

多柱基礎の群杭効果に及ぼす頂板の回転の影響

INFLUENCE OF ROCKING OF PILE CAP ON GROUP EFFECT OF PILES-GROUP FOUNDATION

小坪 清真*・高西 照彦**・梶野 憲***

By Seima KOTSUBO, Teruhiko TAKANISHI and Kenichi KAJINO

1. まえがき

著者らは前論¹⁾において、多柱基礎の横方向荷重分担率と群杭効果を求める解析理論を導き、同時に実験を行って、理論の妥当性を検証した。しかし、前論¹⁾においては、多柱基礎の頂板は水平方向にのみ変位を行い、回転は生じない（すなわち、柱の中心軸方向の伸縮変形は生じない）との仮定がなされていた。多柱基礎上に構築された構造物が、地震や風等の外力を受けた場合、多柱基礎の頂板には、一般に水平力と回転モーメントが作用し、頂板は水平変位と同時に回転運動を生ずる。したがって、柱には曲げ変形と軸方向の伸縮とが生ずることになる。本論は、頂板の回転運動に対しても、水平変位の場合と同様にその群杭効果を考慮して、多柱基礎がその天端に水平力と回転モーメントを受けて、水平ならびに回転変位を行う場合の群杭効果を求める解析理論について述べ、さらに実験を行い、本理論の妥当性を検証し、最後に群杭効果に関する一計算例を示したものである。

2. 解析理論およびその基本的な考え方

上層地盤中に根入れされた単円柱が、その柱頭に水平力あるいは回転モーメント等の外力を受けて変位する場合、一般に周辺地盤の土粒子は、水平および鉛直方向の変位を生ずる。このような土粒子の3次元な運動を解析的に厳密に求めることは非常に困難である。そこで本論では、次の「(1) 解析上の仮定」中で述べるような仮定を採用することにした。

このように考えれば、3次元弾性論に従って、ロッキングを考慮した多柱基礎の群杭効果を求める解析理論を

容易に導くことができる。

(1) 解析上の仮定

多柱基礎-地盤系の弾性変形を3次元連続弾性体理論を用いて解析するに際して採用した仮定は、前論¹⁾の2. (1) (i)~(v) に示した条件に加えて、次の2つである。すなわち、円柱の鉛直方向の変位に対しては、(i) 上層地盤における水平変位成分は、鉛直変位成分に比べて小さいとしてこれを無視する。(ii) 地表面において、鉛直応力のみが零となる解を導く。

(2) 上層地盤の弾性変形曲線

図-1 に示すような上層地盤に対する弾性方程式は、 i 柱の中心を原点とする円柱座標を用いれば次のように表わせる。ここでは、上層地盤の水平方向変位に関してはすでに前論¹⁾(式(1)~(11) 参照) で詳論したのでそれは省略し、鉛直方向変位についてのみ示すことにする。

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial w_i}{\partial r_i} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2 w_i}{\partial z_i^2} + \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta_i^2} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 w_i は地盤の z 方向変位である。なお、本論に

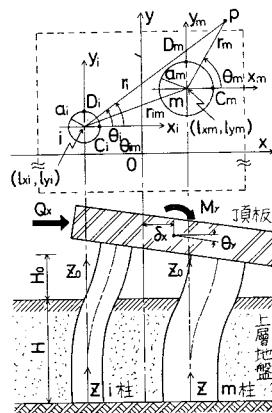


図-1 多柱基礎-地盤系

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学科
** 正会員 工博 九州工業大学助教授 開発土木工学科
*** 工修 旭化成(株)

おいては、 λ, μ 等前論¹⁾とまったく同じ記号を用いた場合には、その定義を省略することにする。

地表面で鉛直応力 $\sigma_z=0$ となる解は、 i 柱を基準にとつて表わせば、次式のように書くことができる。

$$\begin{aligned} w_p &= w_{pi} + \sum_{m \neq i}^N w_{pm} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1,3,\dots} K_n(k\eta_i^* \eta_i^*) \{ {}_k A_i^* \cos n\theta_i \\ &\quad + {}_k B_i^* \sin n\theta_i \} \sin(k\pi z/2H) \\ &\quad + \sum_{m \neq i}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1,3,\dots} K_n(k\eta_m^* \eta_m^*) \\ &\quad \cdot \{ {}_k A_m^* \cos n\theta_m + {}_k B_m^* \sin n\theta_m \} \sin(k\pi z/2H) \\ &\quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここに、 ${}_k A_i^*, {}_k B_i^*$ 等は境界条件によって定まる定数である。また、

$$k\eta_i^* = \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)} {}_k \phi_i \dots\dots\dots (3)$$

