

## 長大吊橋の固有振動に対する吊構造せん断変形の影響

EFFECTS OF SHEAR DEFORMATION ON FREE VIBRATIONS OF  
LONG SPAN SUSPENSION BRIDGES

小松定夫\*・西村宣男\*\*

By Sadao KOMATSU and Nobuo NISHIMURA

## 1. ま え が き

わが国における吊橋の設計にとっては風および地震に対する安全性の照査は不可欠なものである。耐風設計において重要である低次振動から耐震設計で問題となる 1~3 c/s の高次振動に至るまでの広範囲の固有振動数および固有振動モードは安全性照査の基本となるものであるから精度よく求められなければならない。現在までに耐風および耐震解析に採用されている解析モデルは膜理論による場合にせよ、吊橋専用の有限要素法による場合にせよ基本的には鉛直たわみ振動に関しては Melan の撓度理論<sup>1)</sup>、水平横たわみ振動に関しては Moisseiff の弾性分配理論<sup>2)</sup>に立脚したものである<sup>3), 4), 5)</sup>。これらの吊橋振動理論は耐風安定性で重視される低次固有振動の解析を目的としたものであることに注意しなければならない。

一方、吊橋の解析モデルの妥当性の検討や批判が主として吊材の伸縮および傾斜、センタータイ、タワー剛性の影響等について行われているが、これらはいずれも静力学問題および低次固有振動の範ちゅうに属するものである<sup>6)</sup>。高次振動については吊構造とケーブルとの相互作用の効果が弱くなるので、上述の影響は僅少であると考えられている。ただ高次振動については吊構造のせん断変形が固有振動数に与える影響は無視できないものと考えられる。補剛トラスを有する吊橋の振動解析モデルでは、吊構造を等価剛性を有する桁に置換する方法が一般に採用されているが、これまでに発表された各種の振動解析理論においては、腹材の弾性変形の影響、すなわち、置換ばりのせん断変形は含まれていない。

最近、Abdel-Ghaffar<sup>7), 8), 9)</sup>、Abdel-Ghaffar・Housner<sup>10)</sup>らが吊橋の鉛直たわみ、水平横たわみ、および

ねじれ振動について中規模の実橋に強震計を取り付け ambient vibration survey を実施し、その結果とともに解析理論を発表している。この解析法では鉛直たわみ振動に関しては Melan の撓度理論を、水平横たわみ振動に関しては伊藤の理論<sup>11)</sup>を、そしてねじり振動については Bleich 理論<sup>12)</sup>における変位場に基づいて吊橋専用の有限要素化を行い、剛性マトリックスおよび質量マトリックスを与えたもので、それぞれの振動タイプについてかなり高次までの固有振動を解析し、実測データとの比較を行っている。それによると各振動タイプについて低次振動については固有振動数の理論値と実測値とは比較的良好に一致しているが、高次振動になるほど理論値は実測値より大きくなる傾向をみせている。しかも両者の差異が顕著になるのは、耐震設計において重要な 1 c/s 以上の振動数の領域である。最近の論文 9) の中で Abdel-Ghaffar は鉛直たわみ振動に関する剛性マトリックスに補剛トラスのせん断変形の影響を導入したが、その影響の重要性を認識していないようで数値計算においてはせん断変形は無視されている。Abdel-Ghaffar の計算例は中央径間長 460 m の中規模の吊橋を対象としているけれども、長大吊橋を含めて耐震設計で用いるための解析モデルについては検討の余地があるものと考えられる。

振動数 1 c/s 以上の領域における Abdel-Ghaffar らの理論値と実測値に差が生じた原因は、腹材の弾性変形、すなわち置換ばりのせん断変形の影響であることが本文で明らかにされる。本研究においては鉛直たわみ振動における補剛トラスのせん断変形、水平横たわみ振動については横構のせん断変形、そしてねじり振動については腹材の 2 次せん断変形および対傾構のせん断変形を考慮した自由振動方程式を導き、それぞれの振動現象を支配している力学的パラメーター、ならびにせん断変形の影響を評価するための力学的パラメーターに着目して振動特性に関するパラメーター解析を行っている。

\* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 大阪大学講師 工学部土木工学科

## 2. 振動方程式の誘導と解法

### (1) 解析上の仮定

基礎方程式の誘導に際して、吊構造を構成する各構面のせん断変形を考慮すること以外は、いわゆる膜理論で設定されている仮定をここでも有効とする。

- i) 吊構造の各種剛性および死荷重は各スパン内では一定とする。
- ii) 振動振幅は微小とする。また減衰効果の影響は無視する。
- iii) 吊材は密に配置されており、一種の膜とみなせるものとする。
- iv) 吊材と吊構造の取付け位置と吊構造のせん断中心位置の高さのずれに起因する水平横たわみ変形とねじれ変形の連成効果は無視する。
- v) 各支点において吊構造の鉛直変位、水平横変位、ねじれ角およびずれ角は生じない。
- vi) 塔の剛性、センタータイの効果、吊材の伸縮・傾斜の影響は省略する。

次に各振動タイプ別に固有振動数方程式の定式化を行う。

### (2) 鉛直たわみ振動

補剛トラスを曲げ剛性  $EI_x$  およびせん断剛性  $GA_y$  を有する桁として取り扱うものとし、せん断変形を考慮したはりの弾性方程式から出発する。

$$EI_x v^{IV} = q_y - \frac{EI_x}{GA_y} q_y'' \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $I_x$  および  $A_y$  は一般の吊橋の補剛トラスについては次式で与えられる。ただしこれらの値は吊構造の断面に関するもので片側補剛トラスに関する値の2倍である。

$$I_x = A_c h^2, \quad A_y = 2EA_d h^2 \lambda / Gd^3$$

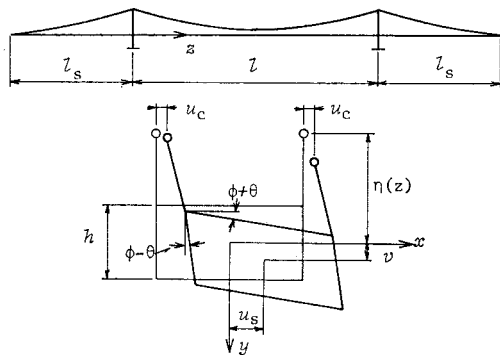


図-1 座標系と変位

ここに、 $h$ ：トラス高さ、 $\lambda$ ：格間長、 $d$ ：斜材長、 $A_c$ ：弦材断面積、 $A_d$ ：斜材断面積  
また、式(1)の分布力  $q_y$  は死荷重、慣性力および吊材力を含み次式で与えられる。

$$q_y = -\frac{m_s}{g} \ddot{v} + m_s - S(z) \dots\dots\dots (2)$$

吊材力  $S(z)$  はケーブルにおけるつり合いより

$$S(z) = -(H_d + H_p)(v'' + y'') - m_c + \frac{m_c}{g} \ddot{v} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $H_d$  は死荷重によるケーブルの水平張力、 $H_p$  は付加水平張力、 $m_s$  および  $m_c$  は吊構造およびケーブルのスパン方向単位長さ当たりの死荷重強度である。

式(3)を式(2)へ代入すると

$$q_y = -\frac{m_d}{g} \ddot{v} + H_p v'' + H_p y'' \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $m_d = m_s + m_c$ 、 $H = H_d + H_p$  を表わす。

式(4)の  $q_y$  およびその導関数  $q_y''$  を式(1)に代入し整理すると補剛トラスのせん断変形を考慮した吊橋の鉛直たわみ自由振動方程式が与えられる。

$$EJv^{IV} - H_p v'' - H_p y'' = -\frac{m_d}{g} \ddot{v} + \frac{EI_x}{GA_y} \frac{m_d}{g} (\ddot{v})'' \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $EJ = EI_x \left(1 + \frac{H_d}{GA_y}\right)$

ケーブルの付加水平張力  $H_p$  に関しては、いわゆるケーブル方程式

$$H_p = -\frac{E_c F_c}{L_c} \int_0^L y'' v dx \dots\dots\dots (6)$$

を用いる。ここに、 $E_c F_c$  はケーブル伸び剛性、 $L_c$  はケーブルの等価長である。

変位  $v$  は微小とし、 $H_d \gg H_p$  とする。 $v$  と  $H_p$  を  $z$  と時間  $t$  に関して変数分離して

$$v = \bar{v} \cdot e^{-\omega t}, \quad H_p = \bar{H}_p \cdot e^{-\omega t} \dots\dots\dots (7)$$

と表わす。基礎式(5)、(6)に代入し、さらに  $\bar{H}_p$  を消去すると

$$EJ\bar{v}^{IV} - H_d \bar{v}'' + \frac{E_c F_c}{L_c} (y'')^2 \int_0^L \bar{v} dx = \frac{m_d}{g} \omega^2 \bar{v} - \frac{EI_x}{GA_y} \frac{m_d}{g} \omega^2 \bar{v}'' \dots\dots\dots (8)$$

を得る。逆対称振動については、式(8)の左辺第3項は省略できるから、振動モードを

$$\bar{v} = \sum_n c_n \sin \frac{n\pi z}{l} \dots\dots\dots (9)$$

(中央径間について  $n=2,4,6,\dots$ 、側径間  $n=1,2,3,\dots$ ) とすれば固有円振動数  $\omega_n$  は次式で与えられる。

$$\omega_n \sqrt{\frac{m_d}{gEJ} \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left\{1 + \frac{H_d l^2}{EJ} \frac{1}{(n\pi)^2}\right\} / \left\{1 + \frac{EI_x}{GA_y l^2} (n\pi)^2\right\}} \dots\dots\dots (10)$$

上式より逆対称振動については2つの力学パラメーター

$$P_1 = \sqrt{\frac{H_d}{EI_x} l^{\text{注1}}}, P_3 = \frac{EI_x}{GA_y l^2} \dots\dots\dots (11)$$

が関係していることがわかる。

対称振動については  $H_p \neq 0$  であるから、式(8)に対してガラーキン法を適用する。

$$\begin{aligned} & \frac{EJ \int_0^L \bar{v}^{\text{IV}} \hat{v}_m dz - H_d \int_0^L \bar{v}'' \hat{v}_m dz}{\text{①}} \\ & + \frac{E_c F_c}{L_c} (y'')^2 \int_0^L \int_0^L \bar{v} dz \hat{v}_m dz}{\text{②}} \\ & = \frac{m_d \omega^2 \int_0^L \bar{v} \hat{v}_m dz}{g} \text{④} \\ & - \frac{EI_x}{GA_y} \frac{m_d \omega^2 \int_0^L \bar{v}'' \hat{v}_m dz}{g} \dots\dots\dots (12) \\ & \text{⑤ } (m=1,2,3,\dots,N) \end{aligned}$$

