

円弧の組合せよりなる中空断面をもつ地中埋設物の解析

ANALYSIS OF THE UNDERGROUND STRUCTURES COMPOSED OF
CIRCULAR RING SEGMENTS

白 木 恒 雄*

By Tsuneo USUKI

1. ま え が き

地中に埋設された中空断面をもつ構造物の種類は多い。小は上下水道用の管路から、大はシールドトンネル、山岳トンネルなどがあり、土木構造物としての利用価値は高い。

これらの構造物に作用する荷重としては、主働土圧的外力、受働土圧的反力、水圧、さらに地上の上載荷重などがある。また、この構造物には、断面内輪郭線方向に大きな軸圧縮力を発生するため、変形によって生ずる二次のモーメント、初期不整、軸方向ひずみの影響なども考える必要がある。さらに、村上・小泉¹⁾が指摘するように、受働土圧的反力も、法線方向のみならず、接線方向にも考えた方が現実の挙動にふさわしい。

しかし、これらの外力や変形をすべて考慮すると、従来の単純な応力法や変形法による解析では無理がある。

部分的に弾性支持された円形リングの二次の応力問題や初期不整の影響を最初に取り上げたのは Windels⁴⁾ である。それを電子計算機に扱いやすい形に改良したのが Hain and Horst¹⁰⁾ の論文である。その論文¹⁰⁾ では、リングのたわみに関する 6 階の常微分方程式から一般解を求め、積分定数をそれぞれの区間の端点での状態量の連続条件から決定するという手法を用いた。

しかし、この論文では、微分方程式の係数や非同次項(すなわち荷重項)が複雑になりすぎため、途中で円弧部材の接線方向の地盤反力係数を零とおいて計算を行っている。また、この解法では、特解を求める計算も荷重を厳密に考えるほど複雑となり、解析法として適切とはいえない。

この解法に対し、伝達マトリックス法^{2),9)}は微分方程式の係数の複雑さにほとんど影響されずに解を与えるこ

とができる。また、この方法は小さな次数のマトリックスの乗算の繰り返しを演算の主体としているため、比較的短い時間で処理することが可能である。

以上のごとき利点を有するにもかかわらず、この種の複雑な問題の解を伝達マトリックス法で求めた例は、著者の知る限りではない。その理由は、おそらく、従来の理論が弾性関係式をあいまいに扱ったためと思われる。たとえば、上述の Windels⁴⁾ および Hain and Horst¹⁰⁾ の論文においては、弾性関係式を唐突に Flügge¹⁾ の円筒殻の理論から借用しているため、理論の流れが一貫性を欠き、たわみ角の定義も明確に与えられていない。

以上の点を鑑み、本論文では厳密な弾性関係式を求め、それに伝達マトリックス法を適用して解を得た。

演算の出発時には部分弾性床領域および軸力の値が未知のため、適当にこれらの領域および軸力値を仮定して第 1 回目の計算を行う。これから求めた部分弾性床領域および軸力値を用いて第 2 回目の計算を行う。以上の計算を何回か繰返し解が一定の値に収束するまで行う。

この種の複雑な係数をもつ微分方程式から格間伝達マトリックスを求める場合、2 通りの方法が考えられる。

一つは状態量に関する連立 1 階常微分方程式を求め、その係数マトリックスの固有値解析より格間伝達マトリックスを求める方法¹¹⁾ である。他の一つは、 n 階の常微分方程式を求め、その一般解から積分定数を消去して左右端の状態量の伝達関係式を求める方法¹²⁾ である。

両方の方法の得失を判定するため、著者はいくつかの問題にこれらの 2 通りの方法を適用して解析を行った。その結果、以下のことがわかった。固有値解析による方法は、適切な固有値解析のサブルーチンさえ用いれば、理論的にもプログラムのにも単純、明解である。しかし、標準的な Double QR 法のプログラム³⁾を用いても、後者の方法に比べ、約 10 倍の演算時間を要し、また、構造系の壁厚がある値を超すと解が収束しないという数値不安定現象を呈した。したがって、著者は、この