式 (2) については、前論¹⁾で述べたとまったく同じ理由から、本論では $n=0$ の場合のみを採用した。

(3) 柱に作用する土圧

柱の水平変位に対する土圧式については前論¹⁾ (式 (12)~(23) 参照) に示したので、本論では鉛直方向の土圧式についてのみ示す。

i 柱の単位長さ当たりに作用する z 方向の土圧は

$$\begin{aligned} P_i^z(z) &= \int_{-\pi}^{\pi} \tau_{zr} \Big|_{r=a_i} \cdot a_i d\theta_i = \mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial w_p}{\partial r_i} \Big|_{r_i=a_i} \cdot a_i d\theta_i \\ &= -2\pi\mu k\eta_i^* \{ \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} {}_k A_i^* K_1(k\eta_i^*) \sin(k\pi z/2H) \\ &\quad - \sum_{m \neq i}^N \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} {}_k A_m^* K_0(k\eta_i^* \eta_m^*) \\ &\quad \cdot I_1(k\eta_i^*) \sin(k\pi z/2H) \} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

(4) 柱の弾性変形曲線

ここでも鉛直方向の変形のみについて示せば次のとおりである。それぞれ地中部 ($0 \leq z \leq H$) と空中部²⁾ ($0 \leq z_0 \leq H_0$) において柱の変形の微分方程式は

$$E_i A_i \frac{d^2}{dz^2} \{ \bar{\xi}_i^z(z) \} + P_i^z(z) = 0, \quad (0 \leq z \leq H) \dots\dots\dots (5)$$

$$E_i A_i \frac{d^2}{dz_0^2} \{ \bar{\xi}_i^z(z_0) \} = 0, \quad (0 \leq z_0 \leq H_0), \quad (i=1, 2, \dots, N) \dots\dots (6)$$

と表わされる。ここに、 A_i は i 柱の断面積である。

式 (5), (6) の一般解をそれぞれ $i=1, 2, \dots, N$ について求め、それを行列表示すれば次式が得られる。

$$\bar{\xi}^z(z) = (z/H) \bar{C}^z + \bar{D}^z + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} {}_k Y^z \sin(k\pi z/2H) \dots\dots\dots (7)$$

$$\bar{\xi}^z(z_0) = (z_0/H_0) \bar{C}^z + \bar{D}^z \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 \bar{C}^z, \bar{D}^z は $\bar{\xi}_i^z, \bar{\xi}_i^z$ ($i=1, 2, \dots, N$) からなる列ベクトル、 $\bar{C}^z, \bar{D}^z, \bar{C}^z, \bar{D}^z, {}_k Y^z$ はそれぞれ未定係数 $\bar{C}_i^z, \bar{D}_i^z, \bar{C}_i^z, \bar{D}_i^z, {}_k Y_i^z$ ($i=1, 2, \dots, N$) から構成される列ベクトルである。

いま、式 (7) は式 (5) を満足しなければならないか

ら式 (7) を式 (4) とともに式 (5) に代入して整理し、それを行列表示すれば次式に示すような関係式が得られる。

$${}_k Y^z + {}_k F^z {}_k A^z = 0 \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 ${}_k A^z$ は ${}_k A_i^z$ ($i=1, 2, \dots, N$) からなる列ベクトルを表わす。また、 ${}_k F^z$ はその要素が $i=m$ のとき ${}_k f_{ii}^z = \alpha_i^z k^{-1} K_1(k\eta_i^*)$, $i \neq m$ のとき ${}_k f_{im}^z = -\alpha_i^z k^{-1} K_0(k\eta_i^* \eta_m^*) \cdot I_1(k\eta_i^*)$ であるような $N \times N$ 行列である。ここで、 α_i^z は

$$\alpha_i^z = \pi \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \left(\frac{d_i}{H} \right) r_{ai}^2 \alpha_i, \quad r_{ai} = \frac{1}{a_i} \sqrt{\frac{I_i}{A_i}} \dots\dots\dots (10)$$

なお、水平方向の変形について得られた関係式は、前論¹⁾の式 (24)~(36) に示されている。

(5) 地中部における柱と地盤との間の連続の条件

水平方向の変形に関して得られた関係式は、前論¹⁾の式 (37)~(57) に示されている。鉛直方向の変形に関しても、水平方向の場合とまったく同様に考えて、 i 柱について、柱と地盤との間に成り立つ連続の条件は、次のように書くことができる。すなわち式 (2) と式 (7) から

$$w_{pi}(r_i=a_i) + \sum_{m \neq i}^N w_{pm}(r_i=a_i, r_m=r_{im}) = \bar{\xi}_i^z(z) \dots\dots\dots (11)$$