変位  $\bar{v}$  および座標関数  $\hat{v}_m$  は単純支持された補剛トラスに対して

$$\left. \begin{aligned} & \text{中央径間: } \bar{v} = \sum_{n=1,3,5,\dots} a_n \sin \frac{n\pi z}{l_c}, \hat{v}_m = \sin \frac{m\pi z}{l_c} \\ & \text{側径間: } \bar{v} = \sum_{n=1,3,5,\dots} b_n \sin \frac{n\pi z}{l_s}, \hat{v}_m = \sin \frac{m\pi z}{l_s} \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

ガラーキン公式(12)に式(13)を代入し、直交性を考慮すれば下線部①、②、④および⑤項は次のようになる。

中央径間	側径間
① $EJ_c \left(\frac{m\pi}{l_c}\right)^4 \frac{l_c}{2} a_m$	$EJ_s \left(\frac{m\pi}{l_s}\right)^4 l_s b_m$
② $H_d \left(\frac{m\pi}{l_c}\right)^2 \frac{l_c}{2} a_m$	$H_d \left(\frac{m\pi}{l_s}\right)^2 l_s b_m$
④ $\frac{m_d c}{g} \omega^2 \frac{l_c}{2} a_m$	$\frac{m_d s}{g} \omega^2 l_s b_m$
⑤ $\frac{EI_{xc}}{GA_{yc}} \left(\frac{m\pi}{l_c}\right)^2 \frac{m_d c}{g} \omega^2 \frac{l_c}{2} a_m$	$\frac{EI_{xs}}{GA_{ys}} \left(\frac{m\pi}{l_s}\right)^2 \frac{m_d s}{g} \omega^2 l_s b_m$

さらに連成項③は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} & \text{中央径間: } \frac{E_c F_c}{L_c} (y'')^2 \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots} \left( \frac{2l_c}{n\pi} a_n + \frac{4l_s}{n\pi} b_n \right) \frac{2l_c}{m\pi} \right\} \\ & \text{側径間: } \end{aligned}$$

注1)  $\frac{H_d}{EJ} l^2 = \frac{H_d}{EI_x} l^2 \frac{1}{1 + \frac{H_d}{GA_y}} = \frac{H_d}{EI_x} l^2 \frac{1}{1 + \frac{H_d}{EI_x} \frac{EI_x}{GA_y l^2}} = P_1^2 \frac{1}{1 + P_1^2 \cdot P_3}$

$$\frac{E_c F_c}{L_c} (y'')^2 \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots} \left( \frac{2l_c}{n\pi} a_n + \frac{4l_s}{n\pi} b_n \right) \frac{4l_s}{m\pi} \right\}$$

以上を考慮すると式(12)は未定係数  $a_m, b_m$  に関する連立1次方程式となり、その係数行列は、

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 P_3^2 \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

部分行列  $A_{11}$  の対角要素  $a_{mm}^{11}$  は

$$a_{mm}^{11} = (1 + P_1^2 P_3) \pi^4 m^4 + P_1^2 \pi^2 m^2 + P_2 \cdot P_1^2 \cdot 512 / \pi^2 m^2$$

非対角要素  $a_{mn}^{11}$  は

$$a_{mn}^{11} = P_2 \cdot P_1^2 \cdot 512 / \pi^2 m \cdot n$$

部分行列  $A_{12}$  の一般要素(対角および非対角要素を総称したもの)  $a_{mn}^{12}$  は

$$a_{mn}^{12} = P_2 \cdot P_1^2 \cdot P_4 \cdot 1024 / \pi^2 m \cdot n$$

部分行列  $A_{22}$  の対角要素  $a_{mm}^{22}$  は

$$a_{mm}^{22} = 2\{(1 + P_1^2 P_3) \pi^4 m^4 / P_4^3 + P_1^2 \pi^2 m^2 / P_4\} + P_2 \cdot P_1^2 \cdot P_4^2 \cdot 2048 / \pi^2 m^2$$

非対角要素  $a_{mn}^{22}$  は

$$a_{mn}^{22} = P_2 \cdot P_1^2 \cdot P_4^2 \cdot 2048 / \pi^2 m \cdot n$$

部分行列  $B_{11}$  の対角要素  $b_{mm}^{11}$  は

$$b_{mm}^{11} = 1 + P_3 \pi^2 m^2$$

同じく部分行列  $B_{22}$  の対角要素  $b_{mm}^{22}$  は

$$b_{mm}^{22} = 2 P_4 (1 + P_3 \pi^2 m^2 / P_4^2)$$

とすべて無次元パラメーターの組合せで与えられる。ただし、 $B_{11}$  および  $B_{22}$  の非対角要素は0である。既出のパラメーター  $P_1, P_3$  のほかに次のパラメーターが関与している。

$$P_2 = \frac{E_c F_c f^2}{L_c H_d l_c}, P_4 = \frac{l_s}{l_c}$$

さらに固有円振動数は次のように無次元表示される。

$$\omega \sqrt{\frac{m_d l_c^4}{g EI_x}} = \omega P_5 \dots\dots\dots (15)$$

### (3) 水平横たわみ振動

再びせん断変形を考慮した吊構造の水平曲げに関する弾性方程式から出発する。 $\theta_y$  を  $y$  軸まわりの回転角、 $u_s$  を吊構造の水平変位とすると

$$EI_y \theta_y'' - GA_x (\theta_y + u_s') = \frac{m_s}{g} r_y \ddot{\theta}_y \dots\dots\dots (16)$$

$$-GA_x (\theta_y + u_s'') = q_x \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 $I_y = EA_c b^2$ ,  $A_x = 2bt_b$ ,  $t_b$ : 構橋換算板厚  
分布力  $q_x$  は吊構造の慣性力と吊材張力の水平成分を含み

$$q_x = -\frac{m_s}{g} \ddot{u}_s - m_s \beta \dots\dots\dots (18)$$

と表わされる。またケーブルにおける水平横方向のつり合い式は  $u_c$  をケーブルの水平変位とすると

$$-H_d u_c'' = -\frac{m_c}{g} \ddot{u}_c + m_s \beta \dots\dots\dots (19)$$

と与えられる。式 (18) を式 (17) に代入すると

$$-GA_x(\theta_y' + u_s'') = -\frac{m_s}{g}\ddot{u}_s - m_s\beta \dots\dots\dots(20)$$

式 (19) および (20) に含まれる吊材の傾斜  $\beta$  は  $\eta(z)$  を吊材長とすると次式で与えられる。

$$\beta = \frac{1}{\eta(z)}(u_s - u_c) \dots\dots\dots(21)$$

変位  $u_s, u_c$  および  $\theta_y$  を座標  $z$  と時間  $t$  に関して変数分離して

$$u_s = \bar{u}_s \cdot e^{-\omega t}, \quad u_c = \bar{u}_c \cdot e^{-\omega t}, \quad \theta_y = \bar{\theta}_y e^{-\omega t}$$

と表わす。式 (16), (19) および式 (20) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} EI_y \bar{\theta}_y'' - GA_x(\bar{\theta}_y + \bar{u}_s') &= -\frac{m_s}{g} r_y^2 \omega^2 \bar{\theta}_y \\ -GA_x(\bar{\theta}_y' + \bar{u}_s'') + \frac{m_s}{\eta(z)}(\bar{u}_s - \bar{u}_c) & \\ = \frac{m_s}{g} \omega^2 \bar{u}_s & \\ -H_d \bar{u}_c'' - \frac{m_s}{\eta(z)}(\bar{u}_s - \bar{u}_c) &= \frac{m_c}{g} \omega^2 \bar{u}_c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

式 (22) にガラーキン法を適用する。

$$EI_y \int_0^l \bar{\theta}_y'' \hat{\theta}_{ym} dz - GA_x \int_0^l (\bar{\theta}_y + \bar{u}_s') \hat{\theta}_{ym} dz = -\frac{m_s}{g} r_y^2 \omega^2 \int_0^l \bar{\theta}_y \hat{\theta}_{ym} dz \dots\dots\dots(23)$$

$$\begin{aligned} -GA_x \int_0^l (\bar{\theta}_y' + \bar{u}_s'') \hat{u}_{sm} dz \\ + m_s \int_0^l \frac{1}{\eta(z)} (\bar{u}_s - \bar{u}_c) \hat{u}_{sm} dz \\ = \frac{m_s}{g} \omega^2 \int_0^l \bar{u}_s \hat{u}_{sm} dz \dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -H_d \int_0^l \bar{u}_c'' \hat{u}_{cm} dz - m_s \int_0^l \frac{1}{\eta(z)} (\bar{u}_s - \bar{u}_c) \hat{u}_{cm} dz \\ = \frac{m_c}{g} \omega^2 \int_0^l \bar{u}_c \hat{u}_{cm} dz \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

両端単純支持された吊構造を対象として変位  $\bar{u}_s, \bar{u}_c, \bar{\theta}_y$  および座標関数  $\hat{u}_{sm}, \hat{u}_{cm}, \hat{\theta}_{ym}$  を次式のように与える。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_s = \sum_{n=1}^N a_n \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad \hat{u}_{sm} = \sin \frac{n\pi z}{l} \\ \bar{u}_c = \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad \hat{u}_{cm} = \sin \frac{n\pi z}{l} \\ \bar{\theta}_y = \sum_{n=1}^N c_n \cos \frac{n\pi z}{l}, \quad \hat{\theta}_{ym} = \cos \frac{n\pi z}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

式 (26) をガラーキン公式 (23)~(25) に代入すると

$$\begin{aligned} EI_y \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 c_m + GA_x c_m + GA_x \frac{m\pi}{l} a_m \\ = \frac{m_s}{g} r_y^2 \omega^2 c_m \dots\dots\dots(27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} GA_x \frac{m\pi}{l} c_m + GA_x \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 a_m \\ + \frac{2m_s}{l} \int_0^l \frac{1}{\eta(z)} \left\{ \sum_n a_n \sin \frac{n\pi z}{l} \sin \frac{m\pi z}{l} \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \sum_n b_n \sin \frac{n\pi z}{l} \sin \frac{m\pi z}{l} \right\} dz = \frac{m_s}{g} \omega^2 a_m \dots\dots\dots(28)$$

$$\begin{aligned} H_d \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 b_m \\ - \frac{2m_s}{l} \int_0^l \frac{1}{\eta(z)} \left\{ \sum_n a_n \sin \frac{n\pi z}{l} \sin \frac{m\pi z}{l} \right. \\ \left. - \sum_n b_n \sin \frac{n\pi z}{l} \sin \frac{m\pi z}{l} \right\} dz = \frac{m_c}{g} \omega^2 b_m \\ (m=1, 2, 3, \dots, N) \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

