

大水深および大きな Rayleigh 数における 熱対流の性質について

ON THE THERMAL CONVECTION OF AN EQUILIBRIUM STATE
FOR LARGE WATER DEPTH AND LARGE RAYLEIGH NUMBER

浅 枝 隆*・玉 井 信 行**・高 橋 由 多 加***

By Takashi ASAEDA, Nobuyuki TAMAI and Yutaka TAKAHASHI

1. はじめに

貯水池内に形成されている温度躍層の季節変化, 日変化を知ることは, 貯水池の濁水化, 富栄養化などの諸問題を防止するうえで非常に重要な問題である。こうした温度による成層状態を規定する最も大きな要因は, 水面での水塊と大気との間の熱の授受であると考えられる。水塊と大気との間の熱の交換には多くの経路があるが, その中で水塊が熱を得るものとしては, 日射, 大気からの放射, 伝導があり, 水塊が熱を失うものとしては, 水塊から大気への逆放射, 伝導, 水面から蒸発の形で失われる潜熱などがある。このうち, はじめに挙げた要因が後で挙げた要因より卓越している場合は, 春から夏にかけての受熱期, 日中などであり, この場合には, 貯水池内には安定な密度成層ができ, 温度による水の動きは少なくなる。しかしながら, 後者に挙げた要因の方が卓越する場合, すなわち, 秋から冬にかけての放熱期, 夜間などには, 貯水池の水塊は密度的に不安定になり, 対流が生じて, 比較的短時間のうちに, 非常に安定な温度躍層より上の部分, もしくは貯水池全体の温度が一様になってしまう。この過程においては, 貯水池内の鉛直方向の流動が激しく生じ, 貯水池内の物質の移動に与える影響も大であると考えられる。

このような, 熱的な不安定によって誘発される対流については, Bénard (1900) による規則正しく配列したセルの発見以来, 非常に薄いスリット内に生じる対流に関するものは, 多くの研究者によって理論的, 実験的な研究がなされており, Rayleigh 数によって現象が規定されることがわかっている。しかしながら, 水深が大きくなり, Rayleigh 数が非常に大きくなった領域におい

ては, いくつかの定性的な研究があるだけで, 対流の特性についてはほとんど不明だといえる。本研究は, 水深の大きな水塊で生じる対流について平衡な状態に達して後の特性について調べ, さらに, 水深の小さな所で生じる対流との差異を明らかにしたものである。

なお, 本論文は, 第 25 回水理講演会 (浅枝・玉井・高橋 (1981)) で発表した結果をさらに発展させたものである。

2. 実験および実験装置

実験は水面から冷却するものと, 底面から加熱するものとの両方のタイプで行った。実験に用いた水槽はスケールに応じて 2 種類用い, 対流の鉛直スケールが 5 cm 以下のものについての実験では, 底面形状が 25 cm × 25 cm, 深さ 50 cm の水槽を用い, 鉛直スケールがそれより大きいものについては, 底面形状が 90 cm × 90 cm, 深さ 70 cm のものを用いた。いずれも, 底板はアルミニウム板とし, その下に一定熱量を供給できるシリコンラバーヒーターを密着し, さらにその下に厚さ 3 cm の発泡スチロール板を敷き外部への放熱を押さえた。また, 時間を費やす実験については, アクリライト製の側板の内側に発泡スチロール板を貼りつけ, 側方からの熱の流入を防いだ。

水面から冷却する実験についての冷却法は, あらかじめ水槽内に気温より 4~10°C 高い水を入れておき, それを放置することによって行った。放熱フラックスは, Rohwer-Swinbank の式を用いて算出した。水温低下速度からこの式を検定した結果, 十分な近似度が得られることを確認した。底板を加熱する実験では, 原則として流入熱量を一定としたが, 比較のために, しだいに流入熱量を増していく実験もいくつか行った。また, 水深が大きい場合には, 水温を気温より数 °C 低い状態に保つてあるのでほとんど問題にならないが, 水深が小さくな

* 正会員 工修 埼玉大学助手 工学部建設基礎工学科

** 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

*** 工修 東京電力(株)

ってくる水温がすぐに上昇し、水面からの放熱も影響してくる。そのために、水深の非常に小さい場合には、水面にセルロイド板を置き水面からの水の蒸発を防いだ。

対流の性状は、アルミ粉末法による可視化によった。これは、アルミニウム粉末をあらかじめ水中に溶かしておき、それにスリット光をあて、それによってアルミニウム粉末が光ることにより流れの性状を知る方法である。今回の実験のように流速が非常に遅い現象の場合には、少しでも流速の速い部分のアルミニウム粉末は光らないために、上昇流、下降流の位置を知るにはきわめて便利な方法である。本研究では、底板もしくは水面付近に水平にスリット光をあて、湧昇線、沈み込み線の位置から対流セルの大きさを求めるのに用いた。さらに、対流速度の測定は、幅の広いスリット光を鉛直に照射し、露出時間1秒で接写し、アルミニウム粉末の軌跡から算出した。アルミニウム粉末は薄片状なので反射光度の強弱を生ずるが、増感現象により弱まった光も十分判読することができた。また、露出時間を変えた計測も行ったが、結果にほとんど差がみられなかった。

従来行われているようなスリット内に生じる対流では、上端、下端の温度を固定しているために、温度の代表スケールとしては上下端の温度差 ($\equiv \Delta T$) を用いた Rayleigh 数 ($\equiv \alpha \Delta T g d^3 / \rho \kappa \nu$) で整理されている。なお、ここで、 α は体膨張係数 ($\equiv 1/\rho (d\rho/dT)_{p=\text{const.}}$) を表わし、 d は鉛直方向代表スケール、 ρ は密度、 κ は温度伝導率、 ν は動粘性係数、 g は重力加速度を表わす。ところが、今回のように熱の流入フラックスを一定にした実験では、温度による密度変化分の代表スケールとしては、底板からの熱フラックス F_H を用いた $\alpha F_H d / \rho \kappa \nu$ なる量を用いる必要があり、この場合の Rayleigh 数は、 $\alpha F_H d^4 / \rho \kappa \nu^2$ となる。ここに、 c は比熱を表わす。このようなタイプの Rayleigh 数を以後、フラックス型 Rayleigh 数とよび、 R_{af} で表わす。従来の Rayleigh 数 R_a とフラックス Rayleigh 数の関係は次式で与えられる。

$$R_a = \frac{R_{af}}{N_u} \dots \dots \dots (1)$$

ただし、 N_u は Nusselt 数であり、 $N_u = F_H d / \rho \kappa \Delta T$ で表わされ、熱板と水が接している場合には、Silveston

