とした。

i) フランジ中心間距離  $H$  の分割数  $n_H$

$j=m=1, n_{fc}=n_{ft}=2$  に固定し、分割数  $n_H$  と座屈係数  $k$  (後述式 (10) で定義) の関係を調べた。 $l/H=1, H/t_w=200, H/B=2, t_f/t_w=1.0$  の場合に対する結果は、図-3 (a) に示してある。したがって  $H$  の分割数  $n_H$  は、8 で十分収束しているものと考えられる。

ii) 圧縮部フランジ幅  $B$  の分割数  $n_{fc}$

$n_H=8$  とし、i) の場合と同様に  $l/H=1, H/t_w=200, H/B=2, t_f/t_w=1.0$ , および  $j=m=1$  とし、圧縮部フランジ幅  $B$  の分割数  $n_{fc}$  と座屈係数  $k$  の関係を 図-3 (b) に示す。同図より実用上十分な精度が  $n_{fc}=2$  で得られると判断できる。

iii) フーリエ級数の項数  $j$

i), ii) より  $n_H=8, n_{fc}=2$  で実用上十分な精度で座屈係数  $k$  が得られると考えられる。座屈前応力分布は  $x$  方向のフーリエ級数で与えられ、その項数  $j$  が応力分布の精度を決定するため、項数  $j$  と座屈係数  $k$  の精度は密接に関係する。両者の関係を 図-3 (c) に示す。ただし、 $l/H=1, H/B=2, H/t_w=200, t_f/t_w=1.0, m=1$  である。同図より  $j$  を25項以上とれば  $k$  は十分に収束していると判断できる。したがって  $j=25$  とした。

iv) 座屈半波長の波数  $m$

座屈半波長の波数  $m$  については、局部座屈領域から横倒れ座屈領域へ移る遷移領域付近が最も座屈係数  $k$  に大きい影響を与えると思われるので  $H/t_w=50, H/B=2, t_f/t_w=1.0, n_H=8, n_{fc}=2, j=25$  の場合に対し、

辺長比  $l/H$  が4, 5, 6, 7, 8 (図-5 参照) について、荷重分布がスパン中央に対称となっているため  $m$  は奇数項のみを取り、 $m=1, 1+3, (1+3+5), (1+3+5+7), (1+3+5+7+9+11)$  を用い座屈係数  $k$  を求め、その結果を 図-3 (d) に示す。

同図より  $m=(1+3+5)$  で十分収束していると判断できる。したがって  $m$  は5項までとした。

以上の結果より帯板要素数は、フランジ中心間距離  $H$  を8分割、上下の各フランジ部を2分割、座屈前応力分布のフーリエ級数の項数を25項、座屈半波長の波数を5項までとるこ

とにした。

## (2) 座屈係数 $k$

計算結果は、文献 14) で示される座屈係数  $k$ , すなわち

$$q_{cr} = k \frac{D_w \pi^2}{l^2} \dots \dots \dots (10)$$

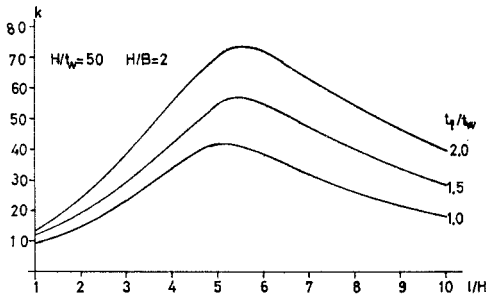
$$\text{ただし } D_w = \frac{Et_w^3}{12(1-\nu^2)}$$

を用い整理した。

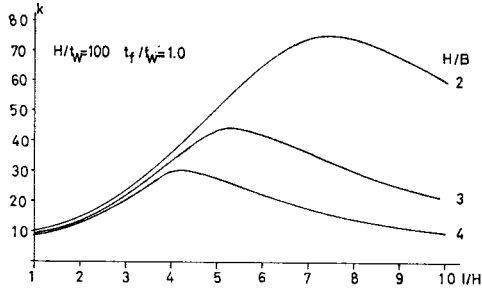
文献 2) の数値計算に用いられた断面形状および辺長比の一例 ( $H=100 \text{ cm}, B=25 \text{ cm}, t_w=0.7 \text{ cm}, t_f=3 \text{ cm}, l=10 \text{ m}$ ) について、式 (10) で定義される座屈係数  $k$  を用いて結果の比較を行った。文献 2) による  $k$  値は97.6、本解析手法による  $k$  値は94.5であった。全応力成分を考慮する本解析手法による  $k$  値の方が文献 2) による  $k$  値よりやや低めの値となっている。

式 (10) より  $(q l^2)_{cr} = k D_w \pi^2$  と変形できるが、 $(q l^2)_{cr}$  は曲げモーメントに対応する量である。したがって  $D_w \pi^2$  が一定 (断面形状一定) の場合、座屈係数  $k$  の値の変化は、中央点の曲げモーメントの値に比例する。

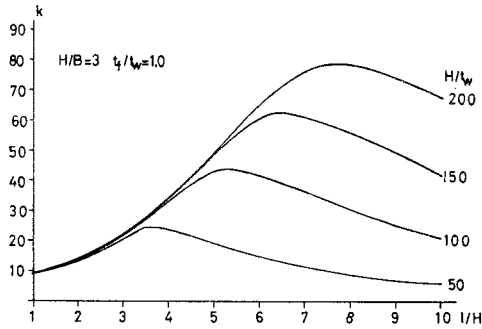
図-4 (a) は、フランジ厚  $t_f$  とウェブ厚  $t_w$  との比  $t_f/t_w$  を1.0, 1.5, 2.0 とし、他の断面パラメーターを一定とするときの  $k-l/H$  の関係を、図-4 (b) は、フランジ中心間距離  $H$  とフランジ幅  $B$  との比  $H/B$  を2, 3, 4 とし、他の断面パラメーターを一定とするときの  $k-l/H$  の関係を、図-4 (c) は、フランジ中心間距離  $H$  とウェブ厚  $t_w$  との比  $H/t_w$  を50, 100, 150, 200 とし、他の断面パラメーターを一定とするときの  $k-l/H$  の関係をそれぞれ示したものである。図-4 (a), (b), (c)



(a)  $H/t_w=50, H/B=2$



(b)  $H/t_w=100, t_f/t_w=1.0$



(c)  $H/B=2, t_f/t_w=1.0$

図-4 座屈曲線

に示される  $k$  値の変化は、それぞれのスパン長に対するスパン中央点の曲げモーメントの値の変化に比例するので、 $k$  値のピーク点に対するスパン長でこの断面を有する任意スパンの部材に対し、最大スパン中央曲げモーメントを与える。

図-5 は、図-4 (a) で示される  $t_f/t_w=1.0$  について、各  $l/H$  ごとのスパン中央での断面方向の座屈モードを示したものである。描かれた座屈モード(図-5)と  $k-l/H$  の関係(図-4)よりウェブの局部座屈領域は、 $l/H$  の増加とともに座屈係数  $k$  の値が増加する右上がりの部分であり、それに続く遷移領域は、座屈係数  $k$  のピーク部分であり、断面がそのまま横方向へ移動する横倒れ座屈領域は、 $l/H$  の増加とともに座屈係数  $k$  の値が減少する部分であることがわかる。

パラメーター  $H/t_w$  と  $H/B$  を一定とし  $t_f/t_w$  のみを変化させても  $k$  のピークを与える  $l/H$  の値は、ほとんど

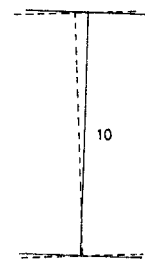
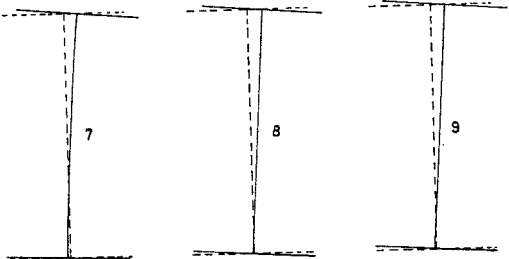
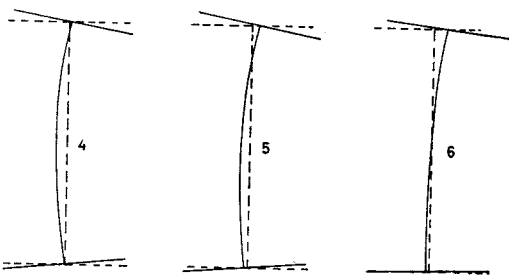
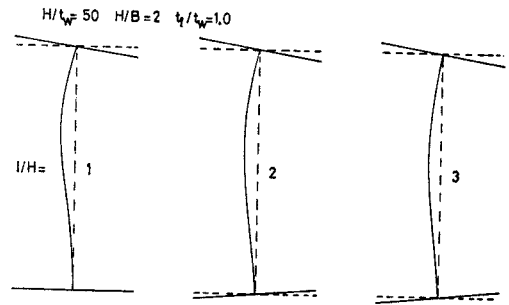


図-5 座屈モード ( $H/t_w=50, H/B=2, t_f/t_w=1.0$ )