式 (27) の右辺の回転慣性項の影響は一般に小さいので、これを無視すると、式 (27) および (28) から未知係数  $c_m$  を消去できて、

$$\begin{aligned} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{EI_y}{GA_x} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} \right\} GA_x \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 a_m \\ + \frac{2m_s}{l} \int_0^l \frac{1}{\eta(z)} \left\{ \sum_n a_n \sin \frac{n\pi z}{l} \sin \frac{m\pi z}{l} \right. \\ \left. - \sum_n b_n \sin \frac{n\pi z}{l} \sin \frac{m\pi z}{l} \right\} dz = \frac{m_s}{g} \omega^2 a_m \\ (m=1, 2, 3, \dots, N) \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

式 (29), (30) より  $a_n$  と  $b_n$  に関する同次方程式が与えられその係数行列を次のように表わす。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 P_{12}^2 \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(31)$$

ここでは固有円振動数  $\omega$  を次のように無次元表示している。

$$\omega P_{12} = \omega \sqrt{m_s l^4 / g EI_y}$$

$A_{11}$  の対角要素  $a_{mm}^{11}$  は

$$a_{mm}^{11} = (m\pi)^4 / \{1 + P_8(m\pi)^2\} + 2 P_7 \cdot S_{mm}$$

$A_{11}$  の非対角要素  $a_{mn}^{11}$  は  $a_{mn}^{11} = 2 P_7 \cdot S_{mn}$

$A_{12}$  の一般要素  $a_{mn}^{12}$  は  $a_{mn}^{12} = -2 P_7 \cdot S_{mn}$

$A_{22}$  の対角要素  $a_{mm}^{22}$  は

$$a_{mm}^{22} = P_8 \cdot (m\pi)^2 + 2 \cdot P_7 \cdot S_{mm}$$

$A_{22}$  の非対角要素  $a_{mn}^{22}$  は  $a_{mn}^{22} = 2 P_7 \cdot S_{mn}$

$B_{11}$  の対角要素  $b_{mm}^{11}$  は  $b_{mm}^{11} = 1$

$B_{22}$  の対角要素  $b_{mm}^{22}$  は  $b_{mm}^{22} = P_9$

$B_{11}, B_{22}$  の非対角要素は 0 である。また  $S_{mn}$  は

$$S_{mn} = \int_0^l \frac{1}{\eta(z)} \sin \frac{m\pi z}{l} \sin \frac{n\pi z}{l} dz \dots\dots\dots(32)$$

無次元パラメーター  $P_6 \sim P_9$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_6 = \sqrt{\frac{H_d}{EI_y}} l, \quad P_7 = \frac{m_s}{EI_y} l^3, \quad P_8 = \frac{EI_y}{GA_x l^2}, \\ P_9 = \frac{m_c}{m_s} \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

吊材長  $\eta(z)$  が次式で与えられるものとすれば式 (32) はケーブルサグ  $f$ , タワーの桁上高さ  $h_T$  およびスパン長  $l$  に関して 2 つのパラメーター  $P_{10} = l/f, P_{11} = l/h_T$  を含むことがわかる。

$$\frac{\eta(z)}{l} = -\frac{4f}{l} \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right) + \frac{h_T}{l} \dots\dots\dots(34)$$

(4) ねじり振動

吊構造が2軸対称横断面を有するとしたとき、その横断面変形(対傾構のせん断変形)を含むねじりに関する弾性方程式は文献13)の記号を用いると次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} -a\omega'' + b_1\omega + b_2\varphi' + b_1\theta' &= m_w \\ -b_2\omega' - b_1\varphi'' - b_2\theta'' &= m_t \\ -b_1\omega' - b_2\varphi'' - b_1\theta'' + r\theta &= m_\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

ここに、 $\omega$ ,  $\varphi$  および  $\theta$  はそれぞれ吊構造のそり、ねじれ角およびずれ角を表わす。また  $m_w$ ,  $m_t$ ,  $m_\theta$  はそれぞれ慣性力およびケーブル復元力を含み次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} m_w &= -\frac{\bar{m}_w}{g} \ddot{w} \\ m_t &= -\frac{\bar{m}_{\varphi 1}}{g} \ddot{\varphi} - \frac{\bar{m}_{\varphi 2}}{g} \ddot{\theta} + \frac{b^2}{4} H_d \varphi'' \\ &\quad + \frac{b^2}{4} H_d \theta'' + H_p \frac{b}{2} y'' \\ m_\theta &= -\frac{\bar{m}_{\varphi 2}}{g} \ddot{\varphi} - \frac{\bar{m}_{\varphi 1}}{g} \ddot{\theta} + \frac{b^2}{4} H_d \varphi'' \\ &\quad + \frac{b^2}{4} H_d \theta'' + H_p \frac{b}{2} y'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

ここに、 $\bar{m}_w$ ,  $\bar{m}_{\varphi 1}$ , および  $\bar{m}_{\varphi 2}$  は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \bar{m}_w &= \int_A x^2 y^2 m dA \\ \bar{m}_{\varphi 1} &= \int_A (x^2 + y^2) m dA + \frac{b^2}{4} m_c \\ \bar{m}_{\varphi 2} &= \int_A (x^2 - y^2) m dA + \frac{b^2}{4} m_c \end{aligned}$$

式(36)を(35)に代入して整理すると

$$\left. \begin{aligned} -a\omega'' + b_1\omega + b_2\varphi' + b_1\theta' &= -\frac{\bar{m}_w}{g} \ddot{w} \\ -H_p \frac{b}{2} y'' - b_2\omega' - B_1\varphi'' - B_2\theta'' \\ &= -\frac{\bar{m}_{\varphi 1}}{g} \ddot{\varphi} - \frac{\bar{m}_{\varphi 2}}{g} \ddot{\theta} \\ -H_p \frac{b}{2} y'' - b_1\omega' - B_2\varphi'' - B_1\theta'' + r\theta \\ &= -\frac{\bar{m}_{\varphi 2}}{g} \ddot{\varphi} - \frac{\bar{m}_{\varphi 1}}{g} \ddot{\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

ここに、 $B_1 = b_1 + b^2 H_d / 4$ ,  $B_2 = b_2 + b^2 H_d / 4$ 。

ケーブルの付加水平張力  $H_p$  は

$$H_p = -\frac{E_c F_c}{L_c} \int_0^L y'' \frac{b}{2} (\varphi + \theta) dz \dots\dots\dots(38)$$

と与えられる。変位  $w$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  を次のように座標  $z$  と時間  $t$  とで変数分離する。

$$w = \bar{w} \cdot e^{-\omega t}, \varphi = \bar{\varphi} \cdot e^{-\omega t}, \theta = \bar{\theta} \cdot e^{-\omega t} \dots\dots\dots(39)$$

式(39)を式(37),(38)に代入し、さらに付加張力  $H_p$  を消去すると

$$\left. \begin{aligned} -a\bar{w}'' + b_1\bar{w} + b_2\bar{\varphi}' + b_1\bar{\theta}' &= \frac{\bar{m}_w}{g} \omega^2 \bar{w} \\ -b_2\bar{w}' - B_1\bar{\varphi}'' - B_2\bar{\theta}'' \\ &\quad + 16 \frac{E_c F_c b^2}{L_c} \left(\frac{f}{l^2}\right)^2 \int_0^L (\bar{\varphi} + \bar{\theta}) dz \\ &= \frac{\bar{m}_{\varphi 1}}{g} \omega^2 \bar{\varphi} + \frac{\bar{m}_{\varphi 2}}{g} \omega^2 \bar{\theta} \\ -b_1\bar{w}' - B_2\bar{\varphi}'' - B_1\bar{\theta}'' + r\bar{\theta} \\ &\quad + 16 \frac{E_c F_c b^2}{L_c} \left(\frac{f}{l^2}\right)^2 \int_0^L (\bar{\varphi} + \bar{\theta}) dz \\ &= \frac{\bar{m}_{\varphi 2}}{g} \omega^2 \bar{\varphi} + \frac{\bar{m}_{\varphi 1}}{g} \omega^2 \bar{\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

式(40)に対してガラーキンを適用する。

$$\begin{aligned} -a \int_0^L \bar{w}' \hat{w}_m dz + b_1 \int_0^L \bar{w}' \hat{w}_m dz + b_2 \int_0^L \bar{\varphi}' \hat{w}_m dz \\ + b_1 \int_0^L \bar{\theta}' \hat{w}_m dz = \frac{\bar{m}_w}{g} \omega^2 \int_0^L \bar{w} \hat{w}_m dz \dots\dots(41) \\ -b_2 \int_0^L \bar{w}' \hat{\varphi}_m dz - B_1 \int_0^L \bar{\varphi}'' \hat{\varphi}_m dz - B_2 \int_0^L \bar{\theta}'' \hat{\varphi}_m dz \\ + 16 \frac{E_c F_c b^2}{L_c} \left(\frac{f}{l^2}\right)^2 \int_0^L \int_0^L (\bar{\varphi} + \bar{\theta}) dz \hat{\varphi}_m dz \\ = \frac{m_{\varphi 1}}{g} \omega^2 \int_0^L \bar{\varphi} \hat{\varphi}_m dz + \frac{m_{\varphi 2}}{g} \omega^2 \int_0^L \bar{\theta} \hat{\varphi}_m dz \dots(42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -b_1 \int_0^L \bar{w}' \hat{\theta}_m dz - B_2 \int_0^L \bar{\varphi}'' \hat{\theta}_m dz \\ - B_1 \int_0^L \bar{\theta}'' \hat{\theta}_m dz + r \int_0^L \bar{\theta} \hat{\theta}_m dz \\ + 16 \frac{E_c F_c b^2}{L_c} \left(\frac{f}{l^2}\right)^2 \int_0^L \int_0^L (\bar{\varphi} + \bar{\theta}) dz \hat{\theta}_m dz \\ = \frac{m_{\varphi 2}}{g} \omega^2 \int_0^L \bar{\varphi} \hat{\theta}_m dz + \frac{m_{\varphi 1}}{g} \omega^2 \int_0^L \bar{\theta} \hat{\theta}_m dz \dots(43) \end{aligned}$$

$(m=1, 2, 3, \dots, N)$

3径間2ヒンジ吊橋のねじれ固有振動を解析する場合は中央径間と側径間に対して以下の級数解および座標関数を適用する。

中央径間:

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= \sum_n c_n \cos \frac{n\pi z}{l_c}, \hat{w}_m = \cos \frac{m\pi z}{l_c} \\ \bar{\varphi} &= \sum_n d_n \sin \frac{n\pi z}{l_c}, \hat{\varphi}_m = \sin \frac{m\pi z}{l_c} \\ \bar{\theta} &= \sum_n e_n \sin \frac{n\pi z}{l_c}, \hat{\theta}_m = \sin \frac{m\pi z}{l_c} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

側径間:

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= \sum_n \bar{c}_n \cos \frac{n\pi z}{l_s}, \hat{w}_m = \cos \frac{m\pi z}{l_s} \\ \bar{\varphi} &= \sum_n \bar{d}_n \sin \frac{n\pi z}{l_s}, \hat{\varphi}_m = \sin \frac{m\pi z}{l_s} \\ \bar{\theta} &= \sum_n \bar{e}_n \sin \frac{n\pi z}{l_s}, \hat{\theta}_m = \sin \frac{m\pi z}{l_s} \end{aligned} \right\}$$

式(41)~(43)から次の固有方程式が与えられる。

$$\begin{bmatrix}
 A_{11} & 0 & A_{13} & 0 & A_{15} & 0 \\
 & A_{22} & 0 & A_{24} & 0 & A_{26} \\
 & & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\
 \text{Sym.} & & & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\
 & & & & A_{55} & A_{56} \\
 & & & & & A_{66}
 \end{bmatrix}
 -\omega^2 P_{19}^2
 \begin{bmatrix}
 B_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & B_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & B_{33} & 0 & B_{35} & 0 \\
 \text{Sym.} & & & B_{44} & 0 & B_{46} \\
 & & & & B_{55} & 0 \\
 & & & & & B_{66}
 \end{bmatrix}
 =0
 \dots\dots\dots(45)$$

ここに固有円振動数  $\omega$  は次のように無次元表示する。

$$\omega \sqrt{\frac{m_{\varphi 1}}{GJ}} l_c = \omega P_{19}$$

式 (45) の部分行列の各要素は以下のように無次元パラメーターの組合せで表わされる。

- $A_{11}$  の対角要素  $a_{mn}^{11} = (m\pi)^2 / P_{13}^2 + 1 / P_{16}$
- $A_{13}$  の対角要素  $a_{mn}^{13} = m\pi \sqrt{1 - P_{16}} / P_{16}$
- $A_{15}$  の対角要素  $a_{mn}^{15} = m\pi / P_{16}$
- $A_{22}$  の対角要素  $a_{mn}^{22} = 2(m\pi)^2 / P_{13}^2 P_4 + 2 P_4 / P_{16}$
- $A_{24}$  の対角要素  $a_{mn}^{24} = 2 m\pi \cdot \sqrt{1 - P_{16}} / P_{16}$
- $A_{26}$  の対角要素  $a_{mn}^{26} = 2 m\pi / P_{16}$
- $A_{33}$  の対角要素  $a_{mn}^{33} = (m\pi)^2 \cdot (P_{14} + 1 / P_{16}) + 512 P_2 P_{14} / (m\pi)^2$
- $A_{33}$  の非対角要素  $a_{mn}^{33} = 512 P_2 \cdot P_{14} / mn\pi^2$
- $A_{34}$  の一般要素  $a_{mn}^{34} = 1024 P_2 \cdot P_{14} \cdot P_4 / mn\pi^2$
- $A_{35}$  の対角要素  $a_{mn}^{35} = (m\pi)^2 \cdot (P_{14} + \sqrt{1 - P_{16}} / P_{16}) + 512 P_2 P_{14} / (m\pi)^2$
- $A_{35}$  の非対角要素  $a_{mn}^{35} = 512 P_2 \cdot P_{14} / mn\pi^2$
- $A_{36}$  の一般要素  $a_{mn}^{36} = 1024 P_2 \cdot P_{14} \cdot P_4 / mn\pi^2$
- $A_{44}$  の対角要素  $a_{mn}^{44} = 2 \cdot (m\pi)^2 \cdot (P_{14} + 1 / P_{16}) / P_4 + 2048 P_2 \cdot P_4^2 P_{14} / (m\pi)^2$
- $A_{44}$  の非対角要素  $a_{mn}^{44} = 2048 P_2 \cdot P_{14} \cdot P_4^2 / mn\pi^2$

- $A_{45}$  の一般要素  $a_{mn}^{45} = 1024 P_2 \cdot P_{14} \cdot P_4 / mn\pi^2$
- $A_{46}$  の対角要素  $a_{mn}^{46} = 2 \cdot (m\pi)^2 (P_{14} + \sqrt{1 - P_{16}} / P_{16}) / P_4 + 2048 P_2 \cdot P_4^2 P_{14} / (m\pi)^2$
- $A_{46}$  の非対角要素  $a_{mn}^{46} = 2048 P_2 \cdot P_{14} \cdot P_4^2 / mn\pi^2$
- $A_{55}$  の対角要素  $a_{mn}^{55} = (m\pi)^2 (P_{14} + 1 / P_{16}) + 2 \cdot P_{15}^2 + 512 P_2 P_{14} / (m\pi)^2$
- $A_{55}$  の非対角要素  $a_{mn}^{55} = 512 P_2 \cdot P_{14} / mn\pi^2$
- $A_{56}$  の一般要素  $a_{mn}^{56} = 1024 P_2 \cdot P_{14} \cdot P_4 / mn\pi^2$
- $A_{66}$  の対角要素  $a_{mn}^{66} = 2(m\pi)^2 (P_{14} + 1 / P_{16}) / P_4 + 4 P_4 P_{15}^2 + 2048 P_2 P_{14} P_4^2 / (m\pi)^2$
- $A_{66}$  の非対角要素  $a_{mn}^{66} = 2048 P_2 \cdot P_{14} \cdot P_4^2 / mn\pi^2$
- $B_{11}$  の対角要素  $b_{mm}^{11} = P_{17}$
- $B_{22}$  の対角要素  $b_{mm}^{22} = 2 P_{17} \cdot P_4$
- $B_{33}$  の対角要素  $b_{mm}^{33} = 1$
- $B_{35}$  の対角要素  $b_{mm}^{35} = P_{18}$
- $B_{44}$  の対角要素  $b_{mm}^{44} = 2 P_4$
- $B_{46}$  の対角要素  $b_{mm}^{46} = 2 P_{18} \cdot P_4$
- $B_{55}$  の対角要素  $b_{mm}^{55} = 1$
- $B_{66}$  の対角要素  $b_{mm}^{66} = 2 \cdot P_4$

ここに記していない要素はすべて 0 である。また無次元パラメーター  $P_{13} \sim P_{18}$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 P_{13} &= \sqrt{\frac{GJ}{a}} l_c, \quad P_{14} = \frac{H_d b^2}{4 GJ}, \quad P_{15} = \sqrt{\frac{r}{2 GJ}} l_c \\
 P_{16} &= \frac{GJ}{b_1}, \quad P_{17} = \frac{m_w}{m_{\varphi 1} l_c^2}, \quad P_{18} = \frac{m_{\varphi 2}}{m_{\varphi 1}}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(46)$$

### 3. 比較計算例および実測値との比較

各振動タイプの高次モードに対してはせん断変形の影響が顕著に現われること、したがってせん断変形を無視した振動解析法では高めの固有振動数が求まっていることを 1 つの実橋を対象とした数値解析と AVS(Ambient Vibration Survey<sup>10)</sup>) による測定値との対比によって明らかにする。対象吊橋は中央径間長 460 m をもつ中規模の 3 径間 2 ヒンジ吊橋 Vincent Thomas Bridge でその諸元は表-1 に示すとおりである注2)。なお、本橋の

注 2) 文献 7), 8), 9) および 10) を参考にしたが若干の不明な数値については図その他より推定した(表中の●印)。

パラメーター値を表-2に示しておく。

(1) 鉛直たわみ振動

表-3に Vincent Thomas 橋を対象とした Abdel-Ghaffar ら<sup>10)</sup>の固有振動数の測定値と計算値および前述のせん断変形を考慮した理論による計算値を比較して掲げた。これらの振動数に対応した固有モードは文献<sup>10)</sup>

表-1 Vincent Thomas 橋の諸元

項目	記号	数 値	備 考
中央径間長	$l_c$	460 m	
側径間長	$l_s$	155 m	
バックステイ支間長	$l_b$	53.8 m	
同 角 度	$\theta_b$	40°	
ケーブルサグ	$f$	46.1 m	
タワー高さ	$h_t$	48.0 m	補剛トラスを基準
補剛トラス高さ	$h$	4.575 m	
補剛トラス間隔	$b$	18.034 m	
パネル間隔	$\lambda$	4.74 m	
ケーブル断面積	$F_c$	0.078 m	一橋当たり
弦材断面積	$A_c$	0.034 7 m <sup>2</sup>	
斜材断面積	$A_d$	0.010 9 m <sup>2</sup>	
横構断面積	$A_b$	0.010 7 m <sup>2</sup>	
つり構造重量	$m_s$	9.137 t/m	一橋当たり
ケーブル重量	$m_c$	1.263 t/m	一橋当たり

表-2 Vincent Thomas 橋のパラメーター

パラメーター	数 値	パラメーター	数 値
$P_1$	8.956	$P_{11}$	9.583
$P_2$	2.290	$P_{12}$	10.63 sec
$P_3$	0.000 468	$P_{13}$	20.958
$P_4$	0.337	$P_{14}$	0.182 6
$P_5$	54.943 sec	$P_{15}$	63.118
$P_6$	1.849	$P_{16}$	0.284 6
$P_7$	2.407	$P_{17}$	3.239 × 10 <sup>-5</sup>
$P_8$	0.001 17	$P_{18}$	0.856 9
$P_9$	0.138 3	$P_{19}$	1.851 2 sec
$P_{10}$	9.978		

$P_5, P_{12}, P_{19}$  は円振動数を乗じて無次元量となる。

表-3 鉛直たわみ固有振動数の比較 (Vincent Thomas 橋)

次数	パラメーター $P_8'$	測定値	Abdel-Ghaffar	小松・西村
対 称 振 動				
1	0.000 468	0.234	0.221	0.224
2	0.004 21	0.365	0.348	0.350
3	0.004 12	0.487	0.459	0.465
4	0.011 7	0.835	0.803	0.792
5	0.022 9	1.450	1.467	1.388
6	0.037 1	2.076	2.340	2.071
7	0.037 9	2.146	2.352	2.107
8	0.056 6	2.871	3.458	2.912
逆 対 称 振 動				
1	0.001 87	0.216	0.197	0.199
2	0.007 49	0.579	0.549	0.549
3	0.016 5	1.022	1.101	1.052
4	0.016 8	1.121	1.106	1.071
5	0.030 0	1.791	1.881	1.735
6	0.046 8	2.505	2.877	2.501

(単位: c/s)

とほとんど大差ないので省略する。Abdel-Ghaffar らの測定値と計算値とは対称振動については第6次, 逆対称振動については第5次あたりから有意な差が生じており, いずれも計算値は高めの値となっている。これに対して補剛トラスのせん断変形を考慮した本法と測定値とは, 低次から高次振動まで一貫して良好に一致している。なおパラメーター  $P_3$  に含まれる  $l$  としてスパン長の代わりにモードの振動変位が0となる点の距離すなわち平均節間距離を代表長として採用し,  $P_3$  と区別するため  $P_3'$  と表わして表-3に掲げておく。はりの曲げ振動に対するせん断変形の影響は  $P_3'$  が0.01を越えるとは顕著になるという著者らの平行弦トラスの振動特性に関する研究<sup>17)</sup>で得られた結論は補剛トラスを有する吊橋についてもあてはまることわかる。