上記の関係式を各柱について求めて、それを行列表示すれば、次式を得る。

$${}_k G^z {}_k A^z = {}_k \bar{r}^z \bar{C}^z + {}_k \delta \bar{D}^z + {}_k Y^z \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 ${}_k G^z$ は $i=m$ のとき ${}_k g_{ii}^z = K_0(k\eta_i^*)$, $i \neq m$ のとき ${}_k g_{im}^z = K_0(k\eta_i^* \eta_m^*)$ をその要素とするような $N \times N$ 行列である。

さて、ここで、式 (9) と式 (12) より ${}_k A^z$ および ${}_k Y^z$ を求めれば、次式を得る。

$${}_k Y^z = -{}_k M^z \{ {}_k \bar{r}^z \bar{C}^z + {}_k \delta \bar{D}^z \} \dots\dots\dots (13)$$

$${}_k A^z = ({}_k F^z + {}_k G^z)^{-1} \{ {}_k \bar{r}^z \bar{C}^z + {}_k \delta \bar{D}^z \} \dots\dots\dots (14)$$

ここに、

$${}_k M^z = {}_k F^z ({}_k F^z + {}_k G^z)^{-1} \dots\dots\dots (15)$$

である。式 (13), (14) から ${}_k A^z, {}_k Y^z$ はいずれも \bar{C}^z, \bar{D}^z で表わすことができることがわかる。

(6) 柱に関する境界条件

各柱の水平方向および鉛直方向の弾性変形曲線 (水平方向については前論¹⁾の式 (55), (56), 鉛直方向は式 (7), (8)) を表わす式を用いれば、多柱基礎を構成する各柱に関する境界条件は以下のように表示することができる。

a) 柱下端 ($z=0$) において

(i) 固定の場合 水平方向については変位およびたわみ角が零、鉛直方向については変位が零であるから

$$\bar{D} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$\bar{C} + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (k\pi/2)_k Y = 0 \dots\dots\dots (17)$$

$$\bar{D}^z = 0 \dots\dots\dots (18)$$

(ii) ヒンジの場合 水平方向については変位および曲げモーメントが零、鉛直方向については変位が零であるから

$$\bar{D} = 0, \bar{B} = 0, \bar{D}^z = 0 \dots\dots\dots (19), (20), (21)$$

b) 地表面 ($z=H, z_0=0$) において

地表面においては、地中部分の柱と空中部分の柱とが変位および内力において連続の条件を満足しなければならないから

$$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{(k-1)/2} {}_k Y = \bar{D} \dots\dots\dots (22)$$

$$(H_0/H) (3\bar{A} + 2\bar{B} + \bar{C}) = \bar{C} \dots\dots\dots (23)$$

$$(H_0/H)^2 (6\bar{A} + 2\bar{B} - \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{(k-1)/2} (k\pi/2)_k Y) = 2\bar{B} \dots\dots\dots (24)$$

$$(H_0/H)^3 \bar{A} = A \dots\dots\dots (25)$$

$$\bar{C}^z + \bar{D}^z + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{(k-1)/2} {}_k Y^z = \bar{D}^z \dots\dots\dots (26)$$

$$(H_0/H) \bar{C}^z = \bar{C}^z \dots\dots\dots (27)$$

c) 柱上端 ($z_0=H_0$) において

いま、図-1 に示すように、頂板が x 方向および y 軸まわりのみにそれぞれ δ_x および θ_y の変位を生ずるように、頂板に水平荷重 Q_x およびモーメント荷重 M_y を作用させる場合を考える。後で用いるために E_A をその対角要素が $E_i A_i$ ($i=1, 2, \dots, N$) であるような $N \times N$ の対角行列、 L_x を l_{xi} ($i=1, 2, \dots, N$) からなる列ベクトルと定義しておく。ここに、 l_{xi} は 図-1 に示すように、 i 柱の中心軸の x 座標値である。