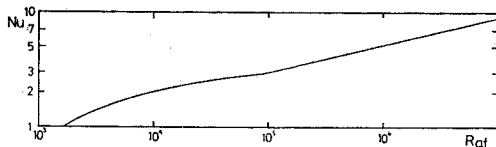


図-1 フラックス型 Rayleigh 数と Nusselt 数の関係 (Silveston の結果を $R_{af} = N_u R_a$ を用いて整理し直したもの)

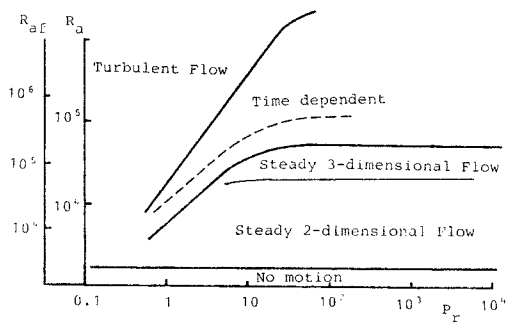


図-2 熱対流の領域区分 (Krishnamurti (1970) による。なお R_{af} については Silveston の実験結果より換算したものである。)

による実験結果 (Chandrasekhar (1961)) がある。これを、 N_u と R_{af} の関係に計算し直して示すと、図-1 のようになる。この図より、今回の実験範囲では、Nusselt 数の変化は最大 2 から 8 程度である。

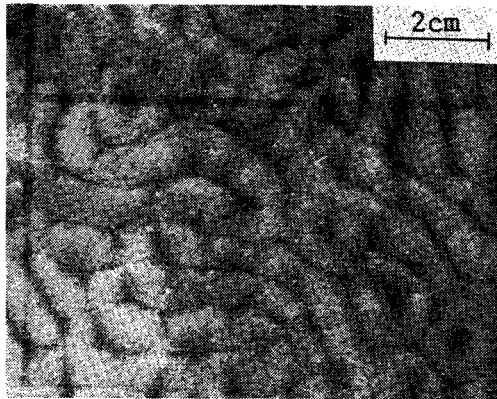
3. 平衡状態に達した対流の可視化

平衡状態に達した対流についての研究は、従来から、スリット内に生じる対流を対象にして、限界 Rayleigh 数 ($\equiv R_{ac}$) をわずかに超える範囲 (100 R_{ac} 以内) での実験的な研究が行われている。この範囲では、対流の性質は Rayleigh 数と Prandtl 数によって規定され、Krishnamurti (1970) によると 図-2 のような領域に分けられる。この中で、水の場合、すなわち $Pr=6.8$ の場合を考えると、 $R_a > 2 \times 10^5$ の領域では乱流領域と記され、組織だった構造が存在しないことが記されている。今回の実験の範囲は、フラックス型 Rayleigh 数で $R_{af} = 10^4 \sim 10^{10}$ であり、従来の Rayleigh 数に直すと、 $R_a = 5 \times 10^3 \sim 2 \times 10^9$ 程度であり、図-2 において、二次元定常流領域 I から、乱流領域 IV に相当する。

図-2 において I の領域にある対流の水平断面および鉛直断面について可視化したものを写真-1 (a), (b) に示す。この対流は、一定の熱フラックスを加え始めて 15 分ほど経過した後のもので、ほぼ平衡な状態に達した後のものである。この状態に至るまでの過程は次のようなものである。まず、加熱開始当初は流体は静止しているが、しばらくすると、整然と並んだ多角形状の対流が、全面にわたってほぼ同時に現われる。さらに加熱を続けていると、今度は、やはり全面にわたってほぼ同時に、いくつかの対流が合体する現象がみられる。写真-1 に示した段階は、その後の様子を示したものである。水平断面を示したのものについては、水平スリットの幅が水深とほぼ同程度であったこと、湧昇部、沈み込み部が底板付近から水面まで明確に続いていることなどのために、湧昇部、沈み込み部ともに黒く写っている。対流は

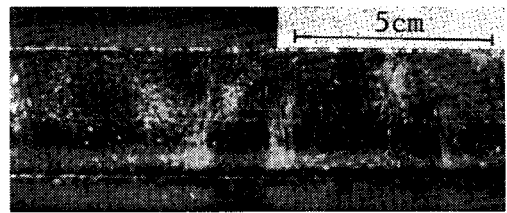


(a) 鉛直断面

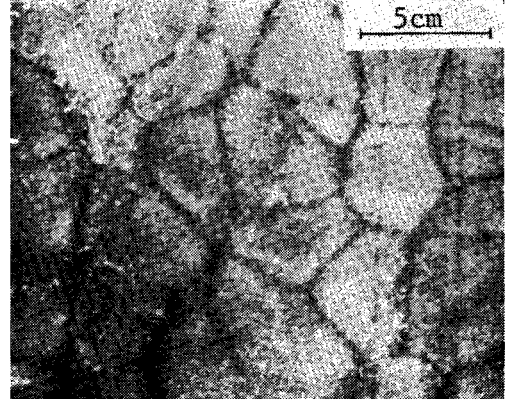


(b) 水平断面

写真-1 図-2 中の I の領域の対流の可視化
($R_{af}=6.7 \times 10^4$, $d=0.85$ cm)



(a) 鉛直断面



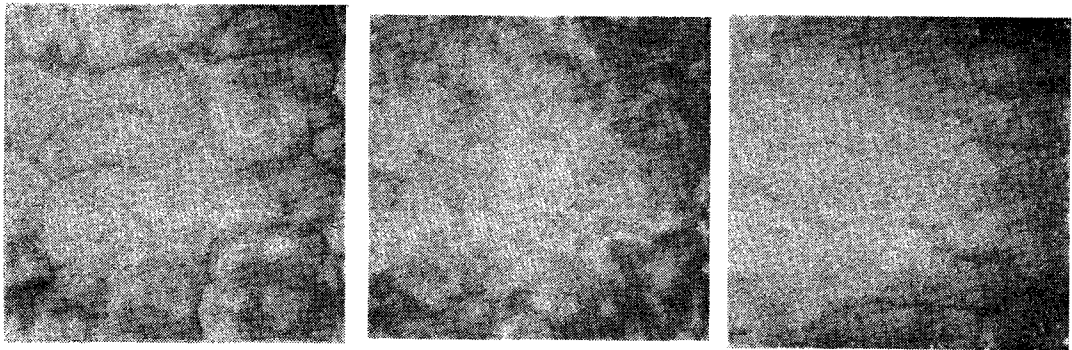
(b) 水平断面

写真-2 図-2 中 IV の領域の対流の可視化
($R_{af}=1.0 \times 10^7$, $d=3.0$ cm)

曲がりくねった二次元的な構造をしているが、ところどころに二次元対流を切断する部分がみられる。この部分は、以前に多角形構造をしていたときには、はっきりと分かれていた部分である。 R_{af} がこれより多少大きい場合には、このような切断部はみられず、滑らかな二次元対流となる。鉛直断面を示した写真-1(a)をみると、同心円状に流線をもった対流が規則正しく並んでいる様子がよくわかる。流速は、鉛直方向に運動している部分の方が水平方向に運動している部分より多少速くなっているが、ほぼ同程度の値を指している。この領域での対流はきわめて安定であり、時間的・場所的な変動をほとんど伴わない。