* 正会員 Dr.-Ing. 工博 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科

種の構造系の問題を解くには、後者の方法の方がふさわしいという結論に達した。

したがって、本論文では後者の方法で格間伝達マトリックスを求めた。そのため、用いるマトリックスやベクトルの種類が前者の方法に比べやや多くなり、多少、式が繁雑となる。そこで、演算時間の短縮化のために、必要とされる逆マトリックスの計算も手計算で得られた値を表示した。

なお、本論文以外の構造系で同様の6階の常微分方程式に帰着される問題には、これらのマトリックスを使用して同じように解くことが可能である。

2. 仮 定

本論文で用いられた仮定は以下のごとくなる。

- (1) 構造部材は弾性体とし、Hooke 則が成り立つ。
- (2) 部材の壁厚中心線は円弧曲線のみからなる。
- (3) 壁厚 t は円弧の半径 r に比して相対的に小さいとする。
- (4) 変形は線形理論が適用される程度に微小とする。
- (5) 初期不整量は弾性たわみ量に比例する形で考慮する。
- (6) 二次の応力理論 (Theorie II. Ordnung) を用いて変形後のつり合いを考慮する。ただし、発生する軸力 N は区分的に一定とみなして、線形理論化する。
- (7) 扱う構造系の形と外荷重の状態から、平面ひずみ問題とみなし、単位幅のトンネルリングを切り出して考える。
- (8) 円周方向の伸縮ひずみは考慮する。
- (9) リング断面内のせん断ひずみは無視する。
- (10) Winkler の仮定を用いて、法線方向および接線方向の地盤反力を考慮する。ただし、管壁のたわみが中空断面内部に向かうとき、その場所の地盤反力作用は働かないとする。
- (11) 地表面は水平とする。また、上載荷重 p_0 は一定とする。

構造物全体の座標系および外荷重を図-1に与える。ただし、 r_0 は土の単位体積重量、 r_c は構造材料の単位体積重量である。また、 λ は側方土圧係数で、地盤の種類によって決まる定数である。

3. 基礎理論

(1) 支配方程式の誘導

曲率半径 r の微小円弧要素を考える (図-2)。断面の中立軸より曲率の中心方向に向かう座標を n とする。こ

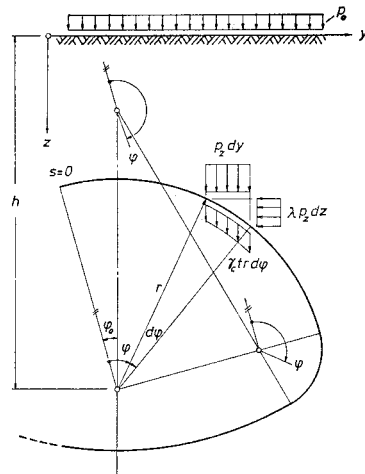


図-1 座標系と外荷重

の微小要素の半径 r が変形後に r^* に、中心角 $d\phi$ が変形後に $d(\phi + \chi)$ になったならば (図-3)、 $n=n$ の位置の軸方向ひずみ ϵ_ϕ は次式で与えられる。

$$\epsilon_\phi = \frac{(r^* - n) \cdot d(\phi + \chi) - (r - n) \cdot d\phi}{(r - n) \cdot d\phi} \dots\dots(1)$$

これから、 $n=0$ とおいて、中立軸の軸方向ひずみ ϵ_0 は

$$\epsilon_0 = \frac{r^* \cdot d(\phi + \chi) - r \cdot d\phi}{r \cdot d\phi} \dots\dots(2)$$

となる。式 (2) の両辺に r/r^* をかけ移行すると、たわみ角 χ の変化率 χ' は次のごとく表わされる。

$$\chi' = \left(\frac{r}{r^*} \right) (\epsilon_0 + 1) - 1 \dots\dots(3)$$

ただし、 $()'$ は座標 ϕ に関する微分 $d/d\phi$ を意味する。

式 (1) を変形して、式 (2)、(3) を用いると

$$\epsilon_\phi = \left(\epsilon_0 - \frac{n}{r} \chi' \right) \left(1 - \frac{n}{r} \right) \dots\dots(1)'$$

