

熱的外乱により連続成層場に生ずる対流の特性について

CONVECTION INDUCED BY INPUT OF HEAT TO
CONTINUOUSLY STRATIFIED LAYERS

浅 枝 隆*・玉 井 信 行**

By Takashi ASAEDA and Nobuyuki TAMAI

1. はじめに

ダム建設によって生ずる河川水質問題の一つに濁水長期化現象がある。この原因は、洪水時に大量の濁質が貯留され、その後、貯水池内の擾乱により微細粒子の沈降が阻止され、長期にわたって濁質が貯水池内に充満するためである。特に、秋期に流入した濁質が貯水池底部に滞留したままで冬を迎えると、水面が冷却されることによって起こる対流のために濁質を巻き上げ、現象は一層深刻になる。この大循環とよばれる対流については、従来から日射、大気と水面との間の輻射、逆輻射、潜熱の交換などの熱の授受を考慮した解析は行われているが、貯水池内に浮遊する濁度分による安定成層の影響は考えられていない。

濁質の沈降が進んで成層の位置が深くなってくると、表面での冷却の影響も成層の存在する深さでは弱くなり、下層との温度差は数度以内となる。濁質成層存在下では密度的に安定なので温度は伝導型で伝わると考えれば、濁質成層頂部より下向きに z_t 座標を考えると、時刻 t での温度勾配は近似的に次のように表わされる。

$$\frac{dT(z_t)}{dz_t} = \frac{\Delta T}{\sqrt{\pi \kappa_T t}} \exp\left(-\frac{z_t^2}{4 \kappa_T t}\right)$$

ここに、 κ_T は温度伝導率、 $T(z_t)$ は z_t での水温、 ΔT は濁質成層より上層での水温と下層の水温との温度差である。上層の水温も一日のうちで変化しており、夜間に急激に冷却されると考えれば、 $t \sim 8$ 時間程度であり、 $z_t = 50$ cm 程度の場合では、

$$\alpha \frac{dT}{dz} \sim 4.5 \times 10^{-8} \alpha \Delta T \quad (1/\text{cm})$$

である。 $\Delta T = 2^\circ\text{C}$ 、 $\alpha = 1.0 \times 10^{-4} 1/^\circ\text{C}$ とすれば、右辺の値はほぼ $9 \times 10^{-12} 1/\text{cm}$ となる。一方大洪水後の濁質勾配は、50 ppm/10 m 程度にまで達するために、

$$\beta \frac{dS}{dz} \sim 5 \times 10^{-8} 1/\text{cm}$$

となり、 $\beta dS/dz \gg \alpha dT/dz$ である。ここに、 S は濁度、 β は無次元密度への換算係数を表わす。

このように、水深の深い場所では温度分布の勾配が緩やかとなるために濁質による密度勾配の影響を考える必要が生じてくる。

こうした、熱・濁度分というように2つの拡散物質が関与する拡散現象は二重拡散現象 (double diffusion) とよばれ、おもに海洋や極地の湖で観測されており、拡散係数の異なる塩分・熱を対象に研究されている。二重拡散現象は、2つの物質それぞれの濃度勾配、全体の密度勾配の三要素から表-1 に示すように6つの場合に分けられる。ここで、 z は鉛直上向きの座標軸とし、熱のように、拡散係数が大きく、示度が大きくなるにつれ密度が小さくなる物質を T 、逆に、塩分や濁質のように、拡散係数が小さく、濃度が大きくなるにつれ密度が大きくなる物質を S としてある。貯水池内で秋から冬にかけて起こる現象は 3a から 3b に至る過程である。この 3a から 3b に至る現象は、これまでは熱と塩分について取り扱われてきている。そのおもなものを掲げると、連続成層を取り扱ったものとしては、Turner (1968), Shirtcliffe (1969 a, b), Huppert and Linden (1979) らの研究があり、また、不連続な境界面を有する成層を取り扱ったものとしては、Turner (1965), Crapper

表-1 二重拡散現象の分類

CASE	$\frac{dT}{dz}$	$\frac{dS}{dz}$	$\frac{d\rho}{dz}$
1	+	-	-
2	a	+	-
	b	+	+
3	a	-	-
	b	-	+
4	-	+	+

* 正会員 工修 埼玉大学助手 工学部

** 正会員 工博 東京大学助教授 工学部

(1975), Marmorino and Caldwell (1976) などの研究がある。しかし、こうした研究はスタートしたばかりで、現象の把握、理論的背景についてはいまだ不明な点が多い。そのうえ、これらの研究は海洋中で起こる現象を対象としているために、熱・塩二重拡散系で、しかも、密度勾配がきわめて大きい場合しか取り扱われていないなど、貯水池内の現象の解明には適当とはいえない。本研究はこうした点を考慮して行われ、物質として塩分のほかに濁質を用い、それらによる安定な成層を底部から加熱することによって生ずる階段状の多層成層構造について、その形成限界ならびに形成後の水理量について、熱・塩二重拡散系、熱・濁二重拡散系で比較検討し、さらに、階段状構造が形成された後に、層同士が融合していく過程について明らかにしたものである。

なお、本論文は、第 24 回水理講演会 (玉井・浅枝・高橋 (1980)) および、The 3rd International Symposium on Stratified Flows (Tamai and Asaeda (1980)) で発表した結果をさらに発展させたものである。

2. 実験および実験装置

実験に用いた水槽の概略は図-1 に示すようなものであり、底面が 40 cm × 40 cm で高さが 50 cm の正四角柱

をしている。水槽の側壁は熱の出入りを少なくするために二重壁にしてあり、さらに厚さ 3 cm の発泡スチロールで内装してある。また、底板はオイルヒーターからの熱の流入が容易なようにステンレス製になっている。オイルヒーター中の油温はサーモスタットで一定値に調節される。このオイルヒーターが所定の温度に達した後に、ジャッキで上昇させ、水槽の底板に接触させた。また、水面から冷却する際には、水面に氷を入れた容器を設置した。

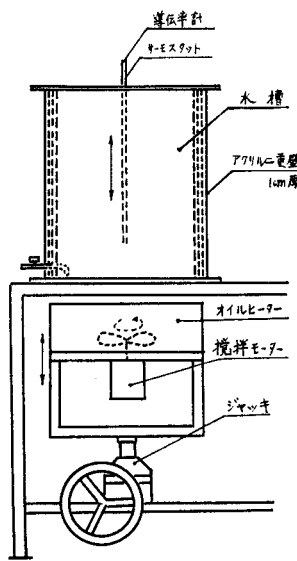


図-1 実験装置

測定は、温度についてはサーミスタ温度計およびホットフィルムアネモメーターの測温ユニットを用い、塩分濃度の測定には温度補償回路内蔵の導電率計を、濁度については透過光式濁度計を用いた。また、それらをモーターもしくは手動でトラバースさせることにより、水温