次に、図-2 において IV の領域にある対流を可視化したものが写真-2(a),(b)である。水平断面についての写真は、スリット光を底板近傍で水平に入射して得たものである。したがって、写真中で黒い線となって現われている部分が上昇流の存在している部分であり、その黒い線に囲まれた部分にはゆっくりとした下降流が存在している。 R_{af} の小さい場合と違って、この領域での対流では、この上昇流の存在する部分は非常に不規則な多角形の辺の部分にあっている。しかも、この多角形はゆっくりと変動を続け、時には消滅したり、隣りの多角形と合体したりするので、しばらく時間の経った後には、まったく違った様相をなしていることもある。この原因は鉛直断面の写真から理解できる。底板のところど

ころから比較的速い速度の湧昇流がみられ、それが水面に達してしばらく水平に進むとゆっくりとした下降流になっていることがわかる。湧昇流と下降流の異なる点は、湧昇流は比較的狭い部分から急激に上昇しているが、下降流は広い領域でゆっくり下降している点である。しかも、こうした湧昇流は常時同程度の強度をもっているのではなく、間欠的に強い湧昇流がみられる。この湧昇流が新しく起こる場合には、先頭に渦輪がみられ、その後ろに尾のように上昇流の存在する部分が続いている。また、湧昇流の弱まっていた所に再び強い湧昇流が生じる場合も同様な渦輪がみられる。さらに、上昇流のまわりには小さな渦が存在し、瞬間的な一枚の写真だけでは上昇流は判別つけにくくなっている。この湧昇流の発生する位置は比較的長時間同じ位置に保たれている。その理由は、一度強い湧昇流が発生すると、しばらくはそこには上昇流が存在している。そのため、新しく湧昇流が発生する場合には同じ場所から発生する可能性が高く、継続して次々に湧昇流が発生するようになるためである。しかし、長期にわたって強い湧昇流の発生がなく、上昇流の弱まっていた場所の近くから、新しい湧昇流が発生すると上昇流の存在場所が移ることになる。したがって、こうした場合には平行的な多角形状も様相を変えることになる。しかし、対流内の流体塊が上下する程度の時間スケールでは、対流の様相はほぼ一定であるといえる。



(a) 水面付近 (b) 水深の中央付近 (c) 底板付近

写真—3 同時刻における対流の水平3断面の可視化

さらに、底板付近に発生した湧昇流が水面まで達し、水平に広がって下降していく様子を確認するために、ほぼ同時刻に、水面付近、中層、底板付近の3断面について、水平にスリット光をあて写真をとったものが写真—3である。(a)は水面付近のものである。黒くみえる線は、その両側から逆向きに押し寄せてきた水平流が沈み込む部分である。その部分以外にも、黒い線に囲まれた中にも弱い下降流が存在するために黒くみえる部分が存在している。(b)は中層のものである。上昇流のまわりに多くの渦が存在するために非常に複雑な様相を呈している。さらに、(c)は底板付近のものである。(a)と(c)を重ね合わせてみると、一方の写真中に現われている多角形の中に、他方の写真の多角形の頂点がほぼ一つ存在していることがわかる。これは、次のような三次元的な流れが存在していることを示している。すなわち、底板の多角形の辺の位置から上昇し始めた湧昇流が、しばらく上昇するうちに頂点の位置に収束し、水面に達した後、四方に広がって沈み込むような流れが存在していることがわかる。

以上のように、図—2のIの領域にあたる対流と、IVの領域にあたる対流の間には非常に大きな性質の差がみられる。外部パラメーターである R_{af} をいろいろ変えて実験した結果によると、Iの領域のように非常に安定な定常対流の起こる領域は $R_{af} < 5 \times 10^4$ の領域、一方、不規則な変動の激しい対流の起こる領域は $R_{af} > 2 \times 10^6$ の領域であることがわかった。これより、以後、前者を定常対流領域、後者を乱流対流領域とよぶことにする。

4. 対流速度

ここでは対流速度と巨視的な水理量との関係を考察する。図—3は対流速度の鉛直方向の分布を示したものである。これは、アルミニウム粉末の流跡線を写した写真から、 1 cm^2 角のメッシュで

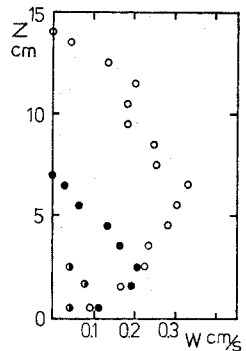
読み取った鉛直方向速度を水平方向に平均することによって得られたものである。この図より、鉛直方向速度 $W(z)$ を次のように近似させる。

$$W(z) = K \sin \frac{\pi}{d} z \dots\dots\dots (2)$$

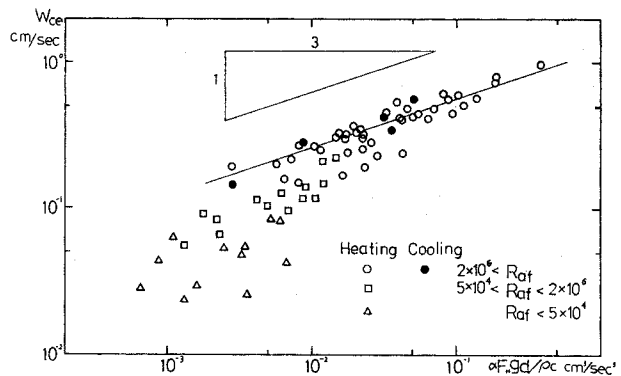
ここに、 d は対流の鉛直スケール、 z は底面より鉛直上向きにとった座標軸である。

さらに、 K については次のように定めた。一つの対流について、10枚程度の写真を取り、それぞれの写真から読み取った最大鉛直速度をすべての写真について平均し、その値をそのときの対流の最大対流速度 W_{ce} 、すなわち K の値とした。湧昇流は三次元的な分布をしているが、一枚の写真中には、最低一つは湧昇流の中心部が写されており、最大値を示す部分はとらえられているものと思われる。したがって、こうした方法でも、湧昇流の最大流速の平均値は得られているものと思われる。

こうして得られた最大対流速度 W_{ce} を、単位時間に



図—3 対流の鉛直方向流速分布(水深14 cm, 7 cm, 3 cmの例)



図—4 最大対流速度(図中の実線は式(3)を表わす)

解放される浮力エネルギー $\alpha F_H g d / \rho c$ に対して整理したものが図-4である。可視化された対流の性状は定常対流領域と乱流対流領域とで大きく異なっていたが、この図をみると、最大対流速度についても同様な分類ができることがわかる。