ど移動せず、 $k$  の値がほぼ同一割合で大きくなっている(図-4(a))。  $H/t_w$  と  $t_f/t_w$  を一定とし  $H/B$  のみを変化させた場合(図-4(b))、 $k$  のピークは  $H/B$  の増加とともに左下方へ移動する。また  $H/B$  と  $t_f/t_w$  を一定とし  $H/t_w$  のみを変化させた場合(図-4(c))、 $k$  のピークは  $H/t_w$  の増加とともに右上方へ移動していくことがわかる。  $t_f/t_w$  が一定で  $H/t_w$  と  $H/B$  の値を変化さ

せてもその局部座屈領域において  $k$  の値は、ほとんど変化しないことがわかる。

以上より、局部座屈領域と横倒れ座屈領域とを分ける  $l/H$  の値は、その断面のパラメーター  $H/t_w$  と  $H/B$  により大きく移動する。すなわち  $H/t_w$  の値が大きく  $H/B$  の値が小さい場合には、 $k$  のピークを与える  $l/H$  の値は、右へ移動し、局部座屈領域が広がり、 $k$  のピーク値も上昇していく。

(3) 座屈荷重係数  $\bar{r}$  の近似式

図-6 で示される I 形断面部材の上フランジに等分布荷重が作用するとき、その横倒れ座屈荷重  $q_{cr}$  が文献 15) に次式のように与えられている。

$$q_{cr} = \frac{60 \pi^4 E}{l^4 (\pi^4 + 45)} \left\{ -\frac{1}{2} HI + \sqrt{\frac{H^2 I^2}{4} + \frac{\pi^4 + 45}{30 E} \left( C_1 I + \frac{C I l^2}{\pi^2} \right)} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここで

$$I = \frac{1}{6} B^3 t_f + \frac{1}{12} B t_w^3$$

$$C = \frac{E}{6(1+\nu)} (2 B t_f^3 + H t_w^3)$$

$$C_1 = \frac{1}{24} H^2 B^3 t_f$$

である。

さらに式 (11) 中、 $X = l^2 C / C_1$  とおいて変形すれば次のように表示できる<sup>16)</sup>。

$$(ql)_{cr} = r(X) \frac{\sqrt{E I C}}{l^2} \dots\dots\dots (12)$$

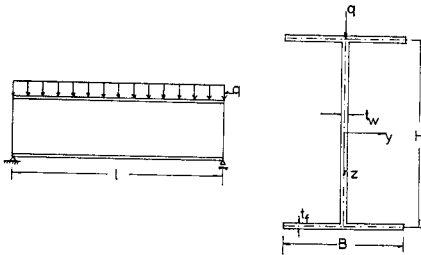


図-6 上縁載荷を受ける I 形断面部材

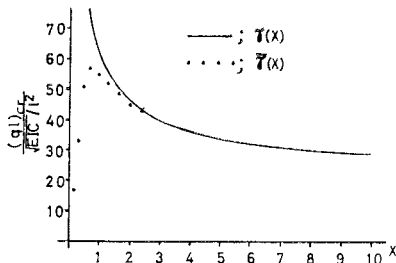


図-7 座屈荷重係数曲線

ただし

$$r(X) = \frac{60 \pi^4}{\pi^4 + 45} \frac{1}{\sqrt{X}} \cdot \left\{ \sqrt{1 + \frac{\pi^4 + 45}{30} \left( 1 + \frac{1}{\pi^2} X \right)} - 1 \right\} \dots\dots\dots (13)$$

(以下  $r(X)$  を座屈荷重係数とよぶ.)

さて本論文中式 (10) で整理した数値計算結果を式 (12) のように  $X (= l^2 C / C_1)$  のある関数  $\bar{r}(X)$  と  $\sqrt{E I C} / l^2$  との積

$$(ql)_{cr} = \bar{r}(X) \frac{\sqrt{E I C}}{l^2} \dots\dots\dots (14)$$

とし、局部座屈から横倒れ座屈を通して表わすことのできる  $\bar{r}(X)$  の形を見出すことにする。いま表-1 の Case 1 について  $X$  を横軸にとり、( $r(X)$ ,  $\bar{r}(X)$ ) の値を縦軸にとり ( $r$ ,  $\bar{r}$ )- $X$  の関係を示すと、図-7 のようになる (他の Case についても同様の結果が得られている)。図-7 は、 $X$  の値がある程度大きくなると  $\bar{r}(X)$  が  $r(X)$  に漸近する形となっている。したがって  $\bar{r}(X)$  の近似式として、次式が仮定できる。

$$\bar{r}(X) \approx (1 - e^{-h(X)}) r(X) \dots\dots\dots (15)$$

いま断面のパラメーターとして  $H/B$ ,  $H/t_w$ ,  $t_f/t_w$  の 3 個を選び、それぞれ  $q$ ,  $r$ ,  $s$  とする。基準断面のそれを  $q_0$ ,  $r_0$ ,  $s_0$  とし、さらに  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\xi$  を導入し、 $\zeta = q/q_0$ ,  $\eta = r/r_0$ ,  $\xi = s/s_0$  とおく。本論文では、基準断面として Case 36, すなわち  $q_0 = 4$ ,  $r_0 = 200$ ,  $s_0 = 2$ , を用いた。したがって  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\xi$  の計算範囲は、それぞれ  $0.5 \leq \zeta \leq 1.0$ ,  $0.25 \leq \eta \leq 1.0$ ,  $0.5 \leq \xi \leq 1.0$  となる。 $X (= l^2 C / C_1)$  を  $q_0$ ,  $r_0$ ,  $s_0$ ,  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $l/H$  を用いて示すと次のようになる。

$$X = \frac{4}{1+\nu} \cdot \frac{1+2 q_0 s_0^2 \zeta^2 \xi^3}{q_0^3 r_0^2 s_0 \zeta^3 \eta^2 \xi} \left( \frac{l}{H} \right)^2 = a n^2 \dots\dots (16)$$

ここで  $a = \frac{4}{1+4} \cdot \frac{1+2 q_0 s_0^2 \zeta^2 \xi^3}{q_0^3 r_0^2 s_0 \zeta^3 \eta^2 \xi}$ ,  $n = \frac{l}{H}$  である。

式 (15) 中の  $h(x)$  を  $n$  の関数  $h'(n)$  として次式のように仮定する。

$$h'(n) = \frac{A_1 n^4 + A_2 n^3 + A_3 n^2 + A_4 n + A_5}{n^2 + A_6} \dots\dots (17)$$

また、上式を  $X$  を用いて表わせば、式 (16) の関係より

$$h(X) = \frac{\frac{1}{\sqrt{a}} A_1 X^2 + A_2 X \sqrt{X} + A_3 \sqrt{a} X + A_4 a \sqrt{X} + a \sqrt{a} A_5}{X \sqrt{X} + A_6 a \sqrt{a}} \dots\dots\dots (18)$$

となる。

いま次のような  $\alpha$

$$\alpha = \zeta^{\nu_1} \cdot \eta^{\nu_2} \cdot \xi^{\nu_3} \dots\dots\dots (19)$$

ただし  $\nu_1 = -0.813$ ,  $\nu_2 = 0.571$ ,  $\nu_3 = 0.135$ , を導入し、表-1 で示される Case 1~Case 36 のすべてについて式

(15) が最もよく適合するように式 (18) 中の各係数を求めれば、次のようになる。

$$A_1 = 1.51/\alpha \quad A_2 = -0.93$$

$$A_3 = (-1.57/\alpha^4 + 110.10 \alpha^2 - 352.84 \alpha + 282.50) s^2$$

$$+ (5.09/\alpha^4 - 235.66 \alpha^2 + 743.62 \alpha - 583.23) s$$

$$- 3.46/\alpha^4 + 122.53 \alpha^2 - 383.29 \alpha + 297.02$$

$$A_4 = (20.02/\alpha^4 - 366.82 \alpha^2 + 1194.30 \alpha - 977.04) s^2$$

$$+ (-25.98/\alpha^4 + 744.74 \alpha^2 - 2398.09 \alpha$$

$$+ 1930.99) s + 11.90/\alpha^4 - 375.04 \alpha^2$$

$$+ 1203.18 \alpha - 964.46$$

$$A_5 = (-18.45/\alpha^4 + 256.72 \alpha^2 - 841.46 \alpha + 694.54) s^2$$

$$+ (20.89/\alpha^4 - 509.09 \alpha^2 + 1654.47 \alpha - 1347.76) s$$

$$- 6.30/\alpha^4 + 252.51 \alpha^2 - 819.34 \alpha + 664.61$$

$$A_6 = 4000 \alpha^3$$

与えられた各断面に対し、 $X$  を横軸に、 $\bar{r}(X)$  の近似式を縦軸にとり、その関係を 図-8 (a)~(d) の実線で示す。図中の・印は、 $\bar{r}(X)$  の値であり、破線は式 (13) で与えられる  $r(X)$  の値である。

次に  $\bar{r}(X)$  の近似値の精度を検討する。この検討は、絶対値相対誤差  $\{|(1-e^{-h(X)})r(X) - \bar{r}(X)\}/\bar{r}(X)| \times 100(\%)$  を用いて行った。その平均値は 3.319% その標準偏差は 2.329% であった。また、絶対値相対誤差の最大値は 9.803% であった。