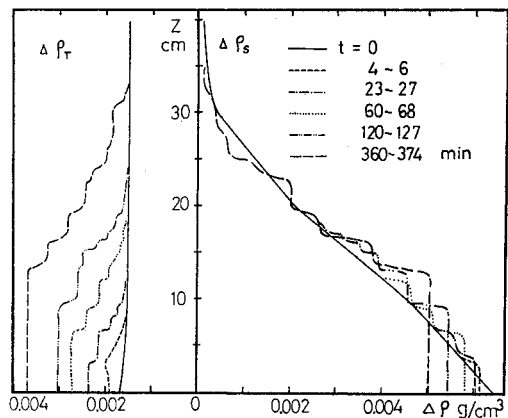
および、塩分濃度、濁質濃度の分布図を得た。

なお、濁質としては日本中広く分布していること、懸濁液中では比較的安定な挙動を示すことなどを考慮して、工場精製のカオリナイトを用いた。カオリナイトをそのまま水中に懸濁させただけでは凝集したままの粒子が多く、沈降実験の結果では約 40% が 4 μ 以上の粒径をしていたために、原液を 1 時間静置しておき、水面から 8.5 cm の深さで採水した溶液を用いた。この溶液中では、平均粒径は 2.1 μ で比較的一様な粒径をしていた。さらに、濁度計の出力に及ぼす影響を調べるために、15 分間、2 時間および 4 時間静置しておいた原液を実験に用いたものと同様な方式で採水し、濁度計の検定曲線を描いてみた。15 分間静置のものでは 20% 程度出力が小さくなっていたが、2 時間および 4 時間静置のものはほぼ同一の出力を示した。この時間変化の特性から判断すると粗粒子の沈降はほぼ 30 分間でほとんど完了すると考えられる。実験の所要時間は約 3 時間であり、上述の事項を勘案すれば粒径の影響はほとんどないと考えられる。

3. 密度分布の時間的变化

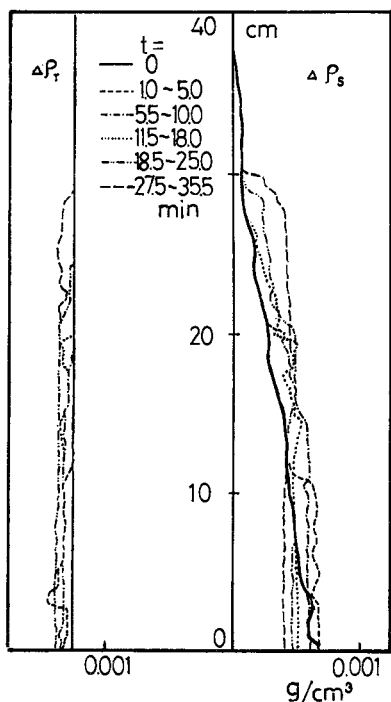
初期の塩分もしくは濁質などの物質による密度分布が線形に分布している成層を下方から加熱すると、密度の時間的な変化は図-2 (a)~(c) のようになる。この中で、(a) は初期塩分密度勾配が比較的大きい場合であり、(b) は小さい場合、(c) は初期密度勾配が濁質によるものである。初期の密度勾配にかかわらず、加熱開始後一定時間のうちに、底板付近に密度一定の混合層が形成される。これについては 4. で詳しく記す。

その後の経過は、図-2 (a) に示される密度勾配が大

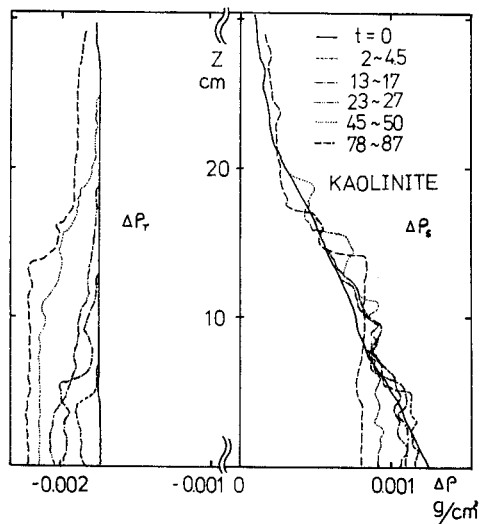


(a) 初期密度勾配が大

図-2



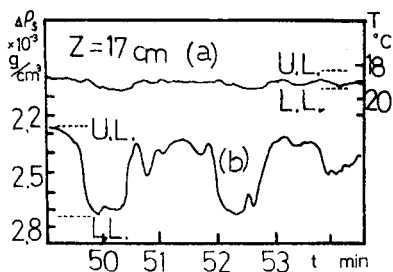
(b) 初期密度勾配が小さい場合



(c) 成層構成物質が濁質による場合

図一 密度分布の時間変化 ($\Delta\rho_s$ は塩分もしくは濁質による密度の増分を示し, $\Delta\rho_T$ は水温 4°C を基準として, それより温度が上がることに伴う密度の減少分を示す)

なる。(a)のように、密度勾配が大きく熱フラックスが比較的小さい場合には、熱が上方に伝わるに従って順次混合層が形成されてゆき、ステップ構造を形成する。また、その過程においては、混合層同士が融合しあってその層厚を増加させてゆく現象がみられる。温度および物



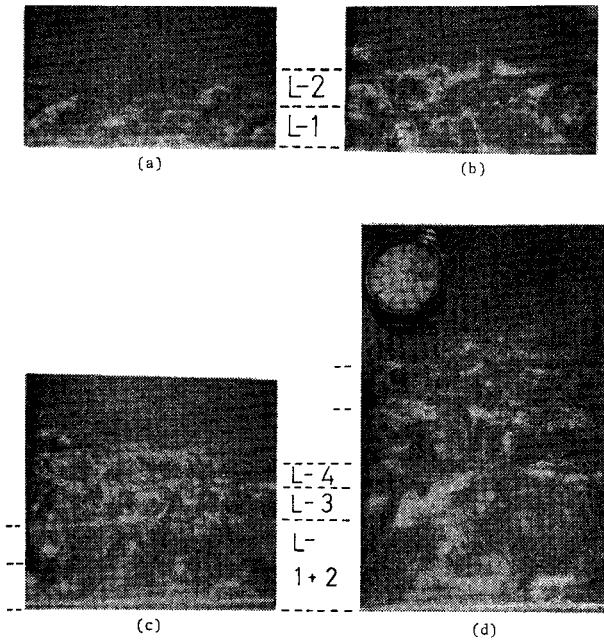
図一 混合層界面付近の密度変動 (a) は混合層と混合層の境界面付近の温度変動を示し, (b) は塩分による密度の変動を示す。また, U.L., L.L. は上層の値および下層の値を示す)

質濃度は、完全に形成された混合層内部ではほとんど変動しないが、形成途上の混合層内では温度の高い流体塊が下方から上昇してくるために変動が激しい。また、混合層と混合層との境界部では、上下層の平均温度差もしくは密度の差程度の変動がみられ、しかも、上限値と下限値の継続時間に比して、上昇時、下降時の時間が短いことから、境界部の密度が変化している層の厚さはきわめて小さいことがわかる (図一 (a), (b) 参照)。

図一 (b) のように密度勾配が小さく、熱フラックスが比較的大きい場合には、最下層の混合層がその層厚を増加させるのが速く、多層構造を形成するに至っていない。しかし、形成されている層の上に、次の時点でその層が増加させる厚さ程度の密度変動の大きい層が観察される。このことは、下層の成長が速く、上の層が完全に形成される以前に下の層に取り込まれていっていることを示している。また、界面の変動は初期密度勾配が小さく、熱フラックスが大い場合ほど大きくなっている。