(1) 乱流対流領域

図-4によると、 $R_{af} > 2 \times 10^6$ なる乱流対流領域では、 W_{ce} は解放される浮力エネルギーの 1/3 乗に比例し、次のように表わされる。

$$W_{ce} = 1.3 \left(\frac{\alpha F_H g d}{\rho c} \right)^{1/3} R_{af} > 2 \times 10^6 \dots (3)$$

これは、次のように考えることにより理解できる。

流速は水深のほぼ中央付近で最大値をとり、多少の変動はあるがしばらくはほぼ一定の値となる。したがって、この付近では、底板上を水平に運動しているときに流体塊に加わった浮力が、鉛直方向に運動することによって周囲流体との間に働くせん断力とほぼつり合っていると考えることができる。これより、次のような関係式が成立する。

$$\frac{\alpha F_H}{\rho c} \frac{l}{\bar{u}} g \sim \epsilon \frac{d\bar{w}}{dx} \sim \epsilon \frac{d\bar{w}}{dy} \dots (4)$$

ここに、 l は対流の水平スケールを表わし、 \bar{u} は底板上の水平特性流速、 \bar{w} は水深の中央部付近での鉛直特性流速を、 ϵ は渦動粘性係数を表わす。

完全流体と仮定し、流体塊が上下方向に運動する時間スケールに比べて、対流がその大きさ・形状を変化させる時間スケールが十分大きいと考えると、時間的に平均された鉛直方向対流流速 w および水平方向の 2 成分 u, v に関して、

$$u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}, v = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \dots (5)$$

が求まる。ここに、 a は水平波数の絶対値を表わし、 x 軸方向の成分 a_x, y 軸方向の成分 a_y を用いれば、 $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ と表わせる。式 (5) の u, v の関係より、 \bar{u} と \bar{w} の関係として、 $\bar{u} \sim l/d \cdot \bar{w}$ が求まる。さらに、渦動粘性係数 ϵ を $\epsilon = \text{const.} \times \bar{w} l$ と表わせれば、式 (4) の関係から

$$g \frac{\alpha F_H}{\rho c} d \sim \bar{w}^3 \sim W_{ce}^3 \dots (6)$$

が求まることになり、式 (3) と同様な形となる。この結果より、乱流対流領域では底板から流体へ加えられた熱的なポテンシャルエネルギーが、ほぼ一定の比率で流体の運動エネルギーに変換されている、と言い換えることができる。

(2) 定常対流領域

図-4 からわかるように、定常対流領域、すなわち、

$R_{af} < 5 \times 10^4$ の範囲では、最大対流速度 W_{ce} は熱的なポテンシャルエネルギーのフラックスだけの関数では表わし得ない。この領域での対流の性状は、限界 Rayleigh 数をわずかに超えた対流の性質に近いものをもっている。従来、線形理論を拡張して適用することを考える。

Chandrasekhar (1961) に習い、限界 Rayleigh 数をわずかに超えた対流に対して、今回の実験における境界条件のもとでの鉛直流速の振幅について理論的な算定を次のように行う。

運動方程式、熱量保存式、連続式、密度の状態方程式は次のように表わせる。

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \text{grad } \hat{\mathbf{u}} = - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p - g \mathbf{K} \left(1 + \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) + \nu \nabla^2 \hat{\mathbf{u}} \dots (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \text{grad } T = \kappa \nabla^2 T \dots (8)$$

$$\text{div } \hat{\mathbf{u}} = 0 \dots (9)$$

$$\delta \rho = -\alpha \rho_0 [T - \tilde{T}_0] \dots (10)$$

ここに、 \mathbf{K} は鉛直方向単位ベクトルを、 $\hat{\mathbf{u}}$ は流速ベクトルを、 ρ_0, \tilde{T}_0 はそれぞれ基準密度、基準温度を表わす。流速、圧力、温度について、水平面内の平均量と三次元的な摂動量とに分離して次式のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}_0(z) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \\ p &= p_0(z) + \Pi(\mathbf{x}, t), \\ T &= T_0(z) + \theta(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

式 (7), (8), (9) は次のように書き直される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) \text{grad}(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) &= - \frac{1}{\rho_0} \text{grad}(p_0 + \Pi) - g \mathbf{K}(1 - \alpha \theta) + \nu \nabla^2(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) \dots (12) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) \text{grad}(T_0 + \theta) = \kappa \nabla^2(T_0 + \theta) \dots (13)$$

$$\text{div}(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) = 0 \dots (14)$$

式 (13) について水平面内での平均をとると、

$$\frac{d}{dz} \langle \theta w \rangle = \kappa \frac{d^2 T_0}{dz^2} \dots (15)$$

が導かれる。ここに、記号 $\langle \rangle$ は水平面内での平均を意味する。式 (15) を $z=0 \sim d$ の範囲で積分し、境界条件 $T_0(z), T_0(d)$ を用いて表わすと、

$$\begin{aligned} \kappa T_0(z) &= \kappa T_0(0) + \int_0^z \langle \theta w \rangle dz \\ &= \left[\kappa \{ T_0(0) - T_0(d) \} + \int_0^d \langle \theta w \rangle dz \right] \frac{z}{d} \dots (16) \end{aligned}$$

となる。

式 (12) に \mathbf{u} を乗じ、式 (13) に θ を乗じて水平面

内で平均をとり、 $z=0\sim d$ の範囲で積分し、式(16)を用いて dT_0/dz を消去し、さらに定常状態を仮定すると、

$$g\alpha \int_0^d \langle \theta w \rangle dz + \nu \int_0^d \langle \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} \rangle dz = 0 \dots\dots (17)$$

$$\frac{T_0(0) - T_0(d)}{d} \int_0^d \langle \theta w \rangle dz + \kappa \int_0^d \langle \theta \nabla^2 \theta \rangle dz$$

$$= \frac{1}{\kappa} \left\{ \int_0^d \langle \theta w \rangle^2 dz - \frac{1}{d} \left(\int_0^d \langle \theta w \rangle dz \right)^2 \right\}$$

\dots\dots\dots (18)

が導かれる。式(17)は、加えられるポテンシャルエネルギーが粘性逸散と等しくなるという結果を示しており、平衡状態にある対流についての特性である。有限振幅対流を

$$\left. \begin{aligned} w &= AW(x) f(x, y) \\ \theta &= A\theta(x) f(x, y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ただし、 $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2) f = -a^2 f$, $\langle f^2 \rangle = 1$, として代入し、式(5)を用いる。さらに、 z について d で無次元化して表わし、境界条件を考慮して多少の計算を行うと、

$$\frac{A^2}{\kappa} \left\{ \int_0^1 W^2 F^2 dz - \left(\int_0^1 W F dz \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{g\alpha}{\nu} a^2 d \{ T_0(0) - T_0(d) \} \int_0^1 W F dz$$

$$- \frac{\kappa}{d^2} \int_0^1 \left\{ \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 + a^2 F^2 \right\} dz \dots\dots (20)$$