(2) 水平たわみ振動

表-4は中央径間を対象とした Abdel-Ghaffar の理

表-4 (1) 水平横たわみ固有振動数の比較 (Vincent Thomas 橋, 中央径間 対称振動)

次数	測定値	Abdel-Ghaffar	小松・西村	卓越部分
1	0.168	0.173 0	0.159 1	s & c
2	0.542	0.563 8	0.611 3	s & c
3	0.879	0.824 1	0.932 6	c
4	1.204	1.204 5	1.253 3	s & c
5	1.531	1.340 7	1.330 7	s & c
6		1.647 0	1.720 4	c
7		2.125 6	2.167 6	c
8		2.642 2	2.623 6	c
9		3.198 2	3.083 3	c
10		3.689 7	3.260 9	s
11		3.789 0	3.545 3	c
12		4.396 3	4.008 7	c
13		4.976 2	4.473 6	c
14*		7.229 2	5.790 8	s
15*		11.958 1	8.608 1	s

s : suspended structure, c : cable (単位: c/s)

表-4 (2) 水平横たわみ固有振動数の比較 (Vincent Thomas 橋, 中央径間 逆対称振動)

次数	測定値	Abdel-Ghaffar	小松・西村	卓越部分
1	0.623	0.565 2	0.554 1	s & c
2		0.642 9	0.653 4	s & c
3		0.995 7	1.054 1	c
4		1.420 7	1.492 0	c
5		1.881 6	1.939 9	c
6		2.364 3	2.181 0	s
7		2.379 1	2.394 6	c
8		2.915 3	2.853 0	c
9		3.489 9	3.314 1	c
10		4.092 6	3.776 8	c
11		4.693 6	4.240 6	c
12		5.232 8	4.475 7	s
13		5.311 2	4.705 1	c
14*		9.444 4	7.175 6	s
15*		14.772 4	10.071 3	s

s : suspended structure, c : cable (単位: c/s)

表—5 吊構造変位の卓越した高次水平たわみ振動数の近似式の精度 (Vincent Thomas 橋)

振動次数	桁変位モード	$\omega P_{12}$	$(n\pi)^2$	$\frac{(n\pi)^2}{\sqrt{1+p_s}(n\pi)^2}$
逆対称6次		145.48	157.91	145.08
対称10次		217.64	246.74	217.08
逆対称12次		298.84	355.31	298.62
対称14次*		386.69	483.61	386.48
逆対称14次*		479.21	651.65	478.99
対称15次*		574.89	799.44	574.65
逆対称15次*		672.62	986.96	672.36

論値<sup>7)</sup>と測定値<sup>10)</sup>および横構のせん断変形を考慮した式(31)による計算値を固有振動数について比較して掲げた。なお文献7)による吊構造の鉛直軸まわりの換算断面2次モーメントには弦材のみならず床組・コンクリート床版の協力作用を含んでいる。本法においても、これと等価な床版(幅 $b=18.034$  m, 鋼換算板厚 $t_s=1.2$  cm)の剛性に対する寄与を考慮した。

測定値については対称モードに対して5次, 逆対称モードに対しては1次のみ値しか得られていない。したがってそれ以上の高次振動については Abdel-Ghaffar の計算値と本法との比較になっている。ケーブルの水平横変位が卓越するモードの振動数は測定値, Abdel-Ghaffar の計算値, および本法との間に大差はない。これは両者のケーブルのモデル化に本質的差異がないためである。これに対して吊構造の水平横変位が卓越したモードについては横構トラスのせん断変形を無視した Abdel-Ghaffar の計算値は次数が高くなるにつれて高めの値を与える。水平横たわみ振動については、ケーブルと吊構造の相互関係はごく低次のモードに限定される。そこで吊構造の水平横変位の卓越した高次モードの固有振動数の無次元量は Abdel-Ghaffar の計算値は Euler beam の無次元振動数  $(n\pi)^2$  に、また著者らの計算値は Timoshenko beam の無次元振動数  $(n\pi)^2/\sqrt{1+p_s}(n\pi)^2$  で近似できる。ちなみに吊構造の変位の卓越したモードの対称5次, 逆対称6次以上について表—5 のようなきわめて良好な近似を得た。

### (3) ねじり振動

表—6 は Bleich のねじり振動理論<sup>12)</sup>をもとにした Abdel-Ghaffar の理論値と測定値および腹材の2次せん断変形と吊構造の横断面変形を考慮した式(45)による計算値とを比較したものである。ねじり振動に関しては Abdel-Ghaffar も本法も床組・床版の協力作用は考慮していない。また測定値は対称振動について5次, 逆対称振動について4次までの値が求められている。それ以上の高次振動については Abdel-Ghaffar と著者らの計算値の比較を行った。本法と Abdel-Ghaffar の計算値は

対称および逆対称モードのそれぞれ4次振動から有意な差を生じて2次せん断変形を含まない Abdel-Ghaffar の計算値は高めの値となっている。

### (4) 関門橋の鉛直たわみ振動

さらに鉛直たわみ振動について関門橋の実測データ<sup>18)</sup>と本法との比較を行った。関門橋の振動試験は起振機による励振実験と重量車による走行実験が行われた。前者で

は1c/s以下の低次振動しか観測されていないので走行実験による応答スペクトルのピーク値に対応する周波数の実測データを整理して今回改めて高次の固有振動数の実測値とした。本法においてせん断剛性 $GA_y$ として実橋の諸元を用いた場合、 $GA_y=\infty$ としてせん断変形を省略した場合、および上述の意味の固有振動数の実測値

表—6 (1) ねじり固有振動数の比較 (Vincent Thomas 橋, 対称振動)

次数	測定値	Abdel-Ghaffar	小松・西村	卓越径間
1	0.464	0.4494	0.4698	center & side
2	0.945	0.9433	0.9260	center & side
3	1.018	0.9498	0.9979	center & side
4	1.893	1.8567	1.6601	center
5	2.780	3.0793	2.4995	center
6		4.6331	3.3876	side
7		4.6593	3.4330	center
8		6.6130	4.4330	center
9		8.9545	5.4760	center
10		11.6401	6.4579	side
11		11.6920	6.5444	center
12		14.8394	7.6267	center
13		18.4134	8.7156	center
14		22.3098	9.6835	side
15		22.4344	9.8066	center

(単位: c/s)

表—6 (2) ねじり固有振動数の比較 (Vincent Thomas 橋, 逆対称振動)

次数	測定値	Abdel-Ghaffar	小松・西村	卓越径間
1	0.740	0.5959	0.6547	center
2	0.806	0.9443	0.9922	side
3	1.425	1.3667	1.3751	center
4	2.109	2.4073	2.1643	side
5		2.4241	2.1921	center
6		3.8231	3.1013	center
7		4.6332	3.5365	side
8		5.5889	4.0810	center
9		7.6976	5.0410	side
10		7.7352	5.1083	center
11		10.2728	6.1649	center
12		11.6402	6.6134	side
13		13.2135	7.2380	center
14		16.4951	8.2146	side
15		16.5719	8.3194	center

(単位: c/s)



を比較し表-7に掲げた。前述の Vincent Thomas 橋の場合と同様に、1 c/s を越える高次振動に対して補剛トラスのせん断変形の影響が顕著に現われており、せん断変形を考慮した本法と実測値とは高次まで良好に一致している。関門橋の諸元については文献 18) を参照されたい。

表-7 関門橋の鉛直たわみ振動数  
(実測値と理論値の比較)

振動次数	実測値 (c/s)		理論値 (c/s)		備考
	動振実験	走行実験	せん断考慮	せん断省略	
対称 1次	0.212	0.202	0.203	0.197	c & s
対称 2次	0.298	0.290	0.272	0.263	c & s
対称 3次	—	—	0.419	0.420	s
対称 4次	0.570	0.557	0.518	0.505	c
対称 5次	0.918	0.900	0.862	0.922	c
対称 6次	—	1.310	1.270	1.450	c
対称 7次	—	1.720	1.723	2.103	c
対称 8次	—	—	1.958	2.438	s
対称 9次	—	2.125	2.204	2.886	c
対称 10次	—	2.525	2.701	3.795	c
逆対称 1次	0.180	0.173	0.152	0.153	c
逆対称 2次	—	—	0.372	0.380	c
逆対称 3次	—	—	0.399	0.407	s
逆対称 4次	0.740	0.730	0.678	0.717	c
逆対称 5次	—	—	1.059	1.178	c
逆対称 6次	—	—	1.139	1.282	s
逆対称 7次	—	1.505	1.492	1.766	c
逆対称 8次	—	—	1.961	2.483	c
逆対称 9次	—	—	2.102	2.715	s
逆対称 10次	—	2.332	2.451	3.329	c

変位の卓越径間 c: center span, s: side span

#### 4. せん断変形の影響のパラメーター解析

本文の 2. に示した各種の振動数方程式 (14), (31) および (45) はいずれも無次元パラメーターの組合せで表わされている。そこで無次元表示した各固有円振動数とパラメーターの関係を調べ、吊橋の固有振動特性に対するパラメーターの影響、とりわけせん断剛性の相対的大きさを表わす  $P_3$ ,  $P_8$  および  $P_{15}$  の影響について考察する。

##### (1) 鉛直たわみ振動

鉛直たわみ振動に関係するパラメーターは  $P_1 \sim P_4$  である。これらのパラメーターは中央径間長 500 m を超える長大吊橋について以下の範囲に分布している<sup>14)</sup>。

$$P_1: 8 \sim 50, P_2: 1.5 \sim 2.5, P_3: 10^{-4} \sim 6 \times 10^{-4}, P_4: 0.18 \sim 0.5$$

これらの分布特性と力学特性に与える影響を考慮して、パラメーターは次の値を採用した。

$$P_1=10, 20, 30, P_2=2.0, P_3=10^{-4}, 5 \times 10^{-4}, P_4=0.3, 0.5$$

パラメーター  $P_1$  はほぼスパン長に比例するので  $P_1=10$  は中央径間長 500~600 m,  $P_1=20$  は 1000~1200 m,  $P_1=30$  は 1500 m 級の吊橋に相当する。