写真一は、層の形成をアルミニウム粉末で可視化したものである。層内には層厚規模のセルが形成されている。このセルの上昇流の強度は必ずしも一定しておらず、間欠的に強度の強いサーマルの発生がみられる。こうしたサーマルは混合層上部で密度境界面のためにその上昇を押えられ、混合層上部に温度の高い部分が形成される。ところが、その直上の上層の流体はこのサーマルから温度を伝えられ、この層内で新たにサーマルが発生する。したがって、底板付近に強力なサーマルが発生すると、流体自体の動きは密度の境界面で止められるが、温度は数層にわたって伝達される。混合層内での温度変動は、こうしたサーマルの発生によるものであり、密度境界面近傍の温度変動は、強力なサーマルが境界面に衝突してその動きを止められ、それによって境界面の位置が上下するためである。

混合層間の熱や物質の交換は、おもに次の2つの機構で生じている。その一つは、サーマルが境界面を押し上げ再び下降する際に、その一部を上層に取り残したり、



写真—1 混合層形成の可視化

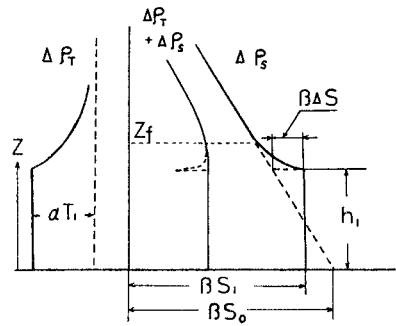
((a) は第1層が形成し第2層が形成途中の状態, (b) は第2層が形成し第3層が形成途中, (c) は第4層形成後第1層, 第2層が融合した状態, (d) は第4層目まで融合した状態を示す)

上層流体を下層に取り込む形で行われるものであり, 間欠的に起こっている. 他の一つは, 2つの隣り合った対流が双方とも沈み込む場所で上層流体を下層に引き込むもので, 比較的継続的に起こっているものである.

4. 最下段混合層の代表量

加熱を開始した時点においては, 流体は静止しているために熱は伝導もしくは放射で伝わり, 底板付近に大きな温度勾配をもった加熱層が形成される. 混合層の形成はそうした加熱層が不安定になるために生ずると考えられる. その後は混合層はしだいにその層厚を増加させてゆくが, それに伴って Reynolds 数も増加し, 動きが活発になると同時に安定な状態に向かう. したがって, 熱の供給によって増加したポテンシャルエネルギーが最小になるような状態で, その系が最も安定になると考えられる. この原理は, 上部から冷却する場合も考慮すれば, 次のようにも言い換えることができる. すなわち, 加えた熱量に対して最大の仕事が行われるように温度分布が決定される.

最下層の混合層の上はまだ新しい層が形成されていない状態, もしくは最下層と上の層が融合し, さらにその上には層が形成されていない状態においては, 混合層より上部の領域では熱はほぼ伝導型で伝わり, 物質の輸送



図—4 最下段混合層密度分布定義図

は無視できる. これらの仮定と実験結果を参照して, 過剰温度, 物質濃度の分布を図—4のように定める. ここで, z は鉛直上向き座標, h_1 は混合層厚, T は温度, T_1 は混合層内温度, α は体膨張係数 $\left(= \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dT} \right)_{S,P} \right)$, S_0 は底板上での物質濃度, S_1 は混合層内の物質濃度, β は単位物質濃度当たりの無次元密度への換算係数 $\left(= \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dS} \right)_{T,P} \right)$ を表わす. この種の現象では極端に速い速度で加熱した場合を除けば混合層厚の増加速度に比べ熱の拡散速度の方が大きくなるので, 混合層より上の温度分布は,

$$\alpha T_1 \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z - h_1}{2\sqrt{\kappa_T t}} \right) \right\}$$

と近似できる. したがって, 熱量の保存則は

$$\frac{\alpha Q}{\rho c} = \alpha T_1 (h_1 + \sqrt{\kappa_T t} \cdot f) \dots \dots \dots (1)$$

と表わされる. ここに, Q は底板からの流入熱フラックスを表わし, c は比熱, κ_T は熱に関する分子拡散係数を表わす. また,

$$f = 2 \int_0^{\infty} \{ 1 - \operatorname{erf}(\xi) \} d\xi$$

ただし, $\xi = (z - h_1) / 2\sqrt{\kappa_T t}$ である.

物質による密度の分布については次のように考えられる. 混合層直上で分子拡散のオーダーで拡散すると仮定すると, 物質に比べて温度の方が速く拡散するために, この部分の密度はそれより上の部分の密度より小さくなってしまふことになる. しかし, 実際にはこの部分に密度の逆転層は存在していないために, 物質の拡散係数も熱の分子拡散係数程度にまで大きくなっていると考えられる. この場合には, この混合層直上部の物質による密度分布形が, 温度による密度分布形の符号を変えたものと同じ形になる. したがって, 物質の保存則は次のように表わされる.

$$\beta S_1 + \alpha T_1 \int_0^{z_f} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa_T t}} \right) \right\} dz$$

$$= \int_0^{z_f+h_1} \left\{ \beta S_1 - \beta \Delta S - \beta \left| \frac{dS}{dz} \right| (z-h_1) \right\} dz \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 z_f は物質の分子拡散を零としたときに生ずることになる逆転層の上限の値を表わす。また、物質の拡散がないとしたときに生ずる逆転層の部分について、物質による密度から温度による密度の絶対値を差し引いたものを $F(z)$ とすると、

$$F(z_f) = \beta S_1 - \beta \Delta S - \beta \left| \frac{dS}{dz} \right| (z_f - h_1) - \alpha T_1 \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z_f - h_1}{2\sqrt{\kappa T t}} \right) \right\} = 0 \dots\dots (3)$$

$$\frac{dF(z_f)}{dz} = -\beta \left| \frac{dS}{dz} \right| + \frac{\alpha T_1}{\sqrt{\kappa T t}} \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{z_f}{2\sqrt{\kappa T t}} \right)^2 \right\} = 0 \dots\dots (4)$$

が導かれる。

このように密度分布が変化することによって増加したポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} \Delta E = g \left[-\frac{1}{2} \beta S_1 z_f (z_f + 2h_1) - \frac{1}{2} \alpha T_1 h_1^2 \right. \\ \left. + \frac{\beta \Delta S}{2} (z_f + h_1)^2 \right. \\ \left. + \frac{\beta}{3} \left| \frac{dS}{dz} \right| (z_f + h_1)^2 (2z_f - h_1) \right. \\ \left. - \alpha T_1 \int_{z_f}^{\infty} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa T t}} \right) \right\} (z + h_1) dz \right] \dots\dots (5) \end{aligned}$$

と表わされる。混合層厚 h_1 は、 ΔE が最小となる条件から定まるために、

$$\frac{d\Delta E}{dh_1} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{d^2\Delta E}{dh_1^2} > 0 \dots\dots\dots (7)$$