が求まる。ただし、 $F = \{(d/dz)^2 - a^2\} W$ を表わす。これより、 A^2 について、

$$A^2 = \frac{\kappa^2 a^2}{d^2} \hat{K} \hat{R} \left(\frac{Ra_f}{2 \hat{R} Nu} - 1 \right) \dots\dots\dots (21)$$

ただし、

$$\hat{R} = \frac{\int_0^1 \left\{ \left(\frac{d}{dz} \nabla^4 W \right)^2 + a^2 \nabla^4 W \right\} dz}{a^2 \int_0^1 W \nabla^4 W dz}$$

$$\hat{K} = \frac{\int_0^1 W \nabla^4 W dz}{\int_0^1 W^2 (\nabla^4 W)^2 dz - \left(\int_0^1 W \nabla^2 W dz \right)^2}$$

を表わす。

写真-1(a) からわかるように、流跡線は同心円状になっていることから鉛直流速分布 $W(z)$ は、

$$W(z) = \sin \pi \frac{z}{d} \dots\dots\dots (22)$$

と近似できる。これを式(21)に代入すると、

$$A = 2 \frac{\kappa a}{d} \left[\frac{1}{\pi^2 + a^2} \left\{ \frac{Ra_f}{Nu} - \frac{(\pi^2 + a^2)^3}{a^2} \right\} \right]^{1/2}$$

\dots\dots\dots (23)

が求まる。ここで A は W_{ce} にあたる量であり、外部条件からは一義的には定まらない量である。対流の水平

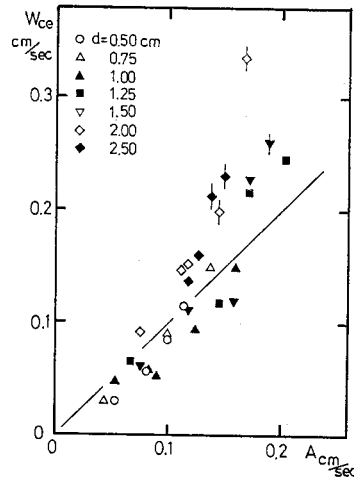


図-5 定常対流領域の対流の流速についての理論値と実験結果 (A は、 Ra_f , Nu , a , κ , d の値から計算した量であり、 W_{ce} は実測値を示す。図中の実線は式(23)を表わす。また! の記号は $Ra_f > 2 \times 10^8$ の領域にあるものを示す)

波数の絶対値 a を含んでいる。

図-5 は、式(23)より求まる理論値と、実測より求めた W_{ce} を比較したものである。ここで、 a の値には実測値を、 Nu の値には図-1の実験値を用いた。乱流対流領域にある対流の場合には理論値より大きな値を示すが、定常対流領域にあるものについてはほぼ実測値を説明しているといえる。対流の鉛直スケール d で無次元化した水平波数 a は、鉛直スケールと水平スケールの比に比例する量であるが、この値についての検討は5.で行う。

5. 対流の代表スケール

(1) 乱流対流領域

湧昇流は平板付近に可視化(3.参照)されたような多角形の辺の位置から起こっている。多角形の形状はさまざまであるので、この辺の長さの平均値を対流の水平スケールとする。対流セルの辺の長さは一枚の写真中でもいろいろな値をとるが、その分布を示すと図-6のようになる。非常に大きな値となるものはきわめて少なく、度数の多い平均値の付近では正規分布に近いものである。したがっ

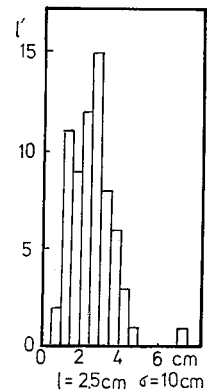


図-6 対流の水平スケールについてのヒストグラムの一例 (平均 2.5 cm, 標準偏差 1.0 cm の場合)

て、一つのケースについて数枚の写真にわたって平均し、その値をもって対流の水平スケール l とした。辺の長さ l と波数 a の関係はたとえば、底面が正方形のセルでは $l=2\sqrt{2}\pi/a$ 、正六角形のセルでは $l=\frac{4\pi}{3a}$ の関係がある。Willis, et al. (1979), Farhadieh, et al. (1974) らの行った薄いスリット内での実験では、水平スケール l の鉛直スケール d に対する比は、Rayleigh 数とともに増加すると報告されている。しかしながら、今回得られた乱流領域での結果はこれと異なっている。

この領域では温度の伝達はおもに移流で行われており、境界付近を除き現象は温度伝導率には独立であると考えられる。さらにフラックス型 Rayleigh 数が支配的なパラメーターであるとすれば、現象を支配するパラメーターとして、フラックス型 Rayleigh 数とプラントル数の逆数の2乗の積、すなわち、 $R_{af} \cdot Pr^{-2}$ が考えられる。見やすくするために $(R_{af} \cdot Pr^{-2})^{1/2}$ の関数として、 l/d を表わしたものを 図-7 に示す。

ここで、鉛直スケール d については、全水深にわたるような対流ができているときには水深を、初めに顕著な温度躍層が存在している場合には、その温度躍層までの水深をとっている。プラントル数はほぼ一定であるのでこの図をみると、 $R_{af} < 2 \times 10^6$ の領域では、 l/d は R_{af} の増加とともに増加しているが、乱流対流の領域では R_{af} の増加とともに減少し、実験的に、

$$\frac{l}{d} = 7.1 \left(\frac{\alpha F_H}{\rho c} \frac{gd^4}{\nu^3} \right)^{-\frac{1}{6}} = 7.1 R_{af}^{-\frac{1}{6}} Pr^{\frac{1}{3}} \dots\dots\dots (24)$$

なる関係が得られる。実際には、多角形の形がさまざま

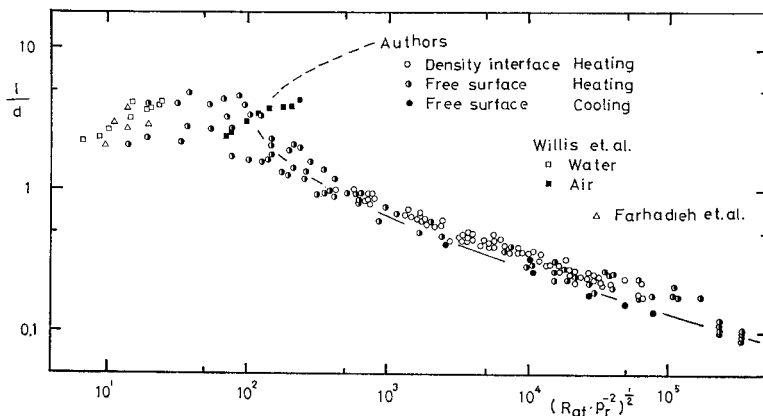


図-7 対流のスケール比 (○ ● ● は静止状態から一定熱フラックスを加え続けた実験結果であり、それ以外は徐々に増加させた実験である。Willis らの実験³⁾、Farhadieh と Tankin の実験結果³⁾も示してあるがこれらは R_{af} の代わりに R_a を用いてある)