表-8 に対称および逆対称振動についてそれぞれ 10 次までの無次元表示した固有振動数  $\omega P_3$  とそれぞれの

表-8 (1) 鉛直たわみ固有振動数 (無次元), 対称振動

次数	$P_1=10, P_4=0.3$	$P_1=10, P_4=0.5$	$P_1=20, P_4=0.3$	$P_1=20, P_4=0.5$	$P_1=30, P_4=0.3$	$P_1=30, P_4=0.5$
1	88.3 cs 88.3 cs	55.2 cs 55.2 cs	156.0 cs 156.0 cs	100.4 cs 100.4 cs	225.4 cs 225.4 cs	147.6 cs 147.6 cs
2	131.0 cs 132.1 cs	122.6 cs 123.4 cs	212.1 cs 212.8 cs	201.7 cs 202.2 cs	301.9 cs 302.4 cs	288.1 cs 288.3 cs
3	179.2 cs 181.4 cs	161.8 cs 162.8 cs	316.4 cs 319.3 cs	309.1 cs 310.5 cs	460.3 cs 463.7 cs	454.3 cs 455.7 cs
4	281.7 c 290.9 c	281.7 c 290.9 c	395.1 cs 401.9 cs	395.0 cs 402.0 cs	535.3 cs 541.0 cs	535.4 cs 540.8 cs
5	486.7 c 521.2 c	379.3 s 398.4 s	618.6 c 646.2 c	505.4 s 520.4 s	791.0 c 812.9 c	666.1 s 678.4 s
6	732.6 c 819.7 c	486.7 c 521.2 c	881.4 c 955.0 c	618.6 c 646.2 c	1084.9 c 1145.6 c	791.2 c 813.1 c
7	866.8 s 992.9 s	732.6 c 819.7 c	1024.2 s 1133.2 s	881.4 c 955.0 c	1243.1 s 1334.6 s	1084.9 c 1145.7 c
8	1006.2 c 1180.5 c	866.7 s 992.8 s	1170.9 c 1323.6 c	1023.8 s 1132.7 s	1403.0 c 1532.8 c	1242.3 s 1333.7 s
9	1297.6 c 1597.3 c	1006.2 c 1180.5 c	1477.9 c 1746.9 c	1170.9 c 1323.6 c	1737.4 c 1971.3 c	1403.0 c 1532.8 c
10	1599.6 c 2063.3 c	1297.6 c 1597.3 c	1795.9 c 2218.9 c	1477.9 c 1746.9 c	2082.2 c 2456.5 c	1737.4 c 1971.3 c

上段:  $P_3=5 \times 10^{-4}$ , 下段:  $P_3=10^{-4}$

凡例 cs: center span, side span とともに変位

c: center span のみ変位

s: side span のみ変位

表-8 (2) 鉛直たわみ固有振動数 (無次元), 逆対称振動  $P_4=0.3$

次数	$P_1=10$	$P_1=20$	$P_1=30$
1	74.0 c 74.2 c	131.6 c 131.7 c	192.6 c 192.6 c
2	149.6 s 151.2 s	235.1 s 236.1 s	331.8 s 332.6 s
3	197.2 c 200.9 c	293.7 c 296.2 c	406.5 c 408.3 c
4	377.8 c 396.8 c	499.3 c 513.8 c	653.4 c 664.6 c
5	449.1 s 477.7 s	577.3 s 599.8 s	743.4 s 761.0 s
6	605.3 c 662.2 c	745.6 c 792.4 c	933.7 c 971.5 c
7	866.6 cs 992.6 cs	1023.2 cs 1132.0 cs	1241.2 cs 1332.2 cs
8	1150.2 c 1382.3 c	1322.6 c 1528.7 c	1568.4 c 1745.8 c
9	1347.4 s 1671.7 s	1530.3 s 1822.3 s	1794.2 s 2049.0 s
10	1447.6 c 1824.5 c	1635.8 c 1977.2 c	1908.7 c 2208.3 c

上段:  $P_3=5 \times 10^{-4}$ , 下段:  $P_3=10^{-4}$

凡例 cs: center span, side span とともに変位

c: center span のみ変位

s: side span のみ変位

モードにおける卓越径間とを示した。対称振動については4次ないし5次以上では中央径間と側径間との連成効果は僅少となる。これは式(8)の左辺第3項のケーブル付加張力の効果が小さくなるため、この領域の高次固有振動数は、式(10)において $n=5,7,\dots$ とおくことにより十分な精度で近似できる。また逆対称振動については、 $P_4=0.3$ のみについて表-8(2)に無次元固有振動数 $\omega P_8$ を掲げたが、中央径間の逆対称振動については $P_4$ の値に無関係に表-8(2)の固有値が有効である。

鉛直たわみ振動に対する補剛トラスのせん断変形の影響については、以下のような特徴がある。

- ① 補剛トラスのせん断変形は対称および逆対称振動ともに $P_1$ が小さい場合は4次、 $P_1$ が大きい場合は5次から振動数に有意な影響を与える。
- ② これらの振動モードの平均節間距離 $\bar{l}$ を代表長として $P_8$ を評価すると、 $P_8' = EI_x / GA_y \bar{l}^2 \geq 0.01$ の場合、せん断変形の影響が現われる。
- ③ せん断変形の振動モードに与える影響は僅少である。

(2) 水平たわみ振動

水平たわみ振動に関係するパラメーター $P_6 \sim P_{11}$ は中央径間長500mを超える長大吊橋について、以下の範囲に分布している<sup>14)</sup>。

$$P_6 : 2.8 \sim 10.7, P_7 : 2 \sim 80, P_8 : 0.002 \sim 0.005, P_9 : 0.14 \sim 0.3, P_{10} : 9 \sim 11, P_{11} : 8.5 \sim 11$$

これらのパラメーターの分布特性と力学特性に対する影響を考慮して、数値計算には以下の値を用いた<sup>注3)</sup>。

$$P_6 = 4, 6, 8, P_8 = 0.002, 0.005, P_9 = 0.2, 0.3, P_{10} = 10, P_{11} = 9.8$$

水平横たわみ振動はケーブルと吊構造の相互作用の程度によって、2種のタイプに分類できる。一つは対称1次、逆対称1次、対称2次、逆対称3次のようにケーブルと吊構造の相互作用が顕著なモード、いま一つは逆対称2次、対称3次のようにケーブルの変位が卓越したモードである(図-2)。

前者の振動モードのうち吊構造変位モードの節数が3個以上の高次固有振動数は次式で近似できる。

$$\omega P_{12} = \frac{(n\pi)^2}{\sqrt{1 + P_8(n\pi)^2}} \dots\dots\dots(47)$$

表-9に中央径間に関する対称および逆対称振動の各10次までの無次元固有振動数 $\omega P_{12}$ と変位の卓越した構造部を記号G, Cで示した。水平横たわみ振動に対する

注3)  $P_7$ は $P_6, P_9$ および $P_{10}$ に従属しており、次式によって与えられる。

$$P_7 = \frac{8P_6^2}{P_{10}(1+P_9)}$$

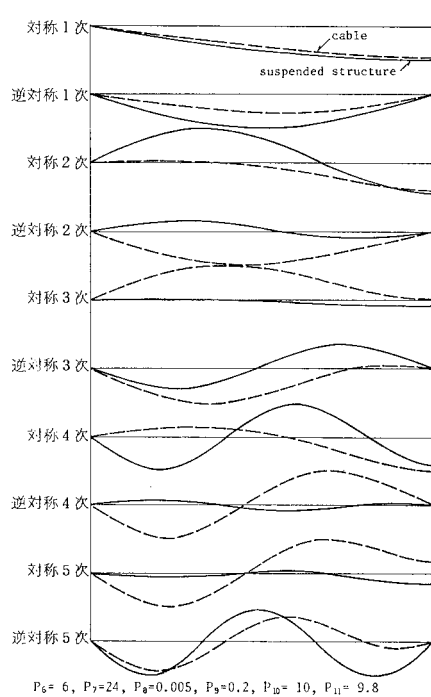


図-2 中央径間水平横たわみ振動モード

横構のせん断変形の影響には以下のような特徴がある。

- ① 横構のせん断変形の固有振動数に対する影響が顕著に現われるのは対称および逆対称振動のそれぞれ2次以上の吊構造変位の卓越したモードである。
- ② 横構のせん断剛性の相対的大きさを表すパラメーター $P_8$ を、振動モードの平均節間距離 $\bar{l}$ で評価すると

$$P_8' = EI_y / GA_x \bar{l}^2 \geq 0.01$$

の場合、横構のせん断変形の影響が吊構造変位の卓越したモードの振動数に現われる。

- ③  $P_6, P_9$ の値を変動させてもせん断変形の影響にはあまり差はみられない。

(3) ねじり振動

ねじり振動に関しては2つのせん断変形の影響が問題となる。一つは対傾構のせん断変形、いま一つはそりモーメントに伴う補剛トラスおよび横構の2次のせん断変形の影響である。

ねじり振動に関係する無次元パラメーター $P_{13} \sim P_{18}$ は中央径間長500mを超える長大吊橋について調べると、以下の範囲に分布している。

$$P_{13} : 16 \sim 50, P_{14} : 0.05 \sim 0.67, P_{15} : 20 \sim 60, P_{16} : 0.28 \sim 0.77, P_{17} : 5 \times 10^{-6} \sim 5 \times 10^{-5}, P_{18} : 0.5 \sim 0.9$$