となる。ここで、 $\frac{n}{r} \ll 1$ であるから、上式は近似的に

$$\epsilon_\phi = \left(\epsilon_0 - \frac{n}{r} \chi' \right) \cdot \left(1 + \frac{n}{r} \right) \dots\dots(4)$$

と書き直せる。

中立軸の軸方向ひずみ ϵ_0 は、軸方向変位 v のひずみ成分 v'/r と半径方向の変位 w のひずみ成分 $-w/r$ の和で与えられ、

$$\epsilon_0 = \frac{1}{r} (v' - w) \dots\dots(5)$$

となる。同様に、たわみ角 χ は、半径方向変位の増分 dw の成分 w'/r と軸方向変位 v による成分 v/r の和

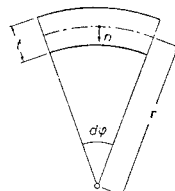


図-2 変形前の円弧要素

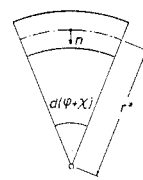


図-3 変形後の円弧要素

で与えられ、次式となる。

$$x = \frac{1}{r}(w' + v) \dots\dots\dots(6)$$

式(5)、(6)を式(4)に代入、整理すると次のごとくなる。

$$\epsilon_\psi = \frac{1}{r}(v' - w) - \frac{n}{r^2}(w'' + w) - \frac{n^2}{r^3}(w'' + v') \dots\dots\dots(7)$$

この式に平面ひずみの場合の Hooke 則を用いると、断面輪郭線方向の垂直応力は

$$\sigma_\psi = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{r}(v' - w) - \frac{n}{r^2}(w'' + w) - \frac{n^2}{r^3}(w'' + v') \right] \dots\dots\dots(8)$$

となる。ただし、 E は構造要素の縦弾性係数、 ν はポアソン比である。

軸力 N および曲げモーメント M は

$$\begin{cases} N = \int_F \sigma_\psi dF \dots\dots\dots(9\cdot a) \\ M = \int_F \sigma_\psi \cdot n dF \dots\dots\dots(9\cdot b) \end{cases}$$

と定義されるから、上式に式(8)を代入して

$$\begin{cases} N = \frac{E\tilde{F}}{r}(v' - w) - \frac{E\tilde{I}}{r^3}(w'' + v') \dots\dots(10\cdot a) \\ M = -\frac{E\tilde{I}}{r^2}(w'' + v') \dots\dots\dots(10\cdot b) \end{cases}$$

を得る。ただし、構造要素の単位幅当たりの断面積を F 、断面二次モーメントを I とするならば、

$$\begin{cases} \tilde{F} = \frac{F}{1-\nu^2} \dots\dots\dots(11\cdot a) \\ \tilde{I} = \frac{I}{1-\nu^2} \dots\dots\dots(11\cdot b) \end{cases}$$

と表わされる。また、(10・b)の曲げモーメントの式において、 $\int \frac{n^3}{r^3}(w'' + v') dF$ の項は長方形以外の断面では零とはならないが、微小として零とみなした。

次に、この円弧要素に作用する断面力と外力のつり合い条件を考える。これらの力の関係を図示すると、図-4(a)のごとくなる。それに伴い発生する変形を図-4(b)に示した。円弧要素の法線方向の地盤反力係数を C_r 、接線方向の地盤反力係数を C_t とすると、構造要素の変形方向と反対方向に受働土圧的反力 $C_r w$ 、 $C_t v$ が発生する。図-4は便宜上、すべて正の変形を対象として描いたものであるが、たわみ w が正のときは受働土圧的反力は生じないので、地盤反力係数 $C_r = C_t = 0$ となる。したがって、図中の受働土圧的反力だけは、負のたわみ w を想定して描いてある。