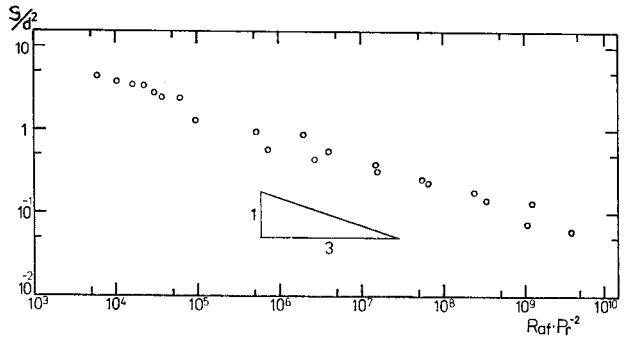


図-8 底板近傍の対流の水平断面積と $R_{af}Pr^{-2}$ の関係

なので形の種類による影響を調べる必要がある。形状の効果を消去するために、 l/d の代わりに多角形の面積 S を鉛直スケールの2乗で無次元化したものについての結果を示したものが 図-8 である。図-8 には乱流対流領域の結果のみが示されており、式 (24) と同様の傾向を示すことがわかる。これより対流セルの形状は見掛け上さまざまな形をとるが、適切な平均化を行えば巨視的な水理量の間には式 (24) の関係が成立するといってもよいと考えられる。

実験的に得られるこうした関係については次のように考えることができる。

対流の鉛直スケールが大きく、Rayleigh 数が大きくなってくると乱流状態に近くなる。そのために層内は一様化して、平均的な温度勾配はほとんどなくなり、温度の分子拡散の影響はほぼ無視できるようになる。さらに、平衡状態にある対流については、式 (17) に示されるように底板から加えられ解放されるポテンシャルエネルギーと粘性逸散とはつり合い、その結果運動エネルギーは変化しない。このことは、ポテンシャルエネルギーを P 、粘性逸散率を ϕ とすると、

$$\frac{dP}{dt} = -\rho\phi \dots\dots (25)$$

と書ける。下方から一定の熱フラックス F_H が供給されるとすると、層厚 d の単位柱当たりの熱量保存式、質量保存式は以下のようなになる。

$$\frac{d}{dt} (T - \tilde{T}_0) d = \frac{F_H}{\rho c} \dots (26)$$

$$\frac{d}{dt} \rho d = \frac{d}{dt} [\rho_0 \{1 - \alpha \cdot (T - \tilde{T}_0)\} d] = 0 \dots (27)$$

式 (26) および式 (27) より、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dd}{dt} &= -\frac{\alpha F_H}{\rho c} \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{1}{d} \frac{dd}{dt} \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

が導かれる。式 (28) よりエネルギー変化率は、

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\rho g \frac{d^2}{2} \right) \\ &= -gd \frac{\alpha F_H}{c} \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

のように求められる。

次に、単位時間内に粘性逸散として失われるエネルギー ϕ は、単位柱当たり、

$$\phi = -\nu \int_0^d \{ \langle u du \rangle + \langle v dv \rangle + \langle w dw \rangle \} dz \dots\dots\dots (30)$$

と表わされる。また、三方向の流速の間には式 (5) の関係が存在する。簡単な場合として直方体状の対流を仮定すると、式 (5) より、

$$\left. \begin{aligned} w &= W(z) \cos a_x x \cdot \cos a_y y \\ &= W(z) \cos \frac{2\pi}{l} x \cos \frac{2\pi}{l} y \\ u &= -\frac{l}{4\pi} \frac{d}{dz} W(z) \cdot \sin \frac{2\pi}{l} x \cdot \cos \frac{2\pi}{l} y \\ v &= -\frac{l}{4\pi} \frac{d}{dz} W(z) \cdot \cos \frac{2\pi}{l} x \cdot \sin \frac{2\pi}{l} y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

と表わされる。式 (31) を式 (30) に代入し、一つの対流内で積分すると次式が求まる。

$$\phi l^2 = l^4 \frac{\nu}{32 \pi^4} \int_0^d \left[\left(\frac{d^2}{dz^2} - a^2 \right) W \right]^2 dz \dots\dots (32)$$

ここで、 $W(z)$ の鉛直分布に関しては式 (2) および式 (3) より、

$$\left. \begin{aligned} W(z) &= W_{ce} \sin \frac{\pi}{d} z \\ \text{ただし } W_{ce} &= 1.3 \left(\frac{\alpha F_H g d}{\rho c} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

と仮定できる。式 (33) を式 (32) に代入すると、

$$\phi l^2 = \frac{(1.3 \pi)^2}{64} \nu l^4 \left(\frac{\alpha F_H}{\rho c} g d \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{d^2} + \frac{8}{l^2} \right)^2 d \dots\dots\dots (34)$$

が求まる。式 (29)、式 (34) を式 (25) に代入し、 l/d に関して解くと、

$$\begin{aligned} \frac{l}{d} &= 2\sqrt{2} \left[\left\{ \frac{2}{(1.3 \pi)^2} R_{af}^{\frac{1}{3}} P_r^{-\frac{2}{3}} - 1 \right\} \right. \\ &\quad \left. \pm 2\sqrt{\frac{1}{(1.3 \pi)^4} R_{af}^{\frac{2}{3}} P_r^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{(1.3 \pi)^2} R_{af}^{\frac{1}{3}} P_r^{-\frac{2}{3}}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \dots\dots\dots (35)$$

が導かれる。また、式 (35) において実根をもつ条件として

$$R_{af} \geq (1.3 \pi)^6 P_r^2 = 2.08 \times 10^5 \dots\dots\dots (36)$$

が得られる。式 (36) の右辺の値は、乱流領域の対流として存在でき得るフラックス型 Rayleigh 数の最小値を示すと考えられ、これを R_{aft} とする。これを用いて式 (35) を書き直すと、

$$\begin{aligned} \frac{l}{d} &= 2\sqrt{2} \left\{ \left(2 \frac{R_{af}}{R_{aft}} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. \pm 2\sqrt{\left(\frac{R_{af}}{R_{aft}} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{R_{af}}{R_{aft}} \right)^{\frac{1}{3}}} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \dots\dots\dots \text{直方体セル} \dots\dots (37)$$