図-8 (a)~(d) で示される近似式は、原点近くから急激に増加し、極値を経てなだらかに減少する形をとる。また 図-5 の座屈モードより、極値を境とし増加部分は局部座屈を、減少部分は横倒れ座屈を示している。さらに  $X$  の増加に従って与えられる  $r(X)$  の値に漸近している。各断面パラメーターごとに多少係数に準備計算が必要であるが、絶対値相対誤差が 10% 以内で局部座屈領域から横倒れ座屈領域へと連続して座屈荷重係数  $\bar{r}(X)$  の近似式を求めることができた。

#### (4) 弾性座屈

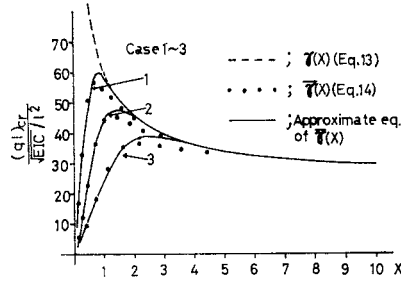
本論文では、弾性挙動による安定を論じているので座屈荷重  $q_{cr}$  により生ずる応力  $\sigma_{cr}$  が

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3 \tau_{xy}^2} \leq \sigma_Y$$

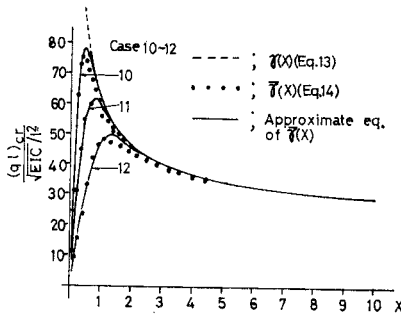
(部材の降伏応力) ..... (20)

を満足するかどうかを調べる必要がある。いま表-1 で示される各ケースに対し座屈荷重  $q_{cr}$  を求め対応する  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  より式 (20) の  $\sigma_{cr}$  を計算し、 $\sigma_{cr}/\sigma_Y - l/H$  の関係を、図-9 (a)~(d) に示す。なお本計算では、 $\sigma_Y = 3200 \text{ kg/cm}^2$  (31.36 kPa)、および  $H = 90 \text{ cm}$  を仮定した。

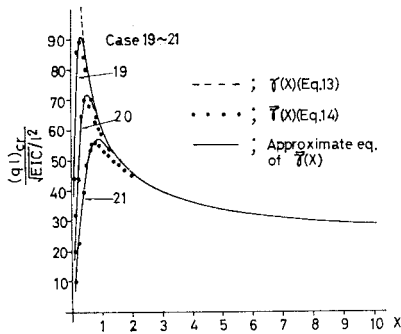
図-9 (a) は、 $H/t_w (=100)$  と  $H/B (=2)$  を一定とし、各  $t_f/t_w (=1.0, 1.5, 2.0)$  に対する  $\sigma_{cr}/\sigma_Y - l/H$  の関係を示している。また、 $t_f/t_w = 2.0$  と固定し、各  $H/B (=2, 3, 4)$  と  $H/t_w (=50, 100, 150, 200)$  とに対し、 $\sigma_{cr}/\sigma_Y - l/H$  の関係が 図-9 (b)~(d) で示されている。縦軸の 1.0 を超える領域は、弾塑性状態となることを示している。 $t_f/t_w$  の増加に従い曲線は上昇し弾塑性状



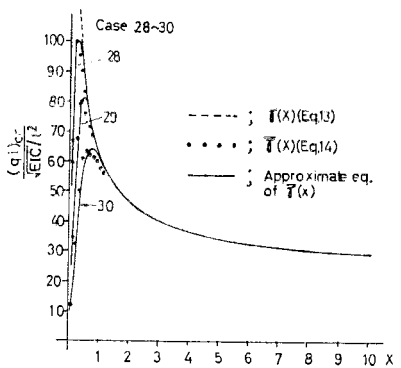
(a) Case 1~3



(b) Case 10~12



(c) Case 19~21



(d) Case 28~30

図-8 座屈荷重係数曲線

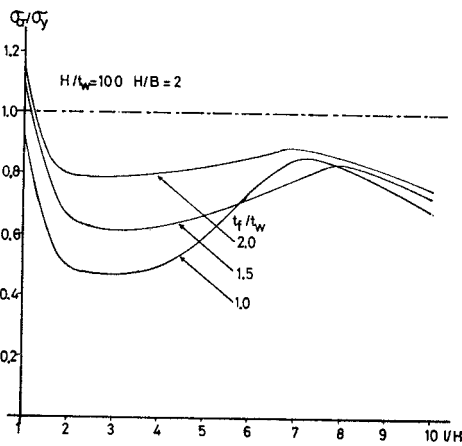
態に入る。また、 $H/t_w$ ,  $H/B$  の増加に従い曲線は下降し、弾性座屈状態となっていく。 $H/t_w$  が 100 を超える場合には、ほとんど弾性域で座屈していることがわかる。

### 4. 結 語

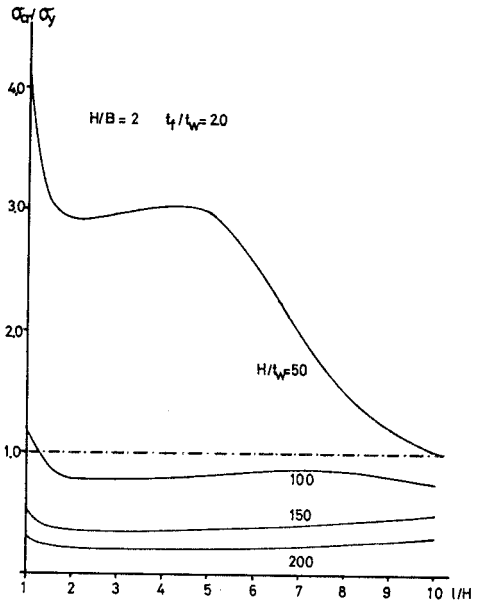
本論文では、任意に分布する二次元応力の全成分を座屈前応力分布とする帯板要素の要素剛性方程式を設定し、その解析式を組み立て種々の断面形状とスパン長とに対し数値計算を行った。さらにこれらの数値計算結果を用いて、座屈荷重係数  $\bar{\gamma}(X)$  の近似式が、断面のパラメーターを因子として表わすことができた。さらに、

本論文による解析結果の適用範囲も明確にすることができた。以上の結果を要約すると次のようになる。

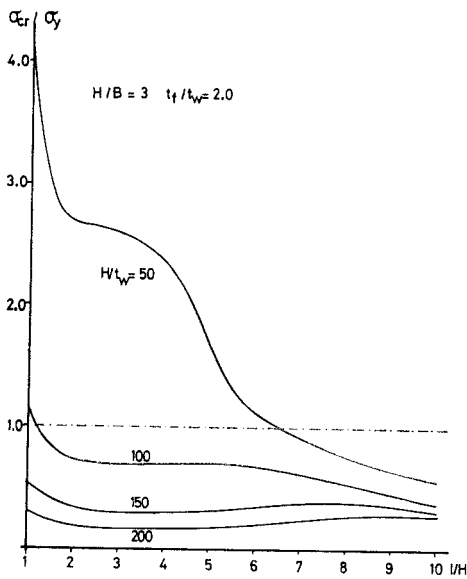
(1) 座屈係数  $k$  を与える  $k-l/H$  のグラフより、断面のパラメーター  $H/t_w$  と  $H/B$  に関し、 $H/t_w$  の値の増加または、 $H/B$  の値の減少により局部座屈領域が広がり、 $k$  のピーク値も大きくなっていく。一方パラメーター  $t_f/t_w$  の値の増加は、 $k$  のピークを与える  $l/H$  の値に、ほとんど影響せず  $k$  の値がほぼ同一割合で大きくなっている。



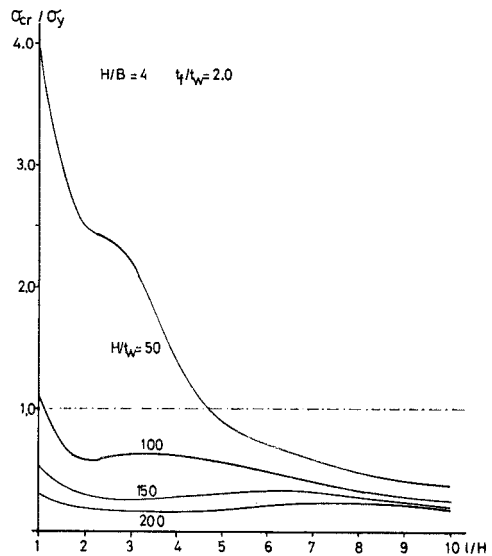
(a)  $H/t_w=100, H/B=2$



(b)  $H/B=2, t_f/t_w=2.0$



(d)  $H/B=4, t_f/t_w=2.0$



(c)  $H/B=3, t_f/t_w=2.0$

図-9  $\sigma_{cr}/\sigma_y-l/H$



(2) 数値計算結果を用いて絶対値相対誤差が 10% 以内で座屈荷重係数  $\bar{r}(X)$  の近似式が,  $X(=l^2C/C_1)$  および断面形状パラメーターを用いて求めることができた。