これらパラメーターの分布特性と固有振動数に与える影

響を考慮して数値計算においては次の値を採用した。

$$P_{13}=20, 30, 40, P_{14}=0.1, 0.5, P_{15}=20, 60$$

$$P_{16}=0.4, 0.6, P_{17}=10^{-5}, P_{18}=0.8$$

このほか前出のパラメーター  $P_2=2.0, P_4=0.35$  とした。

表一9 (1) 水平横たわみ固有振動数 (無次元), 中央径間対称振動

次数	$P_6 = 4.0$		$P_6 = 6.0$		$P_6 = 8.0$	
	$P_9=0.2$	$P_9=0.3$	$P_9=0.2$	$P_9=0.3$	$P_9=0.2$	$P_9=0.3$
1	14.15 <sup>GC</sup>	13.65 <sup>GC</sup>	18.70 <sup>GC</sup>	18.04 <sup>GC</sup>	23.59 <sup>GC</sup>	22.77 <sup>GC</sup>
	14.23 <sup>GC</sup>	13.73 <sup>GC</sup>	18.77 <sup>GC</sup>	18.11 <sup>GC</sup>	23.67 <sup>GC</sup>	22.84 <sup>GC</sup>
2	73.24 <sup>GC</sup>	62.77 <sup>GC</sup>	77.46 <sup>GC</sup>	75.94 <sup>GC</sup>	81.57 <sup>GC</sup>	80.09 <sup>GC</sup>
	76.42 <sup>GC</sup>	62.94 <sup>GC</sup>	84.59 <sup>GC</sup>	82.67 <sup>GC</sup>	88.50 <sup>GC</sup>	86.88 <sup>GC</sup>
3	78.27 <sup>GC</sup>	72.89 <sup>GC</sup>	116.06 <sup>GC</sup>	95.18 <sup>GC</sup>	154.60 <sup>GC</sup>	126.58 <sup>GC</sup>
	82.32 <sup>GC</sup>	79.26 <sup>GC</sup>	116.12 <sup>GC</sup>	95.45 <sup>GC</sup>	154.65 <sup>GC</sup>	126.65 <sup>GC</sup>
4	127.00 <sup>GC</sup>	104.75 <sup>GC</sup>	165.92 <sup>GC</sup>	153.28 <sup>GC</sup>	170.03 <sup>GC</sup>	167.84 <sup>GC</sup>
	127.45 C	105.65 <sup>GC</sup>	188.29 <sup>GC</sup>	155.24 <sup>GC</sup>	204.46 <sup>GC</sup>	197.84 <sup>GC</sup>
5	158.69 <sup>GC</sup>	134.69 <sup>GC</sup>	191.33 <sup>GC</sup>	166.82 <sup>GC</sup>	253.18 <sup>GC</sup>	208.09 <sup>GC</sup>
	166.39 C	136.17 <sup>GC</sup>	203.52 <sup>GC</sup>	192.16 <sup>GC</sup>	254.42 <sup>GC</sup>	212.29 <sup>GC</sup>
6	176.26 <sup>GC</sup>	165.14 C	250.87 <sup>GC</sup>	208.42 <sup>GC</sup>	266.00 <sup>GC</sup>	260.12 <sup>GC</sup>
	202.19 <sup>GC</sup>	171.98 C	255.61 <sup>GC</sup>	217.35 <sup>GC</sup>	333.16 <sup>GC</sup>	276.45 <sup>GC</sup>
7	213.33 C	177.18 <sup>GC</sup>	266.84 <sup>GC</sup>	253.24 <sup>GC</sup>	338.77 <sup>GC</sup>	281.08 <sup>GC</sup>
	216.69 <sup>GC</sup>	205.05 <sup>GC</sup>	317.43 <sup>GC</sup>	260.37 C	352.94 <sup>GC</sup>	336.01 <sup>GC</sup>
8	260.00 <sup>GC</sup>	214.94 <sup>GC</sup>	321.52 C	272.41 <sup>GC</sup>	362.03 <sup>GC</sup>	345.60 <sup>GC</sup>
	264.32 C	215.91 <sup>GC</sup>	350.43 <sup>GC</sup>	321.44 C	428.88 C	360.95 <sup>GC</sup>
9	268.52 <sup>GC</sup>	258.30 C	359.81 <sup>GC</sup>	322.23 C	428.79 <sup>GC</sup>	364.84 <sup>GC</sup>
	317.88 C	259.12 C	397.12 C	349.78 <sup>GC</sup>	497.22 <sup>GC</sup>	430.08 C
10	317.88 <sup>GC</sup>	264.79 <sup>GC</sup>	398.25 C	361.21 <sup>GC</sup>	456.35 <sup>GC</sup>	430.80 <sup>GC</sup>
	346.87 <sup>GC</sup>	346.37 <sup>GC</sup>	476.08 C	388.77 C	532.27 <sup>GC</sup>	499.14 <sup>GC</sup>

上段:  $P_6=0.005$  下段:  $P_6=0.002$

凡例 G: suspended structure, C: cable  
<sup>GC</sup>: つり構造とケーブルの変位同程度  
<sup>GC</sup>: つり構造の変位大  
<sup>GC</sup>: ケーブルの変位大  
C: ケーブルの変位大 つり構造の変位極小

表一9 (2) 水平横たわみ固有振動数 (無次元), 中央径間逆対称振動

次数	$P_6 = 4.0$		$P_6 = 6.0$		$P_6 = 8.0$	
	$P_9=0.2$	$P_9=0.3$	$P_9=0.2$	$P_9=0.3$	$P_9=0.2$	$P_9=0.3$
1	38.77 <sup>GC</sup>	37.97 <sup>GC</sup>	42.99 <sup>GC</sup>	42.24 <sup>GC</sup>	48.08 <sup>GC</sup>	47.19 <sup>GC</sup>
	40.45 <sup>GC</sup>	39.57 <sup>GC</sup>	44.57 <sup>GC</sup>	43.78 <sup>GC</sup>	49.56 <sup>GC</sup>	48.64 <sup>GC</sup>
2	76.75 <sup>GC</sup>	62.79 <sup>GC</sup>	111.75 <sup>GC</sup>	92.55 <sup>GC</sup>	123.40 <sup>GC</sup>	116.81 <sup>GC</sup>
	76.92 <sup>GC</sup>	63.00 <sup>GC</sup>	113.98 <sup>GC</sup>	93.09 <sup>GC</sup>	139.34 <sup>GC</sup>	121.84 <sup>GC</sup>
3	116.90 <sup>GC</sup>	102.72 <sup>GC</sup>	125.13 <sup>GC</sup>	121.38 <sup>GC</sup>	155.45 <sup>GC</sup>	132.24 <sup>GC</sup>
	126.23 <sup>GC</sup>	103.95 <sup>GC</sup>	141.34 <sup>GC</sup>	137.66 <sup>GC</sup>	157.90 <sup>GC</sup>	145.27 <sup>GC</sup>
4	133.30 <sup>GC</sup>	122.39 <sup>GC</sup>	194.56 <sup>GC</sup>	159.80 <sup>GC</sup>	217.64 <sup>GC</sup>	207.00 <sup>GC</sup>
	143.06 <sup>GC</sup>	139.21 <sup>GC</sup>	196.28 <sup>GC</sup>	162.23 <sup>GC</sup>	257.79 <sup>GC</sup>	212.04 <sup>GC</sup>
5	182.01 C	148.58 <sup>GC</sup>	217.27 <sup>GC</sup>	211.29 <sup>GC</sup>	262.31 <sup>GC</sup>	223.32 <sup>GC</sup>
	182.87 C	150.01 <sup>GC</sup>	265.81 <sup>GC</sup>	221.81 <sup>GC</sup>	278.90 <sup>GC</sup>	272.44 <sup>GC</sup>
6	215.52 <sup>GC</sup>	191.63 C	275.13 <sup>GC</sup>	228.72 <sup>GC</sup>	313.82 <sup>GC</sup>	296.23 <sup>GC</sup>
	235.87 C	192.12 C	283.44 <sup>GC</sup>	274.16 <sup>GC</sup>	366.73 C	302.02 <sup>GC</sup>
7	236.76 C	215.88 <sup>GC</sup>	312.25 <sup>GC</sup>	286.93 <sup>GC</sup>	367.66 <sup>GC</sup>	316.34 <sup>GC</sup>
	273.72 <sup>GC</sup>	236.43 C	354.16 C	290.13 <sup>GC</sup>	422.75 <sup>GC</sup>	382.95 <sup>GC</sup>
8	289.93 C	236.59 C	355.73 C	314.37 <sup>GC</sup>	408.99 <sup>GC</sup>	384.71 <sup>GC</sup>
	290.65 C	273.47 <sup>GC</sup>	421.48 <sup>GC</sup>	354.59 C	474.70 C	425.45 <sup>GC</sup>
9	312.01 <sup>GC</sup>	281.19 C	406.72 <sup>GC</sup>	354.79 C	473.88 C	409.91 <sup>GC</sup>
	345.12 C	281.45 C	437.24 <sup>GC</sup>	419.84 <sup>GC</sup>	569.78 <sup>GC</sup>	473.44 <sup>GC</sup>
10	345.11 C	311.51 <sup>GC</sup>	437.12 C	407.36 <sup>GC</sup>	502.84 <sup>GC</sup>	473.57 <sup>GC</sup>
	400.18 C	326.36 C	517.46 C	424.91 <sup>GC</sup>	587.19 <sup>GC</sup>	560.87 <sup>GC</sup>

上段:  $P_6=0.005$  下段:  $P_6=0.002$

凡例 G: suspended structure, C: cable  
<sup>GC</sup>: つり構造とケーブルの変位同程度  
<sup>GC</sup>: つり構造の変位大  
<sup>GC</sup>: ケーブルの変位大  
C: ケーブルの変位大、つり構造の変位極小

表一10 は対称および逆対称振動についてそれぞれ 10 次までの無次元固有振動数  $\omega P_{19}$  および変位の卓越する支間部分を記号で示した。この表は主として対傾構のせん断変形の影響を知るための資料として作成したものである。対傾構のせん断変形すなわち吊構造の横断面変形

の影響による固有振動数の低下は、比較的対傾構剛性が小さい  $P_{15}=20$  の場合でも 6 ~ 10 次の高次振動について 10 数パーセントに止まっている。ただ 8~9 次あたりから断面変形の卓越したずれ型の振動モードが出現するようになる。モードの平均的節間距離  $\bar{l}$  を用いて  $P_{15}$  を評価したとき

$$P_{15} = \sqrt{7/2} GJ \bar{l} \leq 5$$

の振動については、断面変形の影響を考慮しなければならない。

吊構造のそりねじりに伴う 2 次のせん断変形の影響のみを分離して振動方程式を簡略化して考察する。式 (41)~(43) において断面変形の項を省略する。さらに逆対称振動や表一10 (1) の対称振動において中央径間と側径間の独立な振動 (4 次以上) ではケーブルの付加張力に関する項の影響も省略できる。またそり慣性  $\bar{m}_w$  の影響も僅少であるからこれを省略するとガラーキン公式は次のように簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} & -a \int_0^L \bar{w}'' \hat{w}_m dz + b_1 \int_0^L \bar{w} \hat{w}_m dz \\ & + b_2 \int_0^L \hat{\varphi}' \hat{w}_m dz = 0 \\ & -b_2 \int_0^L \bar{w}' \hat{\varphi}_m dz - B_1 \int_0^L \hat{\varphi}'' \hat{\varphi}_m dz \\ & = \frac{m_{\varphi 1}}{g} \omega^2 \int_0^L \hat{\varphi} \hat{\varphi}_m dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

ここで、

$$\bar{w} = c_m \cos \frac{m\pi z}{l}, \quad \hat{w}_m = \cos \frac{m\pi z}{l}$$

$$\hat{\varphi} = d_m \sin \frac{m\pi z}{l}, \quad \hat{\varphi}_m = \sin \frac{m\pi z}{l}$$

を代入するとねじり固有振動数の近似算定式を得る。

$$\omega P_{19} = m\pi \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{m\pi}{P_{13}}\right)^2}{1 + \left(\frac{m\pi}{P_{13}}\right)^2 P_{16}} (1 + P_{14} \cdot P_{16})} \dots\dots\dots (49)$$

2 次せん断変形の影響は

$$P_{20} = P_{16}/P_{13}^2 = a/b_1 l^2 \dots\dots\dots (50)$$

で評価される。パラメーター  $P_{20}$  は鉛直たわみ振動におけるせん断剛性に関するパラメーター  $P_3$  あるいは水平たわみ振動における  $P_8$  に対応するものである。