を得る。同様にして、式 (31) において $v \equiv 0$ としてロール状の二次元対流を仮定すると、式 (37) の代わりに

$$\begin{aligned} \frac{l}{d} &= 2 \left\{ \left(2 \frac{R_{af}}{R_{aft}} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. \pm 2\sqrt{\left(\frac{R_{af}}{R_{aft}} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{R_{af}}{R_{aft}} \right)^{\frac{1}{3}}} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \dots\dots \text{2次元ロールセル} \dots\dots (38)$$

を得る。この場合は、 $R_{aft} = 8(1.3 \pi)^6 P_r^2$ となる。

図-9 に、式 (37) および式 (38) の関係を示す。この図によると、これらの関係式は実線および破線で示した2本の分枝をもつことになる。この2本の分枝のうちどちらをとり得るかは次のような考察から明らかとなる。この領域にある対流では流体粒子の動きが速く、比較的自由に形を変え得ることは先に記した。そのために、形状としてはエネルギー的に安定な方の分枝をとり得るものと考えられる。ポテンシャルエネルギーとしてはどちらも等しいと考えられるので、単位体積当たりの運動エネルギー E_k を比較してみる。 E_k は、

$$E_k = \frac{1}{d l^2} \int_0^d \int_0^l \int_0^l \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz \dots\dots\dots (39)$$

で求められ、式 (31)、(33) を代入すると、

$$E_k = \frac{\rho l^2}{128 d^2} W_{ce}^2 \left(1 + \frac{8 d^2}{l^2} \right) \dots\dots\dots (40)$$

となる。これに式 (37) を代入すると、

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{\rho}{32} W_{ce}^2 \left\{ 2 \left(\frac{R_{af}}{R_{aft}} \right)^{\frac{1}{3}} \right. \\ &\quad \left. \pm 2\sqrt{\left(\frac{R_{af}}{R_{aft}} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{R_{af}}{R_{aft}} \right)^{\frac{1}{3}}} + 1 \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (41)$$

が求まる。複号は、+のものが図-9における上側の分

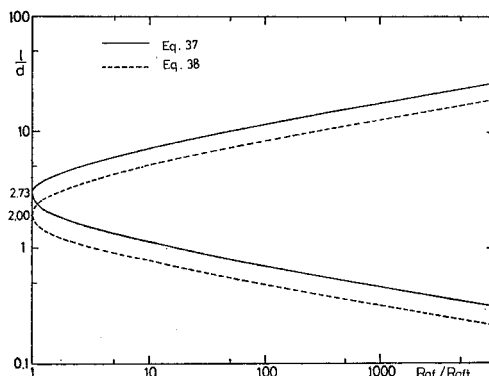


図-9 式 (37)、式 (38) の解

枝、-のものが下側の分枝を表わす。式(41)より、下側の分枝の方がエネルギー的に安定であり、図-7中に示した実際の実験値にもよく合っていることがわかる。さらに、図-7に示すように、乱流領域の対流では水平スケールが鉛直スケールの3倍以内であることもいえる。

外部パラメーターで整理すると、 l/d は式(37)や式(38)のように表わされるが、式(3)を考慮すると、式(37)、(38)の安定な分枝はそれぞれ、

$$\frac{l}{d} = 2\sqrt{2} \left\{ \left(\frac{2}{1.3^3 \pi^6} R_e^3 - 1 \right) - 2\sqrt{\frac{R_e^2}{1.3^6 \pi^4} - \frac{R_e}{1.3^3 \pi^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots \text{直方体セル} \dots\dots\dots (42)$$

$$\frac{l}{d} = 2 \left\{ \left(\frac{2}{1.3^3 \pi^6} R_e^3 - 1 \right) - 2\sqrt{\frac{R_e^2}{1.3^6 \pi^4} - \frac{R_e}{1.3^3 \pi^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots \text{2次元ロールセル} \dots\dots\dots (43)$$

と書き換えられる。ただし、ここで $R_e = W_{ce}d/\nu$ を表わす。このことは、外部パラメーターで整理すればスケール比は式(37)および式(38)のように表わされるが、実際には対流自身の Reynolds 数に支配されていることがわかる。

(2) 定常対流領域

図-7からもわかるように、定常対流領域では乱流対流領域と違って、傾向としては Rayleigh 数の増加とともにスケール比も増加する。しかし、乱流対流領域の場合のように外部パラメーターである R_{af} で一義的に表わすことは不可能である。ところが、乱流対流領域でそうであったように、Reynolds 数に対してはよい相関性をもっている。図-10は実測から求めた W_{ce} を用いてスケール比を表わしたものである。これより、定常対

流領域については実験式としてほぼ次のような関係が導ける。

$$\frac{l}{d} = 2.0 R_e^{\frac{1}{3}} \quad \text{ただし} \quad R_e = \frac{W_{ce}d}{\nu} \dots\dots\dots (44)$$

さらに、式(44)に式(23)を代入すると、定常対流領域においても、スケール比および代表流速を外部パラメーターで表わすことが可能となる。すなわち、スケール比に関しては次式が成立し、

$$\left(\frac{l}{d} \right)^8 \left\{ \left(\frac{l}{d} \right)^2 + 8 \right\}^2 = \frac{2^{11}}{Pr^2 \pi^2} \left[\frac{R_{af}}{Nu} \left(\frac{l}{d} \right)^4 - \frac{\pi^4}{8} \left\{ \left(\frac{l}{d} \right)^6 + 2^9 + 24 \left(\frac{l}{d} \right)^2 \left\{ \left(\frac{l}{d} \right)^2 + 8 \right\} \right\} \right] \dots\dots\dots (45)$$

スケール比 l/d は、 R_{af} 、 Nu 、 Pr の関数として表わされる。特に、 $R_{af}/Nu \gg l/d$ の場合には、

$$\frac{l}{d} = \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{Pr} \sqrt{\frac{R_{af}}{Nu}}} - 1} \dots\dots\dots (46)$$

と簡潔になる。これを式(44)に代入すると、鉛直スケールと動粘性係数で無次元化した対流の代表流速について、

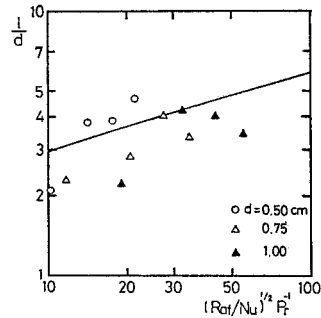


図-11 定常対流領域における対流のスケール比を外部パラメーターで表わした場合

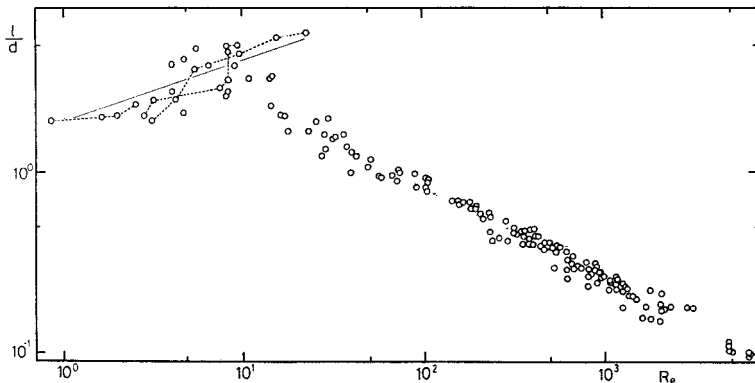


図-10 Reynolds 数とスケール比の関係 (図中の実線は式(44)の関係を示す。また破線は徐々に熱フラックスを増していった場合の変化してゆく過程を示す)