(3) 部材の降伏応力  $\sigma_Y=3200 \text{ kg/cm}^2$  (31.36 kPa) を仮定することにより, 断面のパラメーター  $H/t_w$  が 100 を超える場合にはほとんど弾性域で座屈する。

数値計算は, 北海道大学大型計算センターの HITAC -M-200 H, M-180 を使用した。

### 付録一

式 (3) で与えられるマトリックスの要素は, 次のようになる。

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= -\frac{4bD}{t^2}d^{(2)} + \frac{6(1-\nu)}{bt^2}D + \frac{bt}{12}\{(3\sigma_x^{*r,r+1} + \sigma_x^{*r+1,r})d^{(2)} + (3\dot{\sigma}_x^{*r,r+1} + \dot{\sigma}_x^{*r+1,r})d^{(1)}\} \\
 &\quad - \frac{1}{2}\frac{t}{b}(\sigma_y^{*r,r+1} + \sigma_y^{*r+1,r}) - \frac{t}{6}(2\dot{\tau}_{xy}^{*r,r+1} + \dot{\tau}_{xy}^{*r+1,r}) \\
 A_{12} &= \frac{3(3\nu-1)D}{t^2}d^{(1)} \\
 A_{13} &= -\frac{2bD}{t^2}d^{(2)} - \frac{6(1-\nu)}{bt^2}D + \frac{bt}{12}\{(\sigma_x^{*r,r+1} + \sigma_x^{*r+1,r})d^{(2)} + (\dot{\sigma}_x^{*r,r+1} + \dot{\sigma}_x^{*r+1,r})d^{(1)}\} \\
 &\quad + \frac{t}{2b}(\sigma_y^{*r,r+1} + \sigma_y^{*r+1,r}) + \frac{t}{6}\{3(\tau_{xy}^{*r,r+1} + \tau_{xy}^{*r+1,r})d^{(1)} + (2\dot{\tau}_{xy}^{*r,r+1} + \dot{\tau}_{xy}^{*r+1,r})\} \\
 A_{16} &= -\frac{3(1+\nu)D}{t^2}d^{(1)} \\
 A_{21} &= -\frac{3(3\nu-1)D}{t^2}d^{(1)} \\
 A_{22} &= \frac{12D}{bt^2} - \frac{2(1-\nu)bD}{t^2}d^{(2)} + \frac{bt}{12}\{(3\sigma_x^{*r,r+1} + \sigma_x^{*r+1,r})d^{(2)} + (3\dot{\sigma}_x^{*r,r+1} + \dot{\sigma}_x^{*r+1,r})d^{(1)}\} \\
 &\quad - \frac{t}{2b}(\sigma_y^{*r,r+1} + \sigma_y^{*r+1,r}) - \frac{t}{6}(2\dot{\tau}_{xy}^{*r,r+1} + \dot{\tau}_{xy}^{*r+1,r}) \\
 A_{25} &= -\frac{3(1+\nu)D}{t^2}d^{(1)} \\
 A_{26} &= -\frac{12D}{bt^2} - \frac{(1-\nu)bD}{t^2}d^{(2)} + \frac{bt}{12}\{(\sigma_x^{*r,r+1} + \sigma_x^{*r+1,r})d^{(2)} + (\dot{\sigma}_x^{*r,r+1} + \dot{\sigma}_x^{*r+1,r})d^{(1)}\} \\
 &\quad + \frac{t}{2b}(\sigma_y^{*r,r+1} + \sigma_y^{*r+1,r}) + \frac{t}{6}\{3(\tau_{xy}^{*r,r+1} + \tau_{xy}^{*r+1,r})d^{(1)} + (2\dot{\tau}_{xy}^{*r,r+1} + \dot{\tau}_{xy}^{*r+1,r})\} \\
 A_{33} &= \frac{3bD}{35}d^{(4)} - \frac{12D}{5b}d^{(2)} + \frac{12D}{b^2} + \frac{bt}{35}\{(10\sigma_x^{*r,r+1} + 3\sigma_x^{*r+1,r})d^{(2)} + (10\dot{\sigma}_x^{*r,r+1} + 3\dot{\sigma}_x^{*r+1,r})d^{(1)}\} \\
 &\quad - \frac{3t}{5b}(\sigma_y^{*r,r+1} + \sigma_y^{*r+1,r}) - \frac{t}{70}(22\dot{\tau}_{xy}^{*r,r+1} + 13\dot{\tau}_{xy}^{*r+1,r}) \\
 A_{34} &= \frac{11b^2D}{210}d^{(4)} - \frac{\nu_5D}{5}d^{(2)} + \frac{6D}{b^2} + \frac{b^2t}{420}\{(15\sigma_x^{*r,r+1} + 7\sigma_x^{*r+1,r})d^{(2)} + (15\dot{\sigma}_x^{*r,r+1} + 7\dot{\sigma}_x^{*r+1,r})d^{(1)}\} \\
 &\quad - \frac{t}{10}\sigma_y^{*r+1,r} + \frac{bt}{210}\{7(5\tau_{xy}^{*r,r+1} + \tau_{xy}^{*r+1,r})d^{(1)} + (23\dot{\tau}_{xy}^{*r,r+1} - 2\dot{\tau}_{xy}^{*r+1,r})\} \\
 A_{37} &= \frac{9bD}{70}d^{(4)} + \frac{12D}{15b}d^{(2)} - \frac{12D}{b^3} + \frac{9bt}{140}\{(\sigma_x^{*r,r+1} + \sigma_x^{*r+1,r})d^{(2)} + (\dot{\sigma}_x^{*r,r+1} + \dot{\sigma}_x^{*r+1,r})d^{(1)}\} \\
 &\quad + \frac{3t}{5b}(\sigma_y^{*r,r+1} + \sigma_y^{*r+1,r}) + \frac{t}{70}\{35(\tau_{xy}^{*r,r+1} + \tau_{xy}^{*r+1,r})d^{(1)} + (22\dot{\tau}_{xy}^{*r,r+1} + 13\dot{\tau}_{xy}^{*r+1,r})\} \\
 A_{38} &= -\frac{13b^2D}{420}d^{(4)} - \frac{D}{5}d^{(2)} + \frac{6D}{b^2} - \frac{b^2t}{420}\{(7\sigma_x^{*r,r+1} + 6\sigma_x^{*r+1,r})d^{(2)} + (7\dot{\sigma}_x^{*r,r+1} + 6\dot{\sigma}_x^{*r+1,r})d^{(1)}\} \\
 &\quad - \frac{t}{10}\sigma_y^{*r,r+1} - \frac{bt}{420}\{7(7\tau_{xy}^{*r,r+1} + 5\tau_{xy}^{*r+1,r})d^{(1)} + (31\dot{\tau}_{xy}^{*r,r+1} + 11\dot{\tau}_{xy}^{*r+1,r})\} \\
 A_{43} &= \frac{11b^2D}{210}d^{(4)} - \frac{\nu_5D}{5}d^{(2)} + \frac{6D}{b^2} + \frac{b^2t}{60}\{(\sigma_x^{*r,r+1} + \sigma_x^{*r+1,r})d^{(2)} + (\dot{\sigma}_x^{*r,r+1} + \dot{\sigma}_x^{*r+1,r})d^{(1)}\} \\
 &\quad - \frac{t}{10}\sigma_y^{*r+1,r} - \frac{bt}{210}\{7(5\tau_{xy}^{*r,r+1} + \tau_{xy}^{*r+1,r})d^{(1)} + 3(4\dot{\tau}_{xy}^{*r,r+1} + 3\dot{\tau}_{xy}^{*r+1,r})\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{44} &= \frac{b^3 D}{105} d^{(4)} - \frac{4 b D}{15} d^{(2)} + \frac{4 D}{b} + \frac{b^2 t}{280} \{(\sigma_x^{*r, r+1} + \sigma_x^{*r+1, r}) d^{(2)} + (\dot{\sigma}_x^{*r, r+1} + \dot{\sigma}_x^{*r+1, r}) d^{(1)}\} \\
&\quad - \frac{b t}{30} (3 \sigma_y^{*r, r+1} + \sigma_y^{*r+1, r}) - \frac{b^2 t}{210} (\dot{\tau}_{xy}^{*r, r+1} - \dot{\tau}_{xy}^{*r+1, r}) \\
A_{47} &= \frac{13 b^2 D}{420} d^{(4)} + \frac{D}{5} d^{(2)} - \frac{6 D}{b^2} + \frac{b^2 t}{60} \{(\sigma_x^{*r, r+1} + \sigma_x^{*r+1, r}) d^{(2)} + (\dot{\sigma}_x^{*r, r+1} + \dot{\sigma}_x^{*r+1, r}) d^{(1)}\} \\
&\quad + \frac{t}{10} \sigma_y^{*r+1, r} + \frac{b t}{420} \{7(5 \tau_{xy}^{*r, r+1} + 7 \tau_{xy}^{*r+1, r}) d^{(1)} + 6(4 \dot{\tau}_{xy}^{*r, r+1} + 3 \dot{\tau}_{xy}^{*r+1, r})\} \\
A_{48} &= -\frac{b^3 D}{120} d^{(4)} + \frac{b D}{15} d^{(2)} + \frac{2 D}{b} - \frac{b^2 t}{280} \{(\sigma_x^{*r, r+1} + \sigma_x^{*r+1, r}) d^{(2)} + (\dot{\sigma}_x^{*r, r+1} + \dot{\sigma}_x^{*r+1, r}) d^{(1)}\} \\
&\quad + \frac{b t}{60} (\sigma_y^{*r, r+1} + \sigma_y^{*r+1, r}) - \frac{b^2 t}{420} \{7(\tau_{xy}^{*r, r+1} + \tau_{xy}^{*r+1, r}) d^{(1)} + (5 \dot{\tau}_{xy}^{*r, r+1} + 2 \dot{\tau}_{xy}^{*r+1, r})\} \\
A_{51} &= -\frac{2 b D}{t^2} d^{(2)} - \frac{6(1-\nu)}{b t^2} D + \frac{b t}{12} \{(\sigma_x^{*r, r+1} + \sigma_x^{*r+1, r}) d^{(2)} + (\dot{\sigma}_x^{*r, r+1} + \dot{\sigma}_x^{*r+1, r}) d^{(1)}\} \\
&\quad + \frac{t}{2 b} (\sigma_y^{*r, r+1} + \sigma_y^{*r+1, r}) - \frac{t}{6} \{3(\tau_{xy}^{*r, r+1} + \tau_{xy}^{*r+1, r}) d^{(1)} + (\dot{\tau}_{xy}^{*r, r+1} + 2 \dot{\tau}_{xy}^{*r+1, r})\} \\
A_{52} &= \frac{3(1+\nu) D}{t^2} d^{(1)} \\
A_{55} &= -\frac{4 b D}{t^2} d^{(2)} + \frac{6(1-\nu) D}{b t^2} + \frac{b t}{12} \{(\sigma_x^{*r, r+1} + 3 \sigma_x^{*r+1, r}) d^{(2)} + (\dot{\sigma}_x^{*r, r+1} + 3 \dot{\sigma}_x^{*r+1, r}) d^{(1)}\} \\
&\quad - \frac{t}{2 b} (\sigma_y^{*r, r+1} + \sigma_y^{*r+1, r}) - \frac{t}{6} (\dot{\tau}_{xy}^{*r, r+1} + 2 \dot{\tau}_{xy}^{*r+1, r}) \\
A_{56} &= -\frac{3(3\nu-1) D}{t^2} d^{(1)} \\
A_{61} &= \frac{3(\nu+1) D}{t^2} d^{(1)} \\
A_{62} &= \frac{12 D}{b t^2} - \frac{2(1-\nu) b D}{t^2} d^{(2)} + \frac{b t}{12} \{(\sigma_x^{*r, r+1} + \sigma_x^{*r+1, r}) d^{(2)} + (\dot{\sigma}_x^{*r, r+1} + \dot{\sigma}_x^{*r+1, r}) d^{(1)}\} \\