柱上端における境界条件は次のように表わせる。

(i) 回転拘束の場合 各柱の x 方向水平変位は δ_x 、 y 方向のそれは零であり、 y 軸まわりの回転角は θ_y 、 x 軸まわりのそれは零である。また、鉛直方向の柱の変位は、たとえば i 柱については $\theta_y l_{xi}$ である。したがって、次式が成り立つ。

$$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} = \delta_x I_1 \dots\dots\dots (28)$$

$$3\bar{A} + 2\bar{B} + \bar{C} = \theta_y H_0 I_1 \dots\dots\dots (29)$$

$$\bar{C}^z + \bar{D}^z = \theta_y L_x \dots\dots\dots (30)$$

$$M_y = H_0 L_x^T E_A \bar{C}^z - 2 I_1^T E_I (3\bar{A} + \bar{B}) \dots\dots\dots (31)$$

$$Q_x = -(6/H^3) I_1^T E_I \bar{A} \dots\dots\dots (32)$$

(ii) 回転自由の場合 各柱の x 方向変位は δ_x 、 y 方向は零であり、各柱の柱頭の曲げモーメントはすべて零である。また、鉛直方向の柱の変位は、たとえば i 柱については $\theta_y l_{xi}$ である。したがって次式が成り立つ。

$$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} = \delta_x I_1 \dots\dots\dots (33)$$

$$6\bar{A} + 2\bar{B} = 0 \dots\dots\dots (34)$$

$$\bar{C}^z + \bar{D}^z = \theta_y L_x \dots\dots\dots (35)$$

$$M_y = H_0 L_x^T E_A \bar{C}^z \dots\dots\dots (36)$$

$$Q_x = -(6/H^3) I_1^T E_I \bar{A} \dots\dots\dots (37)$$

(7) 群杭効果

式 (13) および前論¹⁾の式 (53) を用いて、前項 (6) で得られた各条件式から ${}_k Y^z$ および ${}_k Y$ を消去し、さらに式 (22)~(27) を用いて式 (28)~(32) あるいは式 (33)~(37) より $\bar{A} \sim \bar{D}$ 、 \bar{C}^z 、 \bar{D}^z を消去すれば、 $\bar{A} \sim \bar{D}$ 、 \bar{C}^z 、 \bar{D}^z 、 δ_x 、 θ_y のみを未知数として含む連立方程式が得られる。したがって、これを解けば、多柱基礎および周辺地盤の弾性変形を定めることができる。実際の数値計算にあたっては、多少の工夫をすることによって、未知数の数を少なくすることができて、結局たかだか \bar{A} に関する $2N$ 元の連立方程式と \bar{D}^z に関する N 元の連立方程式を解くだけでよいことになる。

各柱の柱上端のせん断力および曲げモーメントは、前論¹⁾の式 (56) から次式によって求められる。

$$Q = -(6/H^3) E_I \bar{A} \dots\dots\dots (38)$$

$$M = -(1/H_0^2) E_I (6\bar{A} + 2\bar{B}) \dots\dots\dots (39)$$

ここに、 M_i^x 、 M_i^y をそれぞれ i 柱の上端における y 軸および x 軸まわりの曲げモーメントとすれば、 M は M_i^x 、 M_i^y ($i=1, 2, \dots, N$) からなる列ベクトルを表わす。さらに、 N_i を i 柱の軸力とすれば、各柱の柱上端における軸力は式 (8) より次式によって得られる。

$$N = (1/H_0) E_A \bar{C}^z \dots\dots\dots (40)$$

ここに、 $N = (N_1, N_2, \dots, N_N)^T$ である。

さて、いま上記の多柱基礎について、周辺地盤と各柱との間に生ずる相互作用をまったく考慮しない場合に対して、その弾性変形を計算し、このようにして得られた値にはすべて下付添字 0 をつけて表わすことにすれば、多柱基礎に対する水平方向 (x 方向) の群杭効果は

$${}_0 e_N^x = \delta_{x0} / \delta_x \dots\dots\dots (41)$$

回転に関する (y 軸まわり) の群杭効果は

$${}_0 e_N^y = \theta_{y0} / \theta_y \dots\dots\dots (42)$$

によって与えられる。また、各柱の軸力によるモーメントの総和に対する各柱の柱頭の曲げモーメントの総和の比は

$$\sum_{i=1}^N M_i^y / \sum_{i=1}^N N_i l_{xi} = -2 I_1^T E_I (3\bar{A} + \bar{B}) / (H_0 L_x^T E_A \bar{C}^z) \dots\dots\dots (43)$$

と表わせる。

3. 模型実験および実験値と理論値との比較

2. で述べた理論の妥当性を検証するために、図-2 に

示すような装置²⁾を用いて実験を行った。すなわち、振動台上に載せた1.5m×2.5m×1m(深さ)の鋼製箱の中に、深さ58.5cmまで乾燥砂を入れて、多柱基礎模型を建て込み、柱頭に水平荷重を加えて、そのとき加えた水平荷重、柱頭の水平および鉛直変位を計測した。