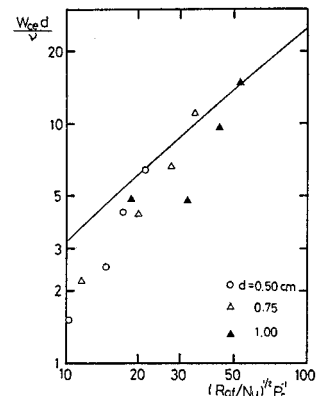


図-12 定常対流領域における対流の最大流速を外部パラメーターで表わした場合

$$\frac{W_{ced}}{\nu} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left\{ \sqrt{1 + \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{Pr} \sqrt{\frac{R_{af}}{N_u}} - 1} \right\}^{\frac{3}{2}} \dots\dots\dots (47)$$

が導かれる。式(45)、式(47)の結果と今回の実験結果との比較を 図-11、図-12 に示す。式(44)の精度に多少の問題があるために散らばりは大きい、概略の傾向は一致しているといえる。ただし、ここで注意を要するのは、式(44)は水における結果であり、物性の異なる流体では単なる Reynolds 数だけの関数ではなく、Prandtl 数の関数にもなることが予想される。

(3) 定常対流領域から乱流対流領域への遷移

図-10 からわかるように、 $R_e < 10$ の領域はほぼ定常対流の領域であり、 $R_e > 40$ の領域は完全な乱流対流の領域である。それでは、 $10 < R_e < 40$ の領域ではどのような現象が観察されるであろうか。

瞬間的に一定の熱フラックスを加え始める形式の実験においては、 $R_e \sim 10$ になると、対流の平面形状の中に明らかに乱流対流領域のものとみられるものが混在してくる。 R_e の増加とともに乱流対流領域の対流セルの形をしたものの割合が多くなり、 $R_e \sim 40$ 程度からはほぼ全体が乱流対流領域に入る。

ところが、しだいに熱フラックスを増していったものについては、 $R_e \sim 20$ 程度まではほぼ全域にわたって定常対流セルの傾向を示していた。

このように加熱方式による違いをみせるのは、一度できた対流形状のパターンは、Reynolds 数が小さい間は別のパターンに移行させるために多くのエネルギーを必要とするために、容易にはそのパターンを変化できないためであると考えられる。

6. 結 論

熱的な不安定によって水中に生ずる対流が平衡状態に達して後の平均的な性質について考察を加えてきた。不安定を生ずる原因については水表面における冷却、および底面における加熱の両者につき実験を行い、差異がないことを確認した。特に、大水深の場合、すなわち Rayleigh 数が非常に大きな乱流対流領域に関する考察を充実させ、従来の熱対流に関する成果を進展させた。本研究による主要な結論は以下のとおりである。

(1) 平衡状態に達した対流は、乱流対流と定常対流に大別できる。その境は、外部パラメーターとしてはフラックス型 Rayleigh 数で分けられ、 $R_{af} > 2 \times 10^6$ で乱流対流領域、 $R_{af} < 5 \times 10^4$ で定常対流領域となる。しかし、より直接的な分類は対流層の Reynolds 数 R_e を用いて行うことができ、 $R_e > 40$ で乱流対流領域、

$R_e < 10$ で定常対流領域となる。

(2) 定常対流領域では、対流の平面形は規則正しい多角形もしくは曲がりくねった二次元形をなし、鉛直方向には規則正しい同心円状の流線をもっている。しかも、この対流は非常に安定で、位置、大きさをほとんど変えない。

乱流対流領域で形成される対流はきわめて不規則な形状をなしており、底面上の多角形の辺にあたる所から湧昇流が起こり、面にあたる所に下降流が起こっている。水面付近のものについては、まったく逆になっている。底面からの湧昇流は連続的もしくは間欠的に起こるサーマルの形をなしている。このサーマルはそれ以前に湧昇流のある所に発生しやすく、発生位置を頻繁に変えることはない。この湧昇流に伴って、水平断面内の多角形模様も、その大きさ、位置を変えてゆく。しかし、その変化する速さは、流体の上下する速度に比して遅い。また、対流の鉛直スケールは水深全体に及んでいる。

(3) 対流の最大速度は、外部パラメーターで表現すれば、乱流対流領域では実験結果を整理すると式(3)となり、定常対流領域では理論的に式(23)で表現され、この結果は実験とも一致する。また、定常対流領域において、内部パラメーターである対流 Reynolds 数を用いて表わした実験式は式(47)となる。乱流対流領域では、本研究の範囲では対流の最大速度は対流 Reynolds 数の関数とはならない。

(4) 対流の鉛直スケールに対する水平スケールの比は、乱流対流領域では理論的に導かれ、対流 Reynolds 数の関数として式(42)、(43)のように表わされ、実験値ともきわめてよく一致する。定常対流領域においては実験的に式(44)のように表わされ、外部パラメーターで表わすと式(46)のように書き直される。

謝 辞：本研究を行うにあたり、埼玉大学学生（現日本道路公団）の阿部文彦君の多大なる協力を得た。また、早稲田大学 吉川秀夫教授、東京大学 堀川清司教授、埼玉大学 池田駿介助教授から貴重な助言をいただいた。心から感謝の意を表わしたい。

さらに、本研究の一部は文部省科学研究費一般研究(C)（代表 玉井信行）および奨励研究（浅枝 隆）の助成を受けた。

参 考 文 献

- 1) 浅枝 隆・玉井信行・高橋由多加：表層冷却時の対流形成に関する研究，土木学会第 25 回水理講演会論文集，pp. 643~649, 1981.
- 2) Chandrasekhar, S.: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Qxford Univ. Press, 1961.
- 3) Farhadieh, R. and R.S. Tankin: Inter ferometric study of two dimensional Bénard convection cells, J.

- Fluid Mech., 66, pp. 739~752, 1974.
- 4) Krishnamurti, R. : On the transition to turbulent convection. Part 1, The transition to two to three dimensional flow, J. Fluid Mech., 42, pp. 295~307, 1970.

- 5) Willis, G.E. and J.W. Deardroff : Laboratory observations of turbulent penetrative convection, J. Geophysical Res., 84, pp. 295~302, 1979.

(1981.8.24・受付)