&\quad + \frac{t}{2 b} (\sigma_y^{*r, r+1} + \sigma_y^{*r+1, r}) - \frac{t}{6} \{3(\tau_{xy}^{*r, r+1} + \tau_{xy}^{*r+1, r}) d^{(1)} + (\dot{\tau}_{xy}^{*r, r+1} + 2 \dot{\tau}_{xy}^{*r+1, r})\} \\
A_{65} &= \frac{3(3\nu-1) D}{t^2} d^{(1)} \\
A_{66} &= \frac{12 D}{b t^2} - \frac{(1-\nu) b D}{t^2} d^{(2)} + \frac{b t}{12} \{(\sigma_x^{*r, r+1} + 3 \sigma_x^{*r+1, r}) d^{(2)} + (\dot{\sigma}_x^{*r, r+1} + 3 \dot{\sigma}_x^{*r+1, r}) d^{(1)}\} \\
&\quad - \frac{t}{2 b} (\sigma_y^{*r, r+1} + \sigma_y^{*r+1, r}) - \frac{t}{6} (\dot{\tau}_{xy}^{*r, r+1} + \dot{\tau}_{xy}^{*r+1, r}) \\
A_{73} &= \frac{9 b D}{70} d^{(4)} + \frac{12 D}{5 b} d^{(2)} - \frac{12 D}{b^3} + \frac{9 b t}{140} \{(\sigma_x^{*r, r+1} + \sigma_x^{*r+1, r}) d^{(2)} + (\dot{\sigma}_x^{*r, r+1} + \dot{\sigma}_x^{*r+1, r}) d^{(1)}\} \\
&\quad + \frac{3 t}{5 b} (\sigma_y^{*r, r+1} + \sigma_y^{*r+1, r}) - \frac{t}{70} \{35(\tau_{xy}^{*r, r+1} + \tau_{xy}^{*r+1, r}) d^{(1)} + (13 \dot{\tau}_{xy}^{*r, r+1} + 22 \dot{\tau}_{xy}^{*r+1, r})\} \\
A_{74} &= \frac{13 b^2 D}{420} d^{(4)} + \frac{D}{5} d^{(2)} - \frac{6 D}{b^2} + \frac{b^2 t}{420} \{(6 \sigma_x^{*r, r+1} + 7 \sigma_x^{*r+1, r}) d^{(2)} + (6 \dot{\sigma}_x^{*r, r+1} + 7 \dot{\sigma}_x^{*r+1, r}) d^{(1)}\} \\
&\quad + \frac{t}{10} \sigma_y^{*r+1, r} - \frac{b t}{420} \{7(5 \tau_{xy}^{*r, r+1} + 7 \tau_{xy}^{*r+1, r}) d^{(1)} + (11 \dot{\tau}_{xy}^{*r, r+1} + 31 \dot{\tau}_{xy}^{*r+1, r})\} \\
A_{77} &= \frac{13 b D}{35} d^{(4)} - \frac{12 D}{5 b} d^{(2)} + \frac{12 D}{b^3} + \frac{b t}{35} \{(3 \sigma_x^{*r, r+1} + 10 \sigma_x^{*r+1, r}) d^{(2)} + (3 \dot{\sigma}_x^{*r, r+1} + 10 \dot{\sigma}_x^{*r+1, r}) d^{(1)}\} \\
&\quad - \frac{3 t}{5 b} (\sigma_y^{*r, r+1} + \sigma_y^{*r+1, r}) - \frac{t}{70} (13 \dot{\tau}_{xy}^{*r, r+1} + 22 \dot{\tau}_{xy}^{*r+1, r}) \\
A_{78} &= -\frac{11 b^2 D}{210} d^{(4)} + \frac{\nu_5 D}{5} d^{(2)} - \frac{6 D}{b^2} - \frac{b^2 t}{420} \{(7 \sigma_x^{*r, r+1} + 15 \sigma_x^{*r+1, r}) d^{(2)} + (7 \dot{\sigma}_x^{*r, r+1} + 15 \dot{\sigma}_x^{*r+1, r}) d^{(1)}\} \\
&\quad + \frac{t}{10} \sigma_y^{*r, r+1} + \frac{b t}{210} \{7(\tau_{xy}^{*r, r+1} + 5 \tau_{xy}^{*r+1, r}) d^{(1)} + (2 \dot{\tau}_{xy}^{*r, r+1} - 23 \dot{\tau}_{xy}^{*r+1, r})\} \\
A_{83} &= -\frac{13 b^2 D}{420} d^{(4)} - \frac{D}{5} d^{(2)} + \frac{6 D}{b^2} - \frac{b^2 t}{420} \{(7 \sigma_x^{*r, r+1} + 6 \sigma_x^{*r+1, r}) d^{(2)} + (7 \dot{\sigma}_x^{*r, r+1} + 6 \dot{\sigma}_x^{*r+1, r}) d^{(1)}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{t}{10}\sigma_y^{*r,r+1} + \frac{bt}{420}\{7(7\dot{\tau}_{xy}^{*r,r+1} + 5\dot{\tau}_{xy}^{*r+1,r})d^{(1)} + 6(3\dot{\tau}_{xy}^{*r,r+1} + 4\dot{\tau}_{xy}^{*r+1,r})\} \\
 A_{84} = & -\frac{b^3D}{140}d^{(4)} + \frac{bD}{15}d^{(2)} + \frac{2D}{b} - \frac{b^3t}{280}\{(\sigma_x^{*r,r+1} + \sigma_x^{*r+1,r})d^{(2)} + (\dot{\sigma}_x^{*r,r+1} + \dot{\sigma}_x^{*r+1,r})d^{(1)}\} \\
 & + \frac{bt}{60}(\sigma_y^{*r,r+1} + \sigma_y^{*r+1,r}) + \frac{b^2t}{420}\{7(\tau_{xy}^{*r,r+1} + \tau_{xy}^{*r+1,r})d^{(1)} + (2\dot{\tau}_{xy}^{*r,r+1} + 5\dot{\tau}_{xy}^{*r+1,r})\} \\
 A_{87} = & -\frac{11b^2D}{420}d^{(4)} + \frac{\nu_5D}{5}d^{(2)} - \frac{6D}{b^2} - \frac{b^2t}{420}\{(7\sigma_x^{*r,r+1} + 15\sigma_x^{*r+1,r})d^{(2)} + (7\dot{\sigma}_x^{*r,r+1} + 15\dot{\sigma}_x^{*r+1,r})d^{(1)}\} \\
 & + \frac{t}{10}\sigma_y^{*r,r+1} - \frac{bt}{210}\{7(\tau_{xy}^{*r,r+1} + 5\tau_{xy}^{*r+1,r})d^{(1)} - 3(3\dot{\tau}_{xy}^{*r,r+1} + 4\dot{\tau}_{xy}^{*r+1,r})\} \\
 A_{88} = & \frac{b^3D}{105}d^{(4)} - \frac{4bD}{15}d^{(2)} + \frac{4D}{b} + \frac{b^3t}{840}\{(3\sigma_x^{*r,r+1} + 5\sigma_x^{*r+1,r})d^{(2)} + (3\dot{\sigma}_x^{*r,r+1} + 5\dot{\sigma}_x^{*r+1,r})d^{(1)}\} \\
 & - \frac{bt}{30}(\sigma_y^{*r,r+1} + 3\sigma_y^{*r+1,r}) - \frac{b^2t}{210}(\dot{\tau}_{xy}^{*r,r+1} - \dot{\tau}_{xy}^{*r+1,r})
 \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad d^{(4)} = \frac{d^4}{dx^4}, \quad d^{(2)} = \frac{d^2}{dx^2} \\
 d^{(1)} &= \frac{d}{dx}, \quad \dot{\sigma}_x^* = \frac{d\sigma_x^*}{dx}, \quad \dot{\tau}_{xy}^* = \frac{d\tau_{xy}^*}{dx} \\
 \nu_5 &= 1 + 5\nu, \\
 \nu &= \text{ポアソン比}, \quad E = \text{ヤング係数}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{22} &= \frac{1}{r_0^2} \frac{\xi_0}{\eta_0} \left\{ 2(1-\nu)\eta_0^2\beta m^2 + \frac{12}{\pi^2} \right\} \\
 a_{25} &= \frac{1}{r_0^2} \xi_0\beta m \frac{3}{\pi} (1+\nu) \\
 a_{26} &= \frac{1}{r_0^2} \frac{\xi_0}{\eta_0} \left\{ (1-\nu)\eta_0^2\beta m^2 - \frac{12}{\pi^2} \right\} \\
 a_{33} &= \frac{13}{35} \pi^2 \eta_0^2 \xi_0^3 \beta m^4 + \frac{12}{5} \frac{\xi_0^3}{\eta_0} \beta m^2 + \frac{12}{\pi^2} \frac{\xi_0^3}{\eta_0^3} \\
 a_{34} &= \frac{11}{210} \pi^2 \eta_0^2 \xi_0^3 \beta m^4 + \frac{1}{5} \nu_5 \xi_0^3 \beta m^2 + \frac{6}{\pi^2} \frac{\xi_0^3}{\eta_0^2} \\
 a_{37} &= \frac{9}{70} \pi^2 \eta_0^2 \xi_0^3 \beta m^4 - \frac{12}{5} \frac{\xi_0^3}{\eta_0} \beta m^2 - \frac{12}{\pi^2} \frac{\xi_0^3}{\eta_0^3} \\
 a_{38} &= -\frac{13}{420} \pi^2 \eta_0^2 \xi_0^3 \beta m^4 + \frac{1}{5} \xi_0^3 \beta m^2 + \frac{6}{\pi^2} \frac{\xi_0^3}{\eta_0^2} \\
 a_{44} &= \frac{1}{105} \pi^2 \eta_0^3 \xi_0^3 \beta m^4 + \frac{4}{15} \eta_0 \xi_0^3 \beta m^2 + \frac{4}{\pi^2} \frac{\xi_0^3}{\eta_0} \\
 a_{47} &= \frac{13}{420} \pi^2 \eta_0^2 \xi_0^3 \beta m^4 - \frac{1}{5} \xi_0^3 \beta m^2 - \frac{6}{\pi^2} \frac{\xi_0^3}{\eta_0^2} \\
 a_{48} &= -\frac{1}{140} \pi^2 \eta_0^2 \xi_0^3 \beta m^4 - \frac{1}{15} \eta_0 \xi_0^3 \beta m^2 + \frac{2}{\pi^2} \frac{\xi_0^3}{\eta_0} \\
 a_{55} &= \frac{1}{r_0^2} \frac{\xi_0}{\eta_0} \left\{ 4\eta_0^2\beta m^2 + \frac{6}{\pi^2} (1-\nu) \right\} \\
 a_{56} &= -\frac{1}{r_0^2} \xi_0\beta m \frac{3}{\pi} (3\nu-1) \\
 a_{66} &= \frac{1}{r_0^2} \frac{\xi_0}{\eta_0} \left\{ 2(1-\nu)\eta_0^2\beta m^2 + \frac{12}{\pi^2} \right\} \\
 a_{77} &= \frac{13}{35} \pi^2 \eta_0^2 \xi_0^3 \beta m^2 + \frac{12}{5} \frac{\xi_0^3}{\eta_0} \beta m^2 + \frac{12}{\pi^2} \frac{\xi_0^3}{\eta_0^3} \\
 a_{78} &= -\frac{11}{210} \pi^2 \eta_0^2 \xi_0^3 \beta m^4 - \frac{1}{5} \nu_5 \xi_0^3 \beta m^2 - \frac{6}{\pi^2} \frac{\xi_0^3}{\eta_0^2} \\
 a_{88} &= \frac{1}{105} \pi^2 \eta_0^3 \xi_0^3 \beta m^4 + \frac{4}{15} \eta_0 \xi_0^3 \beta m^2 + \frac{4}{\pi^2} \frac{\xi_0^3}{\eta_0}
 \end{aligned}$$