図-4(a)、(b)の力の成分をベクトル表示したのが図-4(c)である。この図を用いて、 p_r 方向および p_t 方向の力のつり合い条件を求め、整理すると次のごとくなる。

$$(p_r - C_r w)r + Q' + N = 0 \dots\dots\dots(12)$$

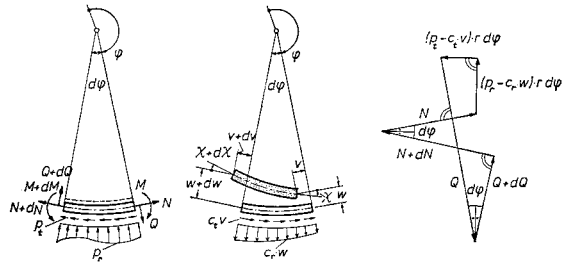


図-4 (a) 円弧要素の力のつり合い (b) 円弧要素の変形 (c) 円弧要素の力のベクトル

図-4

$$(p_t - C_t v)r + N' - Q = 0 \dots\dots\dots(13)$$

また、モーメントのつり合い条件より

$$-M' + Qr - Nw' = 0 \dots\dots\dots(14)$$

を得る。

これらの力のつり合い条件式のうち、式(13)の Nw' のみが非線形項である。これを線形化するために、軸力 N を区分的に一定な値 \bar{N} とし、最初ある値を適当に設定する。そして、それを用いて計算を行い、求めた \bar{N} 値を新しい値として再び計算を行う。以上の計算を何度か繰り返して、 \bar{N} 値が収束した時点で演算は終了する。

初期不整の影響も、式(14)中の w を用いて考慮することができる。Windels⁽⁴⁾が行ったように、初期不整による法線方向の変位の量を荷重作用による変位 w との割合 ω_v で表わすことにすれば、式(14)の w の代わりに $(1 + \omega_v)w$ と置き直すことができる。したがって、式(14)は

$$-M' + Qr - \bar{N}(1 + \omega_v)w' = 0 \dots\dots\dots(15)$$

となる。さらに、Hain and Horst⁽⁹⁾のごとく、簡略化のために新しい記号

$$\begin{cases} k = \frac{\tilde{I}}{r^2 \tilde{F}} \dots\dots\dots(16\cdot a) \\ \alpha = -(1 + \omega_v) \frac{\bar{N}}{E\tilde{F}k} \dots\dots\dots(16\cdot b) \end{cases}$$

を導入すると、式(15)は

$$-M' + Qr + E\tilde{F}k\alpha \cdot w' = 0 \dots\dots\dots(17)$$

と書き直せる。

なお、これ以降の式の誘導においては、記号 \tilde{F} 、 \tilde{I} を \sim 印を省略して F 、 I と表わすことにする。

(2) 伝達マトリックス

(1)より求めた方程式(6)、(10)、(12)、(13)、(17)から伝達マトリックスを作成する。

式(17)と式(10・b)から M を消去して

$$Q = -\left(\frac{EFk}{r}\right)(1 + \alpha)w' - \left(\frac{EFk}{r}\right)w'' \dots\dots(18)$$

を得る。式(10・a)と式(18)を式(12)、(13)に代入し、両辺に r/EF を乗じて整理すると

$$(1-k)v' - \{k[w^w + (2+\alpha)w'' + \beta_r w] + w\} + k \frac{p_r \cdot r^4}{EI} = 0 \dots\dots\dots(19)$$

$$(1-k)v'' - k\beta_r v + [k(1+\alpha) - 1]w' + k \frac{p_t \cdot r^4}{EI} = 0 \dots\dots\dots(20)$$

を得る。ただし、上式において、次式の記号を用いた。

$$\begin{cases} \beta_r = \frac{C_r r^4}{EI} \\ \beta_t = \frac{C_t r^4}{EI} \end{cases} \dots\dots\dots(21)$$

式 (19) を φ で1回微分し、式 (20) と辺々引き算を行い、移項すると次式が与えられる。

$$v = \left(\frac{\alpha + \beta_r + 1}{\beta_t}\right)w' + \left(\frac{2 + \alpha}{\beta_t}\right)w'' + \left(\frac{1}{\beta_t}\right)w^v$$

$$-\left(\frac{r^4}{\beta_t EI}\right)(p_r' - p_t) \dots\dots\dots(22)$$

式 (10・a) と式 (19) より $(1-k)v'$ の項を消去すると

$$N = \left(\frac{EFk}{r}\right)\beta_r w + \left(\frac{EFk}{r}\right)(1+\alpha)w'' + \left(\frac{EFk}{r}\right)w^w - p_r \cdot r \dots\dots\dots(23)$$