表一10 (1) ねじれ固有振動数 (無次元), 対称振動

次数	$P_{13}=20$		$P_{13}=30$		$P_{13}=40$	
	$P_{14}=0.1$	$P_{14}=0.5$	$P_{14}=0.1$	$P_{14}=0.5$	$P_{14}=0.1$	$P_{14}=0.5$
1	4.497 cs 4.513 cs	6.950 cs 6.998 cs	4.479 cs 4.496 cs	6.891 cs 6.945 cs	4.472 cs 4.490 cs	6.867 cs 6.920 cs
2	9.964 cs 10.154 cs	11.716 cs 11.863 cs	9.683 cs 9.898 cs	11.455 cs 11.621 cs	9.575 cs 9.801 cs	11.367 cs 11.530 cs
3	10.322 cs 10.518 cs	13.707 cs 13.781 cs	10.033 cs 10.249 cs	13.526 cs 13.610 cs	9.925 cs 10.148 cs	13.456 cs 13.547 cs
4	17.698 c 18.396 c	20.472 c 20.959 c	16.418 c 17.336 c	19.385 c 20.033 c	15.858 c 16.881 c	18.917 c 19.640 c
5	26.131 c 27.366 c	29.834 c 30.710 c	23.273 c 25.175 c	27.363 c 28.761 c	21.803 c 24.093 c	26.118 c 27.810 c
6	33.370 s 34.937 s	37.800 s 38.915 s	29.106 s 31.786 s	34.065 s 36.085 s	26.627 s 30.046 s	31.939 s 34.543 s
7	35.405 c 37.047 c	39.978 c 41.149 c	30.761 c 33.639 c	35.886 c 38.345 c	27.975 c 31.699 c	33.483 c 36.352 c
8	45.274 c 47.163 c	47.384 c* 52.007 c	39.008 c 42.648 c	45.032 c 47.897 c	34.718 c 39.714 c	41.245 c 45.253 c
9	47.331 c* 57.519 c	48.755 s* 63.099 c	47.330 c* 52.097 c	47.383 c* 58.127 c	42.175 c 48.123 c	47.383 c* 54.503 c
10	48.690 s* 64.246 s	48.887 c* 70.306 s	47.953 c* 58.355 s	48.708 s* 64.886 s	47.327 c* 53.723 s	48.695 s* 60.632 s

上段:  $P_{13}=20$ , 下段:  $P_{13}=60$

凡例 c: center span, s: side span

cs: center span, side span とともに変位

c: center span のみ変位

s: side span のみ変位

c\*, s\*: 断面変形の卓越した振動

表一10 (2) ねじれ固有振動数 (無次元), 逆対称振動

次数	$P_{13}=20$		$P_{13}=30$		$P_{13}=40$	
	$P_{14}=0.1$	$P_{14}=0.5$	$P_{14}=0.1$	$P_{14}=0.5$	$P_{14}=0.1$	$P_{14}=0.5$
1	6.670 c 6.742 c	7.775 c 7.825 c	6.574 c 6.650 c	7.693 c 7.746 c	6.539 c 6.616 c	7.663 c 7.717 c
2	9.666 s 9.855 s	11.245 s 11.376 s	9.394 s 9.604 s	11.014 s 11.160 s	9.291 s 9.510 s	10.927 s 11.079 s
3	13.812 c 14.246 c	16.006 c 16.310 c	13.107 c 13.631 c	15.404 c 15.774 c	12.820 c 13.384 c	15.160 c 15.561 c
4	20.715 s 21.599 s	23.805 s 24.423 s	18.953 s 20.188 s	22.308 s 23.188 s	18.135 s 19.551 s	21.624 s 22.636 s
5	21.790 c 22.766 c	25.003 c 25.694 c	19.775 c 21.167 c	23.273 c 24.280 c	18.820 c 20.432 c	22.466 c 23.637 c
6	30.674 c 32.133 c	34.810 c 35.850 c	26.921 c 29.329 c	31.534 c 33.337 c	24.831 c 27.842 c	29.749 c 32.021 c
7	33.645 s 35.165 s	38.065 s 39.127 s	29.536 s 32.150 s	34.519 s 36.454 s	27.127 s 30.480 s	32.489 s 34.996 s
8	40.280 c 42.063 c	45.261 c 46.532 c	34.789 c 38.080 c	40.373 c 42.923 c	31.259 c 35.654 c	37.294 c 40.750 c
9	47.874 c* 49.721 s	47.890 c* 54.755 s	41.719 s 45.336 s	47.880 c* 50.840 s	37.334 s 42.409 s	44.284 s 48.265 s
10	47.885 s 52.319 c	48.770 s* 57.529 c	43.401 c 47.323 c	48.064 s 52.963 c	38.355 c 43.870 c	45.322 c 49.832 c

上段:  $P_{13}=20$ , 下段:  $P_{13}=60$

凡例 c: center span, s: side span

cs: center span, side span とともに変位

c: center span のみ変位

s: side span のみ変位

c\*, s\*: 断面変形の卓越した振動

図-3 は式 (49) において根号内の分母を 1 として 2 次のせん断変形を省略した場合の無次元固有値  $\omega P_{13}$  と式 (49) の  $\omega P_{13}$  とを比較したものである。ねじり定数比  $P_{13}=20$  の場合には対称・逆対称それぞれ 2 次から,  $P_{13}=40$  の場合には対称・逆対称それぞれ 3 次~4 次以上で 2 次のせん断変形の影響が固有振動数に現われる。

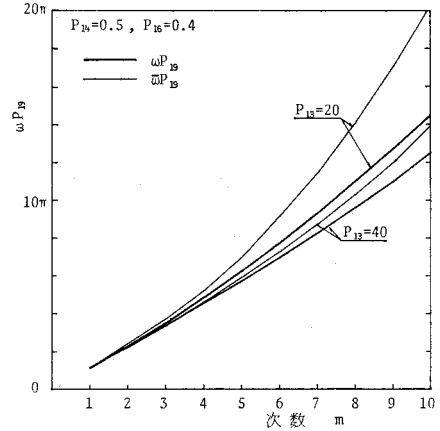


図-3 ねじれ固有振動数に対する吊構造の 2 次せん断変形の影響 [近似式 (49)]

### 5. 結 論

補剛トラスを有する吊橋の各種の固有振動について吊構造各構面のせん断変形を考慮した振動方程式を導き, 振動に関係した力学的パラメーターを示し, 固有振動数に対するパラメーターの影響を明らかにした。本研究で得られた結論は以下のとおりである。

(1) 一般に吊橋の耐風設計において対象となる低次の振動に対しては, 吊構造のせん断変形の影響は僅少であるが, 耐震設計において対象となる固有振動数の領域に対してはせん断変形の影響は重要である。

(2) 鉛直たわみ振動に対する補剛トラスのせん断変形の影響, 水平横たわみ振動に対する横構のせん断変形の影響およびねじり振動に対する構面の 2 次せん断変形の影響はそれぞれパラメーター  $P_3'$ ,  $P_8'$  および  $P_{20}$  によって直接評価することができる。これらのパラメーターが 0.01 を越える振動数に対するせん断変形の影響が顕著になる。

(3) 吊構造のせん断変形が振動モードに与える影響は僅少である。

本論文ではせん断変形の影響のパラメーター

解析に主眼を置いているので、吊構造の各種剛性や死荷重はスパン方向に一定として基礎方程式を Galerkin 法によって解いた。

変断面の効果、塔の剛性、センタータイの効果、床組・床版の合成効果などを実橋の設計に適用する場合に考慮することが重要であるのは申すまでもない。そのためには本文で示した各振動方程式、あるいはその変位自由度に対応する吊橋専用の有限要素の剛性マトリックスおよび質量マトリックスを作成することが目的になっている<sup>16)</sup>。

対傾構のせん断変形はともかく、その他の構面のせん断変形を考慮しても、これまでに一般に用いられてきたせん断変形を無視した慣用的方法に対して、新たな変位自由度の追加を要求するものではなく、動的解析における計算効率を劣化させることはない。吊橋の地震応答における吊構造各構面のせん断変形の影響については、稿を改めて報告する予定である。

#### 参考文献

- 1) Melan, J.: Theorie der eisernen Bogenbrücken und Hängebrücken, Handbuch der Ingenieurwissenschaften, 1888.
- 2) Moisseiff, L.S. and F. Lienhard: Suspension bridges under the action of lateral force, Proc. ASCE, Vol. 58, 1932.
- 3) 小西一郎・山田善一・高岡宣善: 長大つり橋の地震応答と耐震設計法に関する研究, 土木学会論文集, No. 159, 1968.
- 4) 青柳史郎: 地震動の位相差を考慮した長大吊橋の地震応答について, 土木学会論文報告集, No. 190, 1971.
- 5) 上原七司: 吊橋の振動解析に関する計算法的考察, 土木学会論文報告集, No. 235, 1975.
- 6) 林有一郎・村田正信: 変形法による吊橋のねじり振動解析(英文), 土木学会論文報告集, No. 258, 1977.
- 7) Abdel-Ghaffar, A.M.: Free lateral vibration of suspension bridges, Proc. ASCE, Vol. 104, ST 3, 1978.
- 8) Abdel-Ghaffar, A.M.: Free torsional vibration of suspension bridges, Proc. ASCE, Vol. 105, ST 4, 1979.
- 9) Abdel-Ghaffar, A.M.: Vertical vibration analysis of suspension bridges, Proc. ASCE, Vol. 106, ST 10, 1980.
- 10) Abdel-Ghaffar, A.M. and G.W. Housner: Ambient vibration tests of suspension bridges, Proc. ASCE, Vol. 104, EM 5, 1978.
- 11) 平井 敦: 鋼橋 Ⅲ, 第9章5節 横たわみ振動, 技報堂, 1967.
- 12) Bleich, F., et al.: The mathematical theory of vibration in suspension bridges, U.S. Government Printing Office, Washington D.C., 1950.
- 13) 小松定夫・西村宣男: 吊構造の横断面変形を考慮した吊橋の立体解析, 土木学会論文報告集, No. 236, 1975.
- 14) Komatsu, S. and N. Nishimura: Effects of shear deformation on vertical and horizontal bending in suspension bridges, Tech. Rept. of Osaka Univ., Vol. 26, 1976.
- 15) 小松定夫・西村宣男: 横荷重を受ける吊橋の変形と応力について, 土木学会論文報告集, No. 248, 1976.
- 16) 小松定夫・西村宣男: ブロック剛性マトリックス法による吊橋のねじり解析, 土木学会第30回年次学術講演会講演概要集, I-197, 1975.
- 17) 小松定夫・西村宣男: 平行弦トラス橋の立体振動特性について, 土木学会論文報告集, No. 298, 1980.
- 18) 建設省土木研究所: 関門橋振動試験報告書, 土木研究所資料 931号, 1974.

(1981.6.15・受付)