が満たされなければならない。式 (6) に式 (5) を代入し、式 (1)~(4) の関係を用いて演算を行えば、

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta E}{dh_1} = \frac{\alpha Q}{2\rho c} \operatorname{erf} \left(\frac{z_f}{2\sqrt{\kappa T t}} \right) \frac{z_f (\sqrt{\kappa T t} f - z_f)}{(h_1 + \sqrt{\kappa T t} f)^2} \\ - h_1^2 + z_f^2 - 2h_1 \sqrt{\kappa T t} f \\ + \frac{\alpha Q}{2\rho c} \frac{-z_f \sqrt{\kappa T t} f - 2(\sqrt{\kappa T t} f)^2}{(h_1 + \sqrt{\kappa T t} f)^2} \\ + \frac{\alpha Q}{2\rho c} \frac{\sqrt{\kappa T t} f}{(h_1 + \sqrt{\kappa T t} f)^2} \\ \cdot \int_0^{z_f} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa T t}} \right) \right\} dz \\ + \frac{\beta}{4} \left| \frac{dS}{dz} \right| (h_1^2 - z_f^2) \\ + \frac{\alpha Q}{\rho c} \frac{1}{(h_1 + \sqrt{\kappa T t} f)^2} \\ \cdot \int_{z_f}^{\infty} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa T t}} \right) \right\} z dz \dots (8) \end{aligned}$$

となる。ただし、 z_f については式 (4) より、

$$z_f = 2\sqrt{\kappa T t} \left\{ \ln \frac{\frac{\alpha Q}{\rho c}}{(h_1 + \sqrt{\kappa T t} f) \sqrt{\pi \kappa T t} \beta \left| \frac{dS}{dz} \right|} \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (9)$$

で表わされる。

ここで、2つの極端な場合の例として、混合層内の熱量に比べ、混合層の上部境界面を通しての熱の拡散量が少ない場合と、混合層内の熱量に比べて上部境界面を通しての熱の拡散量が非常に大きい場合について考えてみる。

i) 混合層内の熱量に比べて上部境界面を通しての熱の拡散量がきわめて少ない場合

こうした状況は混合層の厚さが非常に厚くなっている場合にみられ、 $h_1 \gg \sqrt{\kappa T t}$ が成立する。このとき、初期の物質濃度の勾配によって z_f と $\sqrt{\kappa T t}$ の大小関係は変わってくるが、混合層の上部境界面を通しての熱の拡散量が少ない場合には、 $h_1 \gg z_f$, $\sqrt{\kappa T t}$ である。したがって、この場合には、式 (8) より、

$$-\frac{\alpha Q}{2\rho c} + \frac{\beta}{4} \left| \frac{dS}{dz} \right| h_1^2 = 0 \dots\dots\dots (10)$$

が成立する。また、このときには、

$$\frac{d^2\Delta E}{dh_1^2} = \frac{\beta}{2} \left| \frac{dS}{dz} \right| > 0 \dots\dots\dots (11)$$

となり、式 (7) の条件も満足されている。式 (10) より、混合層厚 h_1 に関して次式が求まる。

$$h_1 = \sqrt{\frac{2\alpha Q}{\rho c \beta |dS/dz|}} \dots\dots\dots (12)$$

さらに、式 (12) を式 (1)、式 (2) に代入すると、混合層の温度、物質濃度について、

$$T_1 = \sqrt{\frac{\beta |dS/dz| Q}{2\rho c \alpha}}, \quad \beta \Delta S = \sqrt{\frac{\alpha Q \beta |dS/dz|}{2\rho c}} \dots\dots\dots (13)$$

と表わされることがわかる。また、式 (13) の2つの式より、Turner が実験的に見出した関係式

$$\alpha T_1 = \beta \Delta S \dots\dots\dots (14)$$

が理論的にも導かれることがわかる。

ii) 混合層内の熱量に比べて上部境界面を通しての熱の拡散が非常に大きい場合

こうした状況は、物質濃度の勾配に比べて、下からの加熱の速度が非常にゆっくりしている場合にみられ、 $h_1 \ll \sqrt{\kappa T t}$ が成立する。 z_f と h_1 , $\sqrt{\kappa T t}$ の関係は一義的には定まらないが、 $h_1 \gg z_f$ と仮定する。このとき、式 (8) より次式が求まる。

$$\frac{\alpha Q}{\rho c} \left\{ -1 + \frac{K}{f^2} \right\} + \frac{\beta}{4} \left| \frac{dS}{dz} \right| h_1^2 = 0 \dots\dots\dots (15)$$

ただし、 $K = 4 \int_0^{\infty} (1 - \operatorname{erf} \zeta) \cdot \zeta d\zeta$ を表わす。これより、 h_1 に関して

$$h_1 = \sqrt{\frac{4 \left(\frac{K}{f^2} - 1 \right) \frac{\alpha Q}{\rho c}}{\beta |dS/dz|}} \dots \dots \dots (16)$$

が求まる。このときも、

$$\frac{d^2 \Delta E}{dh_1^2} = \frac{\beta}{2} \left| \frac{dS}{dz} \right| h_1^2 > 0$$

が成立し、式(7)の条件を満足している。また、式(1)、(2)に式(16)を代入して

$$\left. \begin{aligned} \alpha T_1 &= \frac{\frac{\alpha Q}{\rho c}}{\sqrt{\frac{4 \left(\frac{K}{f^2} - 1 \right) \frac{\alpha Q}{\rho c}}{\beta |dS/dz|} + \sqrt{\kappa_T t f}}} \dots \dots \dots (17) \\ \beta \Delta S &= \sqrt{\left(\frac{K}{f^2} - 1 \right) \beta \left| \frac{dS}{dz} \right| \frac{\alpha Q}{\rho c}} \end{aligned} \right\}$$

が得られる。

図-5, 6, 7 は、安定な塩分成層を下面から加熱した場合に生ずる混合層における、混合層厚、過剰温度によ

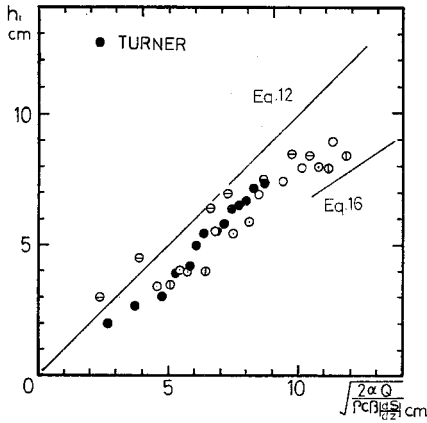


図-5 最下段混合層厚 (安定な塩分成層を下面から加熱した場合)

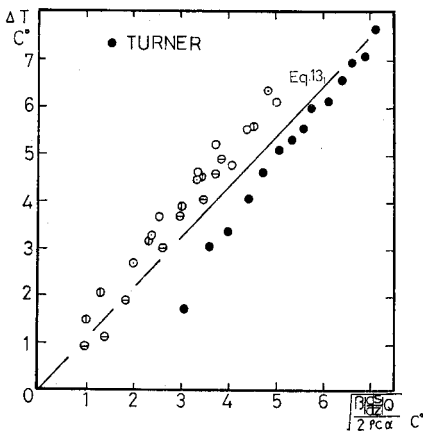


図-6 最下段混合層の過剰温度差 (安定な塩分成層を下面から加熱した場合)

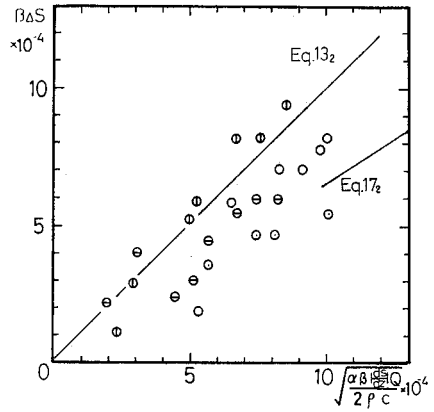


図-7 最下段混合層の塩分密度差 (安定な塩分成層を下面から加熱した場合)