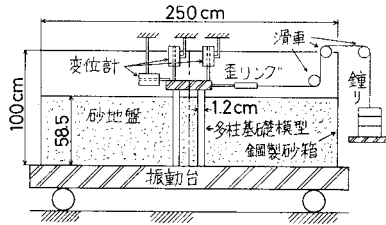


図-2 実験装置

実験は、柱頭を完全回転拘束の状態にして、2, 4, 9本柱の3通りの場合について、それぞれ柱間隔をいろいろ変えて、柱頭荷重-柱頭水平変位曲線および鉛直変位曲線を求めた。模型としてはベークライトチューブを用いた。柱の断面形状は円形で、外径12mm、肉厚2mm、長さ60cmである。したがって、柱の地中部は58.5cm、空中部は1.5cmとなる。柱の曲げ剛性は $1.45 \times 10^4 \text{ kgf} \cdot \text{cm}^2$ ($14.2 \text{ N} \cdot \text{m}^2$)である。なお砂地盤の平均のせん断弾性係数は $\mu = 20 \text{ kgf/cm}^2$ (1.96 MN/m^2)であった。

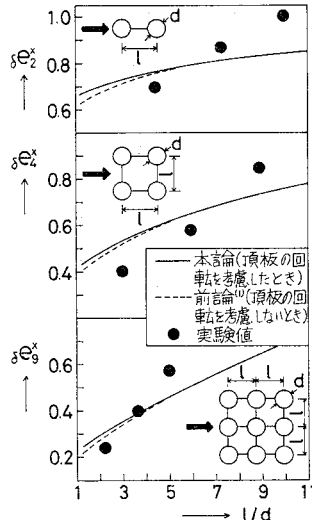


図-3 群杭効果(理論値と実験値との比較)

図-3は多柱基礎模型に対する群杭効果の実験値と理論値とを示したものである。図中、実線は柱の鉛直変位を考慮した本論による理論値を、点線は前論¹⁾のそれを示す。両者の値は l/d が小さいときに多少の差が生じている。理論値と実験値とを比較すれば、いずれの場合にも両者の定性的な傾向は比較的良好一致しているといえよう。

図-4は多柱基礎模型が水平荷重を受けたときの各柱の鉛直変位による頂板の回転角の実測値と本論による理論値とを示したものである。理論値の方が実験値に比べて多少小さいが、この場合についても両者の定性的な傾向は比較的良好一致しているといえよう。

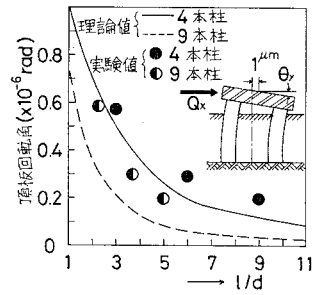


図-4 一定の水平変位(1 μm)に対する頂板の回転角

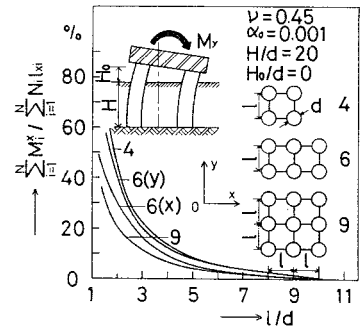


図-5 軸力による回転モーメントに対する柱頭曲げモーメントの比(柱頭回転拘束, 下端固定の場合)

化するかを示したものである。同図より、柱頭曲げモーメントは軸力による回転モーメントに比較して、それが群杭効果に及ぼす影響は、 l/d の増加とともに急速に減少することがわかる。

以上のことから、次のような結果が得られた。

- (1) 本論による解析結果は多柱基礎模型による実験結果とその定性的な傾向は比較的良好一致を示す。
- (2) 本論によれば、軸力による回転モーメントと柱頭曲げモーメントが、群杭効果に及ぼす影響を定量的に見積ることができる。

4. 数値計算結果ならびに結論

本論による数値計算結果の一例を図-5に示す。同図は多柱基礎がその頂板にモーメント荷重を受けたときの軸力による回転モーメントの総和に対する各柱の柱頭曲げモーメントの総和の比が、 l/d によってどのように変

参考文献

- 1) 小坪清真・高西照彦・鳥野清・園田敏久：多柱基礎の横方向荷重分担率と群杭効果，土木学会論文報告集，No. 312，1981年8月。
- 2) 小坪清真・高西照彦・河島正治：横方向群杭効果に関する模型実験，土木学会論文報告集(研究ノート)，第248号，1976年4月。

(1981.6.13・受付)