### 付録—2

式(7)で示される帯板要素の要素剛性マトリックスおよび要素安定係数マトリックス

無次元化記号

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \text{基準板幅}, \quad t_0 = \text{基準板厚} \\
 \eta_0 &= \frac{b}{b_0}, \quad \xi_0 = \frac{t}{t_0}, \quad r_0 = \frac{t_0}{b_0}, \quad \beta m = \frac{mb_0}{l} \\
 \beta_i &= \frac{ib_0}{l}, \quad \beta_j = \frac{j b_0}{l}
 \end{aligned}$$

(a) 要素剛性マトリックス

要素剛性マトリックスを次のように無次元化して表わす。

$$[K_m]_e = \frac{D_0 \pi^2}{t_0 b_0^2} r_0 [a]$$

ただし

$$D_0 = \frac{Et_0^3}{12(1-\nu^2)}$$

[a] は、8行8列の対称マトリックスである。[a]の各要素は、次のように表わされる。定義されない要素は0である。

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{r_0} \frac{\xi_0}{\eta_0} \left\{ 4\eta_0^2\beta m^2 + \frac{6}{\pi^2} (1-\nu) \right\} \\
 a_{12} &= \frac{1}{r_0^2} \xi_0\beta m \frac{3}{\pi} (3\nu-1) \\
 a_{15} &= \frac{1}{r_0^2} \frac{\xi_0}{\eta_0} \left\{ 2\eta_0^2\beta m^2 - \frac{6}{\pi^2} (1-\nu) \right\} \\
 a_{16} &= -\frac{1}{r_0^2} \xi_0\beta m \frac{3}{\pi} (1+\nu)
 \end{aligned}$$

(b) 要素安定係数マトリックス

要素安定係数マトリックスを次のように表わす。

$$[K_i^G]_e = \sum_{j=1}^{\infty} ([b] + [c] + [d])$$

ここで [b], [c], [d] は、それぞれ座屈前応力分布のフーリエ係数  $\sigma_{xj}^*$ ,  $\sigma_{yj}^*$ ,  $\tau_{xyj}^*$  に関するマトリックスで

ある。マトリックスの大きさは、それぞれ 8 行 8 列のマトリックスであり定義されない要素は 0 である。また [b], [c] は対称マトリックスである。

$$b_{11} = \frac{1}{12} \eta_0 \xi_0 \pi^2 (\beta_i^2 H_4 + \beta_i \beta_j H_3) \\ \cdot (3 \sigma_{xj}^{*r, r+1} + \sigma_{xj}^{*r+1, r})$$

$$b_{15} = \frac{1}{12} \eta_0 \xi_0 \pi^2 (\beta_i^2 H_4 + \beta_i \beta_j H_3) \\ \cdot (\sigma_{xj}^{*r, r+1} + \sigma_{xj}^{*r+1, r})$$

$$b_{22} = \frac{1}{12} \eta_0 \xi_0 \pi^2 (\beta_i^2 H_1 - \beta_i \beta_j H_2) \\ \cdot (3 \sigma_{xj}^{*r, r+1} + \sigma_{xj}^{*r+1, r})$$

$$b_{26} = \frac{1}{12} \eta_0 \xi_0 \pi^2 (\beta_i^2 H_1 - \beta_i \beta_j H_2) \\ \cdot (\sigma_{xj}^{*r, r+1} + \sigma_{xj}^{*r+1, r})$$

$$b_{33} = \frac{1}{35} \eta_0^2 \xi_0 \pi^2 (\beta_i^2 H_1 - \beta_i \beta_j H_2) \\ \cdot (10 \sigma_{xj}^{*r, r+1} + 3 \sigma_{xj}^{*r+1, r})$$

$$b_{34} = \frac{1}{420} \eta_0^2 \xi_0 \pi^2 (\beta_i^2 H_1 - \beta_i \beta_j H_2) \\ \cdot (15 \sigma_{xj}^{*r, r+1} + 7 \sigma_{xj}^{*r+1, r})$$