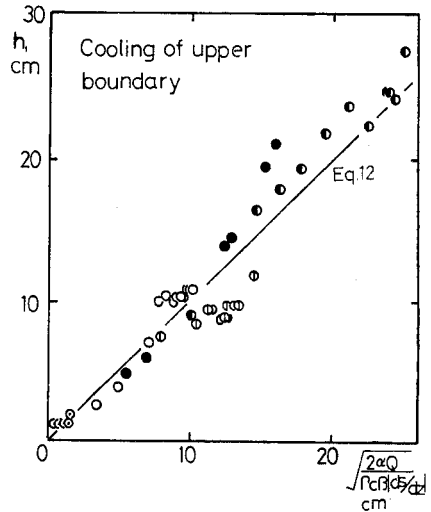


図-8 最下段混合層厚 (安定な塩分成層を水面から冷却した場合)

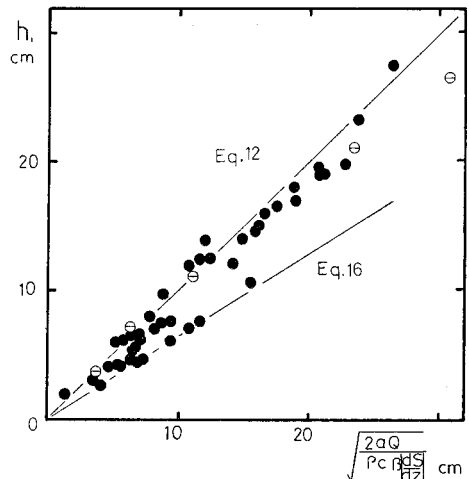


図-9 最下段混合層厚 (安定な濁質成層を下方から加熱した場合)

る密度差、塩分による密度差について、理論的予測と実験結果とを比較したものである。なお、図中の記号の違いは実験ケースの違いを示す。実際には界面の変動があるためかなりのばらつきはあるが、いずれも、ほぼ i) および ii) の極限状態の場合に導かれる関係式の間中にプロットされ、予測結果はよく実験値を説明しているものと思われる。ただし、温度の予測式 (17) の第 1 式は時間の関数でもあり、この図中では一義的には表わし得ない。

こうした量について、実際的な問題により近づけるために、安定な塩分成層を上方から冷却していった場合、および、安定な濁質成層を下方から加熱していった場合の結果について 図-8, 9 に示す。なお、図中の記号の違いは、図-8 では実験ケースの違いを示し、図-9 では用いたカオリナイトの種類の違いを示す。上方から冷却していった場合には、冷却に氷を用いたために熱フラックスの値が大きくなったこと、濁質成層の場合には、沈降性物質のために大きな密度勾配をつくり得ないことなどの理由から、図-5 に示されたものの実験範囲と異なっているが、いずれも、図-5 のものとほぼ同様の傾向を示し、加熱および冷却、熱塩および熱濁にかかわらず、i), ii) の結果でよく説明し得ることを示している。

この結果を総合的に判断して、混合層厚さ、過剰温度、過剰濃度は式 (12), (13) により近似的に表現されるとしてよい。そして、結果のばらつきの方向および極限を式 (16), (17) が示しているとして解釈してよいであろう。

5. 混合層の形成限界

底板から上方に向かって熱が伝わるに従って順に混合層が形成されてゆく。こうした混合層の形成限界については、Walin (1964), Velonis (1965), Baines and Gill (1969) らが、温度分布、塩分密度分布がともに線形分布という条件のもとに、線形安定性問題としてその不安定の開始点を求めている。しかし、まだ混合層が形成されていない領域では、流体はほとんど静止した状態であり、熱は分子拡散に近い状態で伝わりと考えられ温度分布は実際には非線形な分布となっている。こうした分布の非線形性が不安定の開始にどのような影響を及ぼすかを調べてみる。

いま、この鉛直方向の温度分布が式 (18) に示すような 2 次式で表わされると仮定して解を求め、これを線形な分布として解いている Veronis の解と比較してみる。

平均温度分布

$$\bar{T} = \frac{A}{2\kappa_T}(z^2 - lz) - \Delta T \frac{z}{l} + T_0 \dots \dots \dots (18)$$

平均物質濃度分布

$$\bar{S} = \frac{d\bar{S}}{dz} \cdot z + \bar{S}_{z=0} \left(\text{ただし } \frac{d\bar{S}}{dz} = \text{const.} \right) \dots \dots \dots (19)$$

ここに、 z は既成の最上端混合層上端から鉛直上向きにとった座標、 \bar{T} は平均温度、 \bar{S} は平均物質濃度、 l は代表長さ、 T_0 は $z=0$ における温度、 $\bar{S}_{z=0}$ は $z=0$ における物質濃度、 ΔT は厚さ l の層の上下端の温度差を表わし、 $A=0$ のときが温度、物質による密度分布ともに線形分布となる場合である。

運動方程式、物質保存式および連続式は次式で表わされる。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + g(\alpha T - \beta S) \mathbf{k} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \dots \dots \dots (20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa_T \nabla^2 T \dots \dots \dots (21)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = \kappa_S \nabla^2 S \dots \dots \dots (22)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \dots \dots \dots (23)$$

ここに、 \mathbf{k} は鉛直方向単位ベクトル、 x, y は水平方向座標、 $\mathbf{v} = (u, v, w)$ は変動流速ベクトル、 κ_S は物質に関する分子拡散係数を表わす。

圧力項を消去した後、温度、物質濃度について平均量 \bar{T}, \bar{S} と変動量 T, S に分離し、さらに変動量の積は平均量に比し微小であるとして消去すると、線形化した次式が得られる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 w = g \nabla_1^2 (\alpha T - \beta S) \dots \dots \dots (24)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa_T \nabla^2 \right) T = -w \frac{d\bar{T}}{dz} \dots \dots \dots (25)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa_S \nabla^2 \right) S = -w \frac{d\bar{S}}{dz} \dots \dots \dots (26)$$

ここに、 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ はラプラシアンを表わし、 $\nabla_1^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ は水平面内でのラプラシアンを表わす。式 (26) において、実際規模の時間スケールになると、濁質の沈降による分布形の変化が問題になってくるが、現時点では、分布形の変化について十分な結果が得られていないために、沈降による影響は考えないことにする。 T, S を消去し、 w の式にすると、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa_T \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa_S \nabla^2 \right) \nabla^2 w \\ & = g \nabla_1^2 \left\{ \alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa_S \nabla^2 \right) \left(-w \frac{d\bar{T}}{dz} + \kappa_T \nabla^2 \bar{T} \right) \right. \\ & \quad \left. - \beta \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa_T \nabla^2 \right) \left(-w \frac{d\bar{S}}{dz} \right) \right\} \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

となる。変数分離解 $w = \hat{w}(z) \cdot \varphi(x, y) \exp\{(\sigma + i\lambda)t\}$ (ただし、 $\nabla_1^2 \varphi + a^2/h^2 \cdot \varphi = 0$, a は水平方向波数、 h は擾乱の鉛直スケール、を満たすものとする) を代入し、境界条件として $\sigma=0$ を代入し、 λ を消去し整理すると次