となる。また、式 (6) の v に式 (22) を代入して

$$\chi = \left(\frac{\alpha + \beta_r + \beta_t + 1}{\beta_t r}\right)w' + \left(\frac{2 + \alpha}{\beta_t r}\right)w'' + \left(\frac{1}{\beta_t r}\right)w^v - \left(\frac{r^3}{\beta_t EI}\right)(p_r' - p_t) \dots\dots(24)$$

を得る。

以上より、式 (10・b), (18), (22), (23), (24) をまとめてマトリックス表示すると次のごとくなる。

$$\begin{bmatrix} v \\ N \\ w \\ \chi \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha + \beta_r + 1}{\beta_t} & 0 & \frac{2 + \alpha}{\beta_t} & 0 & \frac{1}{\beta_t} \\ \frac{EFk\beta_r}{r} & 0 & \frac{EFk}{r}(1 + \alpha) & 0 & \frac{EFk}{r} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha + \beta_r + \beta_t + 1}{\beta_t r} & 0 & \frac{2 + \alpha}{\beta_t r} & 0 & \frac{1}{\beta_t r} \\ -\frac{EI}{r^2} & 0 & -\frac{EI}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EFk}{r}(1 + \alpha) & 0 & -\frac{EFk}{r} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w' \\ w'' \\ w''' \\ w^v \\ w^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\left(\frac{r^4}{\beta_t EI}\right)(p_r' - p_t) \\ -p_r \cdot r \\ 0 \\ -\left(\frac{r^3}{\beta_t EI}\right)(p_r' - p_t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(25)$$

または、簡単に

$$z = A \cdot w + p(\varphi) \dots\dots\dots(25)'$$

と書ける。この z を“状態量ベクトル”とよぶ。

式 (19), (20) より v の項を消去して、 w と外荷重項のみの微分方程式を作ると次のごとくなる。

$$w^vi + \left[(2 + \alpha) - \left(\frac{k\beta_t}{1-k}\right) \right] w^iv + \left[(1 + \alpha + \beta_r) - \left(\frac{k\beta_t}{1-k}\right)(2 + \alpha) \right] w'' - \left(\frac{k\beta_t}{1-k}\right) \left(\beta_r + \frac{1}{k} \right) w = f(\varphi) \dots\dots\dots(26)$$

ただし、

$$f(\varphi) = \left(\frac{r^4}{EI}\right) \left[p_r'' - p_t' - \left(\frac{k\beta_t}{1-k}\right) p_r \right] \dots\dots(27)$$

である。

この6階の常微分方程式の特性方程式の根は

$$\pm \lambda_1 \pm \lambda_2 i, \pm \lambda_3 \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ は実数})$$

で与えられるから、結局、式 (26) の一般解は次のごと

$$\begin{cases} K_1 = \frac{\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2 - \lambda_3^2)}{[2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4 + 2\lambda_1^2\lambda_2^2 + 2\lambda_2^2\lambda_3^2 - 2\lambda_3^2\lambda_1^2)]} \\ K_2 = \frac{\lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)}{[2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4 + 2\lambda_1^2\lambda_2^2 + 2\lambda_2^2\lambda_3^2 - 2\lambda_3^2\lambda_1^2)]} \end{cases} \dots\dots\dots(31)$$

くなる。

$$w(\varphi) = C_1 \cdot \phi_1(\varphi) + C_2 \cdot \phi_2(\varphi) + C_3 \cdot \phi_3(\varphi) + C_4 \cdot \phi_4(\varphi) + C_5 \cdot \phi_5(\varphi) + C_6 \cdot \phi_6(\varphi) + F_P(\varphi) \dots\dots\dots(28)$$