$$b_{37} = \frac{9}{140} \eta_0 \xi_0 \pi^2 (\beta_i^2 H_1 - \beta_i \beta_j H_2) \\ \cdot (\sigma_{xj}^{*r, r+1} + \sigma_{xj}^{*r+1, r})$$

$$b_{38} = -\frac{1}{140} \eta_0^2 \xi_0 \pi^2 (\beta_i^2 H_1 - \beta_i \beta_j H_2) \\ \cdot (7 \sigma_{xj}^{*r, r+1} + 6 \sigma_{xj}^{*r+1, r})$$

$$b_{44} = \frac{1}{840} \eta_0^3 \xi_0 \pi^2 (\beta_i^2 H_1 - \beta_i \beta_j H_2) \\ \cdot (5 \sigma_{xj}^{*r, r+1} + 3 \sigma_{xj}^{*r+1, r})$$

$$b_{47} = \frac{1}{420} \eta_0^2 \xi_0 \pi^2 (\beta_i^2 H_1 - \beta_i \beta_j H_2) \\ \cdot (6 \sigma_{xj}^{*r, r+1} + 7 \sigma_{xj}^{*r+1, r})$$

$$b_{48} = -\frac{1}{280} \eta_0^3 \xi_0 \pi^2 (\beta_i^2 H_1 - \beta_i \beta_j H_2) \\ \cdot (\sigma_{xj}^{*r, r+1} + \sigma_{xj}^{*r+1, r})$$

$$b_{55} = \frac{1}{12} \eta_0 \xi_0 \pi^2 (\beta_i^2 H_4 + \beta_i \beta_j H_3) \\ \cdot (\sigma_{xj}^{*r, r+1} + 3 \sigma_{xj}^{*r+1, r})$$

$$b_{66} = \frac{1}{12} \eta_0 \xi_0 \pi^2 (\beta_i^2 H_1 - \beta_i \beta_j H_2) \\ \cdot (\sigma_{xj}^{*r, r+1} + 3 \sigma_{xj}^{*r+1, r})$$

$$b_{77} = \frac{1}{35} \eta_0 \xi_0 \pi^2 (\beta_i^2 H_1 - \beta_i \beta_j H_2) \\ \cdot (3 \sigma_{xj}^{*r, r+1} + 10 \sigma_{xj}^{*r+1, r})$$

$$b_{78} = -\frac{1}{420} \eta_0^2 \xi_0 \pi^2 (\beta_i^2 H_1 - \beta_i \beta_j H_2) \\ \cdot (7 \sigma_{xj}^{*r, r+1} + 15 \sigma_{xj}^{*r+1, r})$$

$$b_{88} = \frac{1}{840} \eta_0^3 \xi_0 \pi^2 (\beta_i^2 H_1 - \beta_i \beta_j H_2) \\ \cdot (3 \sigma_{xj}^{*r, r+1} + 5 \sigma_{xj}^{*r+1, r})$$

$$c_{11} = \frac{1}{2} \frac{\xi_0}{\eta_0} H_4 (\sigma_{yj}^{*r, r+1} + \sigma_{yj}^{*r+1, r})$$

$$c_{15} = -\frac{1}{2} \frac{\xi_0}{\eta_0} H_4 (\sigma_{yj}^{*r, r+1} + \sigma_{yj}^{*r+1, r})$$

$$c_{22} = \frac{1}{2} \frac{\xi_0}{\eta_0} H_1 (\sigma_{yj}^{*r, r+1} + \sigma_{yj}^{*r+1, r})$$

$$c_{26} = -\frac{1}{2} \frac{\xi_0}{\eta_0} H_1 (\sigma_{yj}^{*r, r+1} + \sigma_{yj}^{*r+1, r})$$

$$c_{33} = \frac{3}{5} \frac{\xi_0}{\eta_0} H_1 (\sigma_{yj}^{*r, r+1} + \sigma_{yj}^{*r+1, r})$$

$$c_{34} = \frac{1}{10} \xi_0 H_1 \sigma_{yj}^{*r+1, r}$$

$$c_{37} = -\frac{3}{5} \frac{\xi_0}{\eta_0} H_1 (\sigma_{yj}^{*r, r+1} + \sigma_{yj}^{*r+1, r})$$

$$c_{38} = \frac{1}{10} \xi_0 H_1 \sigma_{yj}^{*r, r+1}$$

$$c_{44} = \frac{1}{30} \eta_0 \xi_0 H_1 (3 \sigma_{yj}^{*r, r+1} + \sigma_{yj}^{*r+1, r})$$

$$c_{47} = -\frac{1}{10} \xi_0 H_1 \sigma_{yj}^{*r+1, r}$$

$$c_{48} = -\frac{1}{60} \eta_0 \xi_0 H_1 (\sigma_{yj}^{*r, r+1} + \sigma_{yj}^{*r+1, r})$$

$$c_{55} = \frac{1}{2} \frac{\xi_0}{\eta_0} H_4 (\sigma_{yj}^{*r+1, r} + \sigma_{yj}^{*r+1, r})$$

$$c_{66} = \frac{1}{2} \frac{\xi_0}{\eta_0} H_1 (\sigma_{yj}^{*r, r+1} + \sigma_{yj}^{*r+1, r})$$

$$c_{77} = \frac{3}{5} \frac{\xi_0}{\eta_0} H_1 (\sigma_{yj}^{*r, r+1} + \sigma_{yj}^{*r+1, r})$$

$$c_{78} = -\frac{1}{10} \xi_0 H_1 \sigma_{yj}^{*r, r+1}$$

$$c_{88} = \frac{1}{30} \eta_0 \xi_0 H_1 (\sigma_{yj}^{*r, r+1} + 3 \sigma_{yj}^{*r+1, r})$$

$$d_{11} = -\frac{1}{6} \xi_0 \pi \beta_j H_4 (2 \tau_{xyj}^{*r, r+1} + \tau_{xyj}^{*r+1, r})$$

$$d_{15} = \frac{1}{6} \xi_0 \pi \{3 \beta_i H_3 (\tau_{xyj}^{*r, r+1} + \tau_{xyj}^{*r+1, r}) \\ + \beta_j H_4 (2 \tau_{xyj}^{*r, r+1} + \tau_{xyj}^{*r+1, r})\}$$

$$d_{22} = -\frac{1}{6} \xi_0 \pi \beta_j H_1 (2 \tau_{xyj}^{*r, r+1} + \tau_{xyj}^{*r+1, r})$$

$$d_{26} = -\frac{1}{6} \xi_0 \pi \{3 \beta_i H_2 (\tau_{xyj}^{*r, r+1} + \tau_{xyj}^{*r+1, r}) \\ - \beta_j H_1 (2 \tau_{xyj}^{*r, r+1} + \tau_{xyj}^{*r+1, r})\}$$

$$d_{33} = -\frac{1}{70} \xi_0 \pi \beta_j H_1 (22 \tau_{xyj}^{*r, r+1} + 13 \tau_{xyj}^{*r+1, r})$$

$$d_{34} = -\frac{1}{210} \eta_0 \xi_0 \pi \{7 \beta_i H_2 (5 \tau_{xyj}^{*r, r+1} + \tau_{xyj}^{*r+1, r}) \\ - \beta_j H_1 (23 \tau_{xyj}^{*r, r+1} - 2 \tau_{xyj}^{*r+1, r})\}$$

$$d_{37} = -\frac{1}{70} \xi_0 \pi \{35 \beta_i H_2 (\tau_{xyj}^{*r, r+1} + \tau_{xyj}^{*r+1, r}) \\ - \beta_j H_1 (22 \tau_{xyj}^{*r, r+1} + 13 \tau_{xyj}^{*r+1, r})\}$$

$$d_{38} = \frac{1}{420} \eta_0 \xi_0 \pi \{7 \beta_i H_2 (7 \tau_{xyj}^{*r, r+1} + 5 \tau_{xyj}^{*r+1, r}) \\ - \beta_j H_1 (31 \tau_{xyj}^{*r, r+1} + 11 \tau_{xyj}^{*r+1, r})\}$$

$$d_{43} = \frac{1}{210} \eta_0 \xi_0 \pi \{7 \beta_i H_2 (5 \tau_{xyj}^{*r, r+1} + \tau_{xyj}^{*r+1, r}) \\ - 3 \beta_j H_1 (4 \tau_{xyj}^{*r, r+1} + 3 \tau_{xyj}^{*r+1, r})\}$$

$$d_{44} = \frac{1}{210} \eta_0 \xi_0 \pi \beta_j H_1 (\tau_{xyj}^{*r, r+1} - \tau_{xyj}^{*r+1, r})$$

$$d_{47} = -\frac{1}{420} \eta_0 \xi_0 \pi \{ 7 \beta_i H_2 (5 \tau_{xyj}^{*r,r+1} + 7 \tau_{xyj}^{*r+1,r}) - 6 \beta_j H_1 (4 \tau_{xyj}^{*r,r+1} + 3 \tau_{xyj}^{*r+1,r}) \}$$

$$d_{48} = \frac{1}{420} \eta_0 \xi_0 \pi \{ 7 \beta_i H_2 (\tau_{xyj}^{*r,r+1} + \tau_{xyj}^{*r+1,r}) - \beta_j H_1 (5 \tau_{xyj}^{*r,r+1} + 2 \tau_{xyj}^{*r+1,r}) \}$$