式を得る。

$$P_1(D^2 - a^2)^4 \hat{w} - P_2(D^2 - a^2)^2 \hat{w} - P_3(D^2 - a^2)^2 \zeta \hat{w} = 0 \dots\dots\dots (28)$$

式 (28) における記号は次のように定義される。

$$P_1 = \left\{ (1 + \tau + P_r) \left(\frac{\tau}{P_r} + \tau + 1 \right) - \tau \right\} \frac{1}{a^2};$$

$$P_2 = -(1 + P_r) \left(\frac{H}{2} + R_T \right) \left(\frac{h}{l} \right)^4 + (\tau + P_r) R_S;$$

$$P_3 = H(1 + P_r); \quad H = \frac{\alpha A g h^5}{\kappa_T^2 \nu};$$

$$R_T = \frac{g l^3 \alpha \Delta T}{\nu \kappa_T} \text{ (Rayleigh 数);}$$

$$R_S = \frac{g l^3 \beta \Delta S}{\nu \kappa_T} \text{ (Salt Rayleigh 数);}$$

$$P_r = \frac{\nu}{\kappa_T} \text{ (Prandtl 数); } \tau = \frac{\kappa_S}{\kappa_T}; \zeta = \frac{z}{h};$$

$$D = \frac{d}{d\zeta} \dots\dots\dots (29)$$

上下端が流体に接している場合の境界条件は、 $\zeta = 0, 1$ で $D^{2n} \hat{w} = 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$) と書くことができる。

$\phi = -P_2/P_1 \cdot \hat{w}$; $P_3/P_2 = C$ とおいて積分すると式 (28) は、

$$(D^2 - a^2)^3 \hat{w} = -(1 + C) \phi \dots\dots\dots (30)$$

となる。 ϕ, \hat{w} について、 $\phi = \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m \phi_m$; $\hat{w} = \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m \hat{w}_m$; $\phi_m = \sin m\pi\zeta$ と展開し整理すると次式が導かれる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m \left(\sin m\pi\zeta + \frac{P_2}{P_1} \hat{w}_m \right) = 0 \dots\dots\dots (31)$$

ここに、

$$\hat{w}_m = \frac{1}{\{(m\pi)^2 + a^2\}^3} \left\{ (A_m + B_m \zeta + C_m \zeta^2) \sinh a\zeta + (D_m + E_m \zeta + F_m \zeta^2) \cosh a\zeta + (1 + C\zeta) \sin m\pi\zeta + \frac{6 m\pi C}{(m\pi)^2 + a^2} \cosh m\pi\zeta \right\};$$

$$A_m = \frac{m\pi C}{a^2 \sinh a} \left[\left\{ \frac{(m\pi)^2 + 9 a^2}{4 a} + \frac{(m\pi)^2 + a^2}{2 \sinh a} \cosh a \right\} \left\{ \frac{-(-1)^m \cosh a}{\sinh a} \right\} + (-1)^m \frac{(m\pi)^2 + a^2}{4} + \frac{6 a^2}{(m\pi)^2 + a^2} \{ \cosh a - (-1)^m \} \right];$$

$$B_m = \frac{m\pi C}{4 a^3} \{ (m\pi)^2 + 9 a^2 \};$$

$$C_m = \frac{m\pi C}{4 a^2 \sinh a} \{ (m\pi)^2 + a^2 \} \{ \cosh a - (-1)^m \};$$

$$D_m = -\frac{6 m\pi C}{(m\pi)^2 + a^2};$$

$$E_m = -\frac{m\pi C}{2 a^2 \sinh a} \left[\frac{(m\pi)^2 + a^2}{\sinh a} \cdot \{ 1 - (-1)^m \cosh a \} + \frac{(m\pi)^2 + 9 a^2}{2 a} \right];$$

表-2 限界有効 Rayleigh 数

A	R _S	0	500	1000	2000
		R _{Tc a}	R _{Tc a}	R _{Tc a}	R _{Tc a}
0	0	658 2.2	1095 2.2	1533 2.2	2408 2.2
	500	657 2.2	1095 2.2	1532 2.2	2407 2.2
	1000	656 2.2	1093 2.2	1531 2.2	2406 2.2
	2000	650 2.2	1088 2.2	1525 2.2	2401 2.2

注) R_{Tc} が限界有効 Rayleigh 数を示し、a がそのときの無次元水水平波数を示す。

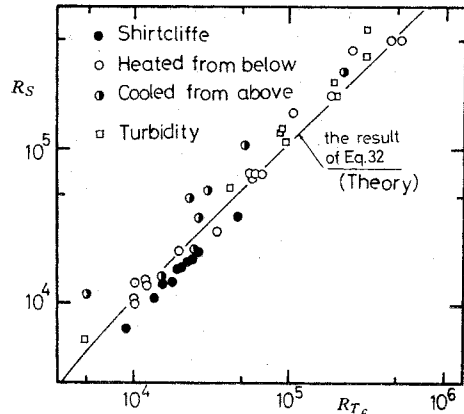


図-10 限界有効 Rayleigh 数に関する実験結果

$$\cdot \{ \cosh a - (-1)^m \}];$$

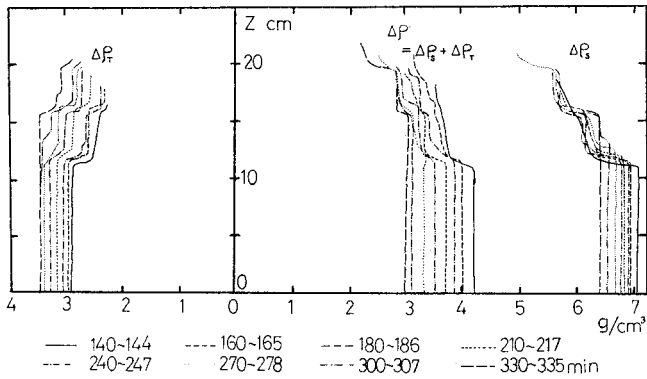
$$F_m = -\frac{m\pi C}{4 a^2} \{ (m\pi)^2 + a^2 \}$$

が導かれる。式 (31) が non-trivial な解をもつための条件は、

$$\left\| \frac{1}{2} \delta_{mn} + \frac{P_2}{P_1} \int_0^1 \hat{w}_m \sin n\pi\zeta \cdot d\zeta \right\| = 0 \dots\dots\dots (32)$$

である。ここに、 δ_{mn} は Kronecker のデルタを、 $\| \|$ は行列式を表す。これより求めた R_{Tc} の値を表-2 に示す。A=0 のものが初期密度分布が線形な場合のものであるが、非線形な場合との間にほとんど差がないことがわかる。

図-10 は今回の実験結果と表-2 に示された理論解を比較したものである。この場合に代表スケールの決定が問題になるが、混合層形成後の層厚がほぼこれに該当すると考えられるので、代表スケールに混合層厚を用いた。また、表-2 の結果は上下端が自由境界という条件のため、この条件をほぼ満足していると考えられる第2層目以上の混合層に関する実験値を用いて比較した。図中の○印は下面から加熱した場合の結果を示し、●印は上面から冷却の場合の結果を示し、□印は初期の成層が濁質によるものを下面から加熱した場合の結果を示してい