ここで、 $F_P(\varphi)$ は特解、 $C_1 \sim C_6$ は積分定数である。そして、

$$\begin{cases} \phi_1(\varphi) = \sinh \lambda_1 \varphi \cdot \sin \lambda_2 \varphi \\ \phi_2(\varphi) = \cosh \lambda_1 \varphi \cdot \cos \lambda_2 \varphi \\ \phi_3(\varphi) = \sinh \lambda_1 \varphi \cdot \cos \lambda_2 \varphi \\ \phi_4(\varphi) = \cosh \lambda_1 \varphi \cdot \sin \lambda_2 \varphi \\ \phi_5(\varphi) = \sinh \lambda_3 \varphi \\ \phi_6(\varphi) = \cosh \lambda_3 \varphi \end{cases} \dots\dots\dots(29)$$

$$F_P(\varphi) = K_1[-\phi_1(\varphi) \cdot F_3(\varphi) - \phi_2(\varphi) \cdot F_4(\varphi) + \phi_3(\varphi) \cdot F_1(\varphi) + \phi_4(\varphi) \cdot F_2(\varphi)] + K_2[-\phi_1(\varphi) \cdot F_4(\varphi) + \phi_2(\varphi) \cdot F_3(\varphi) - \phi_3(\varphi) \cdot F_2(\varphi) + \phi_4(\varphi) \cdot F_1(\varphi)] + K_3[\phi_5(\varphi) \cdot F_6(\varphi) - \phi_6(\varphi) \cdot F_5(\varphi)] \dots\dots\dots(30)$$

$$\begin{cases}
 K_3 = \frac{1}{[\lambda_3(\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4 + 2\lambda_1^2\lambda_2^2 + 2\lambda_2^2\lambda_3^2 - 2\lambda_3^2\lambda_1^2)]} \\
 \begin{cases}
 F_1(\varphi) = \int_0^\varphi f(x) \cdot \phi_1(x) dx, & F_2(\varphi) = \int_0^\varphi f(x) \cdot \phi_2(x) dx, & F_3(\varphi) = \int_0^\varphi f(x) \cdot \phi_3(x) dx \\
 F_4(\varphi) = \int_0^\varphi f(x) \cdot \phi_4(x) dx, & F_5(\varphi) = \int_0^\varphi f(x) \cdot \phi_5(x) dx, & F_6(\varphi) = \int_0^\varphi f(x) \cdot \phi_6(x) dx
 \end{cases}
 \end{cases} \dots\dots\dots (32)$$

である。一般解の式 (28) を 1 回から 5 回まで φ で順次微分した式を求め、マトリックス表示すると、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} w \\ w' \\ w'' \\ w''' \\ w^{IV} \\ w^V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 & \phi_5 & \phi_6 \\ A_1\phi_4 + B_1\phi_3 & A_1\phi_3 - B_1\phi_4 & A_1\phi_2 - B_1\phi_1 & A_1\phi_1 + B_1\phi_2 & \lambda_3\phi_6 & \lambda_3\phi_5 \\ A_2\phi_1 + B_2\phi_2 & A_2\phi_2 - B_2\phi_1 & A_2\phi_3 - B_2\phi_4 & A_2\phi_4 + B_2\phi_3 & \lambda_3^2\phi_5 & \lambda_3^2\phi_6 \\ A_3\phi_4 + B_3\phi_3 & A_3\phi_3 - B_3\phi_4 & A_3\phi_2 - B_3\phi_1 & A_3\phi_1 + B_3\phi_2 & \lambda_3^3\phi_6 & \lambda_3^3\phi_5 \\ A_4\phi_1 + B_4\phi_2 & A_4\phi_2 - B_4\phi_1 & A_4\phi_3 - B_4\phi_4 & A_4\phi_4 + B_4\phi_3 & \lambda_3^4\phi_5 & \lambda_3^4\phi_6 \\ A_5\phi_4 + B_5\phi_3 & A_5\phi_3 - B_5\phi_4 & A_5\phi_2 - B_5\phi_1 & A_5\phi_1 + B_5\phi_2 & \lambda_3^5\phi_6 & \lambda_3^5\phi_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_P(\varphi) \\ F_P'(\varphi) \\ F_P''(\varphi) \\ F_P'''(\varphi) \\ F_P^{IV}(\varphi) \\ F_P^V(\varphi) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (33)$$