$$d_{51} = -\frac{1}{6} \xi_0 \pi \{ 3 \beta_i H_3 (\tau_{xyj}^{*r,r+1} + \tau_{xyj}^{*r+1,r}) + \beta_j H_4 (\tau_{xyj}^{*r,r+1} + 2 \tau_{xyj}^{*r+1,r}) \}$$

$$d_{55} = \frac{1}{6} \xi_0 \pi \beta_j H_4 (\tau_{xyj}^{*r,r+1} + 2 \tau_{xyj}^{*r+1,r})$$

$$d_{62} = \frac{1}{6} \xi_0 \pi \{ 3 \beta_i H_2 (\tau_{xyj}^{*r,r+1} + \tau_{xyj}^{*r+1,r}) - \beta_j H_1 (\tau_{xyj}^{*r,r+1} + 2 \tau_{xyj}^{*r+1,r}) \}$$

$$d_{66} = \frac{1}{6} \xi_0 \pi \beta_j H_1 (\tau_{xyj}^{*r,r+1} + \tau_{xyj}^{*r+1,r})$$

$$d_{73} = \frac{1}{70} \xi_0 \pi \{ 35 \beta_i H_2 (\tau_{xyj}^{*r,r+1} + \tau_{xyj}^{*r+1,r}) - \beta_j H_1 (13 \tau_{xyj}^{*r,r+1} + 22 \tau_{xyj}^{*r+1,r}) \}$$

$$d_{74} = \frac{1}{420} \xi_0 \pi \{ 7 \beta_i H_2 (5 \tau_{xyj}^{*r,r+1} + 7 \tau_{xyj}^{*r+1,r}) - \beta_j H_1 (11 \tau_{xyj}^{*r,r+1} + 31 \tau_{xyj}^{*r+1,r}) \}$$

$$d_{77} = \frac{1}{70} \xi_0 \pi \beta_j H_1 (13 \tau_{xyj}^{*r,r+1} + 22 \tau_{xyj}^{*r+1,r})$$

$$d_{78} = -\frac{1}{210} \xi_0 \pi \{ 7 \beta_i H_2 (\tau_{xyj}^{*r,r+1} + 5 \tau_{xyj}^{*r+1,r}) + \beta_j H_1 (2 \tau_{xyj}^{*r,r+1} - 23 \tau_{xyj}^{*r+1,r}) \}$$

$$d_{83} = -\frac{1}{420} \xi_0 \pi \{ 7 \beta_i H_2 (7 \tau_{xyj}^{*r,r+1} + 5 \tau_{xyj}^{*r+1,r}) - 6 \beta_j H_1 (3 \tau_{xyj}^{*r,r+1} + 4 \tau_{xyj}^{*r+1,r}) \}$$

$$d_{84} = -\frac{1}{420} \eta_0 \xi_0 \pi \{ 7 \beta_i H_2 (\tau_{xyj}^{*r,r+1} + \tau_{xyj}^{*r+1,r}) - \beta_j H_1 (2 \tau_{xyj}^{*r,r+1} + 5 \tau_{xyj}^{*r+1,r}) \}$$

$$d_{87} = \frac{1}{210} \eta_0 \xi_0 \pi \{ 7 \beta_i H_2 (\tau_{xyj}^{*r,r+1} + 5 \tau_{xyj}^{*r+1,r}) - 3 \beta_j H_1 (3 \tau_{xyj}^{*r,r+1} + 4 \tau_{xyj}^{*r+1,r}) \}$$

$$d_{88} = \frac{1}{210} \eta_0 \xi_0 \pi \beta_j H_1 (\tau_{xyj}^{*r,r+1} - \tau_{xyj}^{*r+1,r})$$

ここで  $H_1, H_2, H_3, H_4$  は、それぞれ次の値をとる。  
ただし

$$h_1 = i - j + m, \quad h_2 = i - j - m$$

$$h_3 = i + j - m, \quad h_4 = i + j + m$$

$$\alpha_1 = (-1)^{h_1} - 1, \quad \alpha_2 = (-1)^{h_2} - 1$$

$$\alpha_3 = (-1)^{h_3} - 1, \quad \alpha_4 = (-1)^{h_4} - 1$$

( $i, j, m$  は正の整数)

とおく。

i)  $h_1 = 0$  の場合

$$H_1 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_2}{h_2} - \frac{\alpha_3}{h_3} + \frac{\alpha_4}{h_4} \right)$$

$$H_2 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_2}{h_2} + \frac{\alpha_3}{h_3} - \frac{\alpha_4}{h_4} \right)$$

$$H_3 = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_2}{h_2} + \frac{\alpha_3}{h_3} + \frac{\alpha_4}{h_4} \right)$$

$$H_4 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_2}{h_2} - \frac{\alpha_3}{h_3} - \frac{\alpha_4}{h_4} \right)$$

ii)  $h_2 = 0$  の場合

$$H_1 = \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\alpha_1}{h_1} - \frac{\alpha_3}{h_3} + \frac{\alpha_4}{h_4} \right)$$

$$H_2 = \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_3}{h_3} - \frac{\alpha_4}{h_4} \right)$$

$$H_3 = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_3}{h_3} + \frac{\alpha_4}{h_4} \right)$$

$$H_4 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_1}{h_1} - \frac{\alpha_3}{h_3} - \frac{\alpha_4}{h_4} \right)$$

iii)  $h_3 = 0$  の場合

$$H_1 = \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_2}{h_2} + \frac{\alpha_4}{h_4} \right)$$

$$H_2 = \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_2}{h_2} - \frac{\alpha_4}{h_4} \right)$$

$$H_3 = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_2}{h_2} + \frac{\alpha_4}{h_4} \right)$$

$$H_4 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_2}{h_2} - \frac{\alpha_4}{h_4} \right)$$

iv) その他の場合

$$H_1 = \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_2}{h_2} - \frac{\alpha_3}{h_3} + \frac{\alpha_4}{h_4} \right)$$

$$H_2 = \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_2}{h_2} + \frac{\alpha_3}{h_3} - \frac{\alpha_4}{h_4} \right)$$

$$H_3 = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_2}{h_2} + \frac{\alpha_3}{h_3} + \frac{\alpha_4}{h_4} \right)$$

$$H_4 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_2}{h_2} - \frac{\alpha_3}{h_3} - \frac{\alpha_4}{h_4} \right)$$

### 参考文献

- 1) Girkmann, K. : Stability of the webs of plate girders taking account of concentrated loads, IABSE Final Report, pp. 610~614, 1936.
- 2) Fischer, M. : Das Kipp-Problem querbelasteter exzentrisch durch Normalkraft beanspruchter I-Träger bei Verzicht auf die Voraussetzung der Querschnittstreue, Der Stahlbau, 3, pp. 77~86, 1967.
- 3) Rockey, K.C. and D.K. Bagchi : Buckling of plate girder webs under partial edge loadings, Int. J. Mech. Sci., Vol. 12, pp. 61~76, 1970.
- 4) Graves Smith, T.R. and S. Sridharan : A finite strip method for the buckling of plate structures under arbitrary loading, Int. J. Mech. Sci., Vol. 20, pp. 685~693, 1978.
- 5) Tien, Y.L. and S.T. Wang : Local buckling of beams under stress gradient, Proc. of ASCE, No. ST 8, pp. 1571~1587, Aug., 1979.
- 6) Bergfelt, A. : Studies and tests on slender plate girders without stiffeners, IABSE Colloquium, pp. 67~82, 1971.
- 7) Höglund, T. : Simply supported long thin plates I-girders without web stiffeners subjected to distributed transverse load, IABSE Colloquium, pp. 85~97, 1971.
- 8) Chern, C. : Experiments and studies on unstiffened

- thin web girders, ASCE National Structural Engineering Meeting, Meeting Preprint 1932, 1973.
- 9) Herzog, M. : Die Krüppellast sehr dünner Vollwandträgerstege nach Versuchen, Der Stahlbau, 1, pp. 26~28, 1974.
  - 10) 吉田宏一郎：帯板要素による平板構造の座屈解析，日本造船学会論文集，第130号，pp. 161~171, 1971.
  - 11) 長谷川彰夫・大田孝二・西野文雄：補剛された板要素の座屈強度に関する二、三の考察，土木学会論文報告集，第232号，pp. 1~15, 1974年12月.
  - 12) 吉田 博：H型鋼柱の局部座屈と曲げ座屈の連成座屈強度，土木学会論文報告集，第243号，pp. 19~32, 1975年11月.
  - 13) Plank, R.J. and W.H. Wittrick : Buckling under combined loading of thin, flat-walled structures by a complex finite strip method, Int. J. Nur. Meth. Eng., Vol. 8, pp. 323~339, 1974.
  - 14) Zetlin, L. : Elastic instability of flat plates subjected to partial edge loads, Proc. of ASCE, Vol. 81, Paper No. 795, pp. 795-1~795-24, 1955.
  - 15) Winter, G. : Lateral stability of unsymmetrical I-beams and trusses in bending, ASCE, Trans., Vol. 108, pp. 247~268, 1943.
  - 16) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd ed. (McGraw-Hill Book Co., New York, 1961).

(1981.2.22・受付)