図—11 混合層同士の融合の例 (時間は加熱開始後の経過時間を示す)

る。また、●印は Shirtcliffe (1969) が塩分を用いて行った実験の結果である。いずれの場合にも、表—2 の関係をほぼ満たしていると考えられる。したがって、不安定要因の与え方が上方からであれ、下方からであれ、また、成層の形成因が濁質であれ塩分であれ、形成限界は一義的に与えられるとよい。

6. 混合層の融合と混合層間の密度差

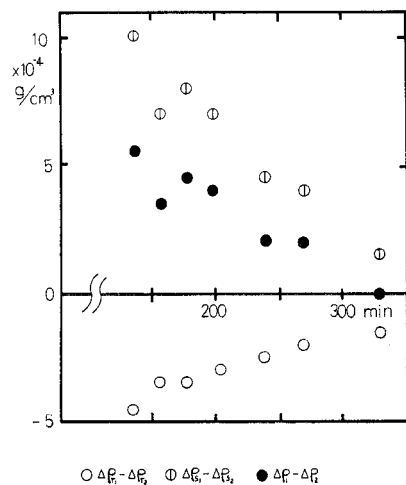
階段状に混合層が形成された後、さらに加熱を続けていると2つの混合層が融合する現象が起きる。この融合現象は上方の2つの混合層よりも、再下層とすぐ上の層の間で生じやすく、特に、最下層が順次その上の混合層を取り込んでいっているときには頻繁に起こる。図—11は、この典型的な場合の各時間ごとの密度分布を示したものである。この図からわかるように、温度、物質ともに境界面を通してさかんに上層に輸送されている。このような、不連続な二重拡散境界面を通しての温度、塩分の輸送量については、Turner, Crapper, Marmorino and Caldwell らの、上下端を壁にした場合の実験的な研究がある。これらの実験結果に共通していえることは、安定要素としての物質による密度差 $\beta \Delta S$ と、不安定要素としての温度による密度差 $\alpha \Delta T$ の比 R_ρ が、2より大きい値をとる間は、境界面を通過する物質による密度フラックスと温度による密度フラックスとの比 R_F は、ほぼ一定値 0.15 をとる。しかし、 R_ρ が2より小さい値になると、急激に物質による密度フラックスの割合が大きくなり、 R_F の値が大きくなっていることである。さらに、著者らの報告 (1980₂) によると、上下端が壁で区切られているときには、 R_ρ に関しては 1.7 付近に安定な点が存在し、全密度差、すなわち $\beta \Delta S - \alpha \Delta T$ はその比の値を保ったままで減少してゆく。連続成層中にできた混合層の場合には、上端に壁がなく、まだ混合層を生じていない一定の勾配をもった連続成層と接している

か、その2つの混合層よりさらに上に形成された混合層との間の境界面になっているからであるが、上層の上面の境界面を通してのフラックスが少ない間は、上層の上端が壁で区切られた場合と類似な現象を生ずると考えられる。図—12は、図—11で示された分布図より、最下層と第2層との間の温度による密度差と塩分による密度差の時間的な変動を示したものである。 R_ρ は 1.7 程度のほぼ一定値を保っているが、全体の密度差は徐々に減少していっている様子がよくわかる。

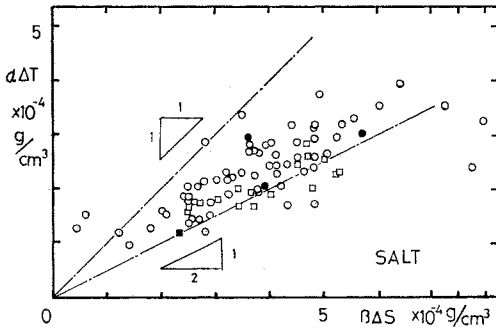
次に、階段状構造をはっきりと形成された後における、混合層間の物質による密度差

$\beta \Delta S$ と温度による密度差 $\alpha \Delta T$ の関係について、最下段に限らず整理してみると、図—13のようになる。この図をみると、物質が塩分の場合、カオリンの場合にかかわらず、 $2 > R_\rho > 1$ の範囲に分布していることがわかる。この理由は次のように考えることができる。混合層内の分布は一樣と考えられるので、図—14のような過剰温度による密度分布、物質による密度分布を考える。そのとき、第 n 層と第 $n+1$ 層の間の温度による密度差および物質による密度の差 $\alpha \Delta T_n$, $\beta \Delta S_n$ と第 n 層の層厚 h_n の関係は、全部で N 層存在するとすれば、 N がそれほど大きくない間は、

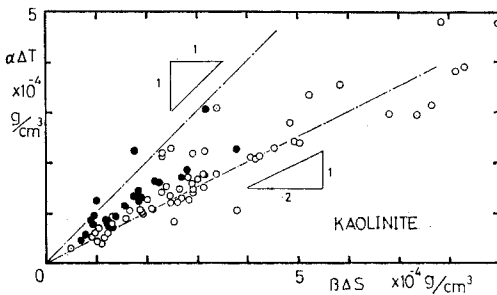
$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \beta \left| \frac{dS}{dz} \right| (h_1 + h_2) &= \beta \Delta S_1, \\ \frac{1}{2} \beta \left| \frac{dS}{dz} \right| (h_2 + h_3) &= \beta \Delta S_2, \dots, \\ \frac{1}{2} \beta \left| \frac{dS}{dz} \right| (h_n + h_{n+1}) &= \beta \Delta S_n, \dots, \end{aligned} \right\} \dots \dots (33)$$



図—12 混合層間の密度差の変化 ($\Delta \rho_{T1} - \Delta \rho_{T2}$ は第1層、第2層間の過剰温度による密度差、 $\Delta \rho_{S1} - \Delta \rho_{S2}$ は物質による密度差、 $\Delta \rho_1 - \Delta \rho_2$ は全密度差を表わす)



(a) 成層構成物質が塩分の場合



(b) 成層構成物質が濁質の場合

図-13 階段状構造形成後の混合層間密度差

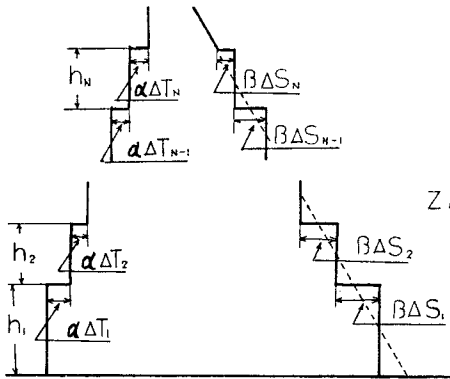


図-14 階段状構造形成後の密度分布定義図

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \beta \left| \frac{dS}{dz} \right| (h_{N-1} + h_N) \beta \Delta S_N, \\ & \frac{1}{2} \beta \left| \frac{dS}{dz} \right| h_N = \beta \Delta S_N \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta \Delta S_1 &= \alpha \Delta T_1 + \alpha \Delta T_2, \\ \beta \Delta S_2 &= \alpha \Delta T_2 + \alpha \Delta T_3, \dots, \\ \beta \Delta S_n &= \alpha \Delta T_n + \alpha \Delta T_{n+1}, \dots, \\ \beta \Delta S_{N-1} &= \alpha \Delta T_{N-1} + \alpha \Delta T_N, \\ \beta \Delta S_N &= \alpha \Delta T_N \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

と表わし得る。式 (33) および式 (34) より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta \Delta S_1}{\alpha \Delta T_1} &= 1 + \frac{\alpha \Delta T_2}{\alpha \Delta T_1} = 1 + \frac{h_2}{h_1}, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta \Delta S_2}{\alpha \Delta T_2} &= 1 + \frac{h_3}{h_2}, \dots, \frac{\beta \Delta S_n}{\alpha \Delta T_n} = 1 + \frac{h_{n+1}}{h_n}, \dots, \\ \frac{\beta \Delta S_{N-1}}{\alpha \Delta T_{N-1}} &= 1 + \frac{h_N}{h_{N-1}}, \frac{\beta \Delta S_N}{\alpha \Delta T_N} = 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

が導かれる。これより、 $h_1 \sim h_2 \sim \dots \sim h_n \sim \dots \sim h_N$ のとき、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta \Delta S_1}{\alpha \Delta T_1} &\sim 2, \frac{\beta \Delta S_2}{\alpha \Delta T_2} \sim 2, \dots, \frac{\beta \Delta S_n}{\alpha \Delta T_n} \sim 2, \dots, \\ \frac{\beta \Delta S_{N-1}}{\alpha \Delta T_{N-1}} &\sim 2, \frac{\beta \Delta S_N}{\alpha \Delta T_N} \sim 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (36)$$

が成立し、 $h_n \gg h_{n+1}$ のとき

$$\frac{\beta \Delta S_n}{\alpha \Delta T_n} \sim 1 \dots \dots \dots (37)$$

が成立することがわかる。ところが、以前触れたように、ある境界面について、 $R_p (= \beta \Delta S / \alpha \Delta T) < 2$ となると、温度による密度の下層から上層へのフラックスに比して、物質による密度増加分のフラックスが急激に増加する。このことは、ある接した2層 h_n と h_{n+1} において、 h_{n+1} に比して h_n が大きいほど2つの層が融合しやすいことを示している。したがって、最下段の層が順次すぐ上の層と融合して層厚を増している状態にあると、常にすぐ上の層より層厚が大きく、同程度の層厚をもつ2層が融合するのに比して、容易に上層と融合することがわかる。

7. 結 論

貯水池において、濁質成層が形成されている間に冷却期に入り、水面から冷やされていくために生ずる二重拡散現象に関して基礎的な研究を行い、次のような結果を得た。

(1) 安定な塩分成層を下から加熱すると、温度が上方に伝わるに従って不連続的に混合層が形成されていき、全体としてステップ構造となる。また、その際に混合層同士が融合し合って、その層厚を増していくことがわかった。しかし、初期の安定成層の密度勾配が小さく、熱の供給量が多いときには、2層目以上の混合層は形成途上に最下層に融合されていき、最下層だけが大きくなっていく。

(2) 安定な塩分成層を上から冷却した場合、および濁質成層を下から加熱した場合のように、より自然条件に近い場合でも、(1)と同様な現象がみられる。

(3) 混合層内には対流が存在しているが、サーマルが間欠的もしくは連続的に発生し、混合層内を上昇する。特に強力なサーマルが発生した際には、流体は境界面によって上昇を食い止められるが、温度は上層に伝わ

り、上層にサーマルを誘発する。

(4) 混合層間の混合は、おもに、対流が上層の流体を下層に引き込んだり、下層の流体を上層に引き上げることによって起こるか、強力なサーマルが境界層を押し上げ、沈み込むときに起こる。

(5) 最下段混合層の上に別の混合層が存在しない状態であれば、その水理量は重力的に最も安定なように決定されるとして得られる結果でほぼ予測できることがわかった。また、これより、最下段混合層が形成された場合には、塩分による密度差と温度による密度差が等しくなるという Turner が実験的に見出した関係も説明できる。

(6) 上層の混合層の形成限界について、非線形な物質濃度分布を示す場合の限界 Rayleigh 数を得、線形な場合とほとんど変わらないことを示した。さらに、混合層形成後の層厚を代表長さとして実験結果と比較してみたところ、よく一致することがわかった。また、上面から冷却する場合でも、安定成層が濁質で形成されている場合についても、同様な結果が得られることがわかった。

(7) 混合層の融合は、最下層とすぐ上の層との間で特に頻繁に起こる。これは、この2層間での物質による密度差の温度による密度差に対する比が他の境界面に比して小さいこと、および、そのような状態では、物質による過剰密度のフラックスが急激に増加することを考慮すれば説明できる。

本研究を行うにあたって、東京大学 堀川清司教授から貴重な助言を賜った。また、当時東京大学学生であった、高橋由多加氏(現東京電力)、服部邦男氏(現中部電力)には、実験とデータ整理に協力していただいた。心から感謝します。

また、鹿島学術振興財団の助成を得ました。

参考文献

- 1) 浅枝 隆・玉井信行・服部邦男：不連続境界面を有する二重拡散現象について、土木学会第 35 回年次学術講演会概要集, 1980.
- 2) Baines, P.G. and A.E. Gill : On thermohaline convection with linear gradients, *J. Fluid Mech.*, Vol. 37, pp. 289~306, 1969.
- 3) Crapper, P.F. : Measurements across a diffusive interface, *Deep-Sea Research*, Vol. 22, pp. 537~545, 1975.
- 4) Huppert, H.E. and P.F. Linden : On heating a stable salinity gradient from below, *J. Fluid Mech.*, Vol. 95, Part 3, pp. 431~464, 1979.
- 5) Marmorino, G.O. and D.R. Caldwell : Heat and Salt transport through a diffusive thermohaline interface, *Deep-Sea Research*, Vol. 23, pp. 59~67, 1976.
- 6) Shertcliffe, T.G.L. : The development of Layered thermosolutal convection, *Deep-Sea Research*, Vol. 12, pp. 215~222, 1969 a.
- 7) Shertcliffe, T.G.L. : An experimental investigation of thermosolutal convection at marginal stability, *J. Fluid Mech.*, Vol. 35, Part 4, pp. 677~688, 1969 b.
- 8) Tamai, N. and T. Asaeda : Stability criterion and the behavior of mixed layers in double diffusive process, *The 2nd International Symposium on Stratified Flows*, I.A.H.R., pp. 354~361, 1980.
- 9) 玉井信行・浅枝 隆・高橋由多加：熱的外乱を受ける連続成層に関する研究、土木学会第 24 回水理講演会論文集, pp. 429~434, 1980.
- 10) Turner, J.S. : The coupled transport of salt and heat across a sharp density interface, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 8, pp. 759~767, 1965.
- 11) Turner, J.S. : The behavior of a stable salinity gradient heated from below, *J. Fluid Mech.*, Vol. 33, pp. 183~200, 1968.
- 12) Turner, J.S. : *Buoyancy Effects in Fluids*, Cambridge University Press, 1973.
- 13) Veronis, G. : On finite amplitude instability in thermohaline convection, *J. Mar. Res.*, Vol. 23, pp. 1~7, 1964.
- 14) Walin, G. : Note on the stability of water stratified by both salt and heat, *Tellus*, Vol. 16, pp. 389~393, 1964.

(1981.8.14・受付)