または、簡単に

$$w = \Phi(\varphi) \cdot C + F_P(\varphi) \dots\dots\dots (33)'$$

と書ける。ただし、

$$\begin{cases}
 A_1 = \lambda_1 \\
 A_2 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \\
 A_3 = \lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \\
 A_4 = \lambda_1^4 - 6\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4 \\
 A_5 = \lambda_1^5 - 10\lambda_1^3\lambda_2^2 + 5\lambda_1\lambda_2^4 \\
 B_1 = \lambda_2 \\
 B_2 = 2\lambda_1\lambda_2 \\
 B_3 = \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\
 B_4 = 4\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\
 B_5 = \lambda_2^5 - 10\lambda_1^2\lambda_2^3 + 5\lambda_1^4\lambda_2
 \end{cases} \dots\dots\dots (34)$$

である。式 (33)' のベクトル $F_P(\varphi)$ を式 (30) を用いて計算すると

$$F_P(\varphi) = \Phi(\varphi) \cdot g(\varphi) \dots\dots\dots (35)$$

と表わされる。ただし、

$$g(\varphi) = \begin{bmatrix} -K_1F_3(\varphi) - K_2F_4(\varphi) \\ -K_1F_4(\varphi) + K_2F_3(\varphi) \\ K_1F_1(\varphi) - K_2F_2(\varphi) \\ K_1F_2(\varphi) + K_2F_1(\varphi) \\ K_3F_6(\varphi) \\ -K_3F_5(\varphi) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (36)$$

である。式 (35) を式 (33)' に代入すると、次のごとくなる。

$$w = \Phi(\varphi) \cdot C + \Phi(\varphi) \cdot g(\varphi) \dots\dots\dots (37)$$

また、式 (25)' と式 (37) より、 w を消去すると

$$z(\varphi) = A \cdot \Phi(\varphi) \cdot C + A \cdot \Phi(\varphi) \cdot g(\varphi) + p(\varphi) \dots\dots\dots (38)$$

となる。上式において、 $\Phi(\varphi)$ および $g(\varphi)$ の独立変数 φ は部分座標系で、 $p(\varphi)$ は全体座標系で考える。いま、格間①の始点 $\tilde{\varphi}_i = 0$ および終点 $\tilde{\varphi}_i = A_i$ が全体座標系で $\varphi = \varphi(i)$ 、 $\varphi = \varphi(i+1)$ と表わされるとする (図-5)。する

と、格間 ① の始端および終端の状態量ベクトル ${}^i z_0$ 、 ${}^i z_e$ は式 (38) にそれぞれの座標値を代入して次のごとく与えられる。

$$\begin{cases}
 {}^i z_0 = A \cdot \Phi(0) \cdot C + p(\varphi(i)) \\
 {}^i z_e = A \cdot \Phi(A_i) \cdot C + A \cdot \Phi(A_i) \cdot g(A_i) + p(\varphi(i+1))
 \end{cases} \dots\dots\dots (39)$$

上式から積分定数ベクトル C を消去して整理すると、最終的に次の関係式を得る。

$${}^i z_e = F_i \cdot {}^i z_0 + q_i \dots\dots\dots (40)$$

ただし、格間 ② の伝達マトリックス F_i および荷重項のベクトル q_i は次のごとくなる。

$$F_i = A \cdot \Phi(A_i) \cdot \Phi^{-1}(0) \cdot A^{-1} \dots\dots\dots (41)$$

$$q_i = -F_i \cdot p(\varphi(i)) + A \cdot \Phi(A_i) \cdot g(A_i) + p(\varphi(i+1)) \dots\dots\dots (42)$$

これらの式に現われる逆マトリックス A^{-1} および $\Phi^{-1}(0)$ は表-1、表-2 に与えられている。

(3) 外 荷 重

地中に存在する構造物に作用する静的荷重としては、地表面の上載荷重、土圧、水圧、構造物の自重などがある。図-1 において、円弧部材の曲率の中心と地表面との距離を h 、座標 φ の始点と円弧の曲率の中心とを結ぶ線が鉛直線となす角を φ_0 とする。

円弧部材の壁厚中心線に作用する法線方向荷重 p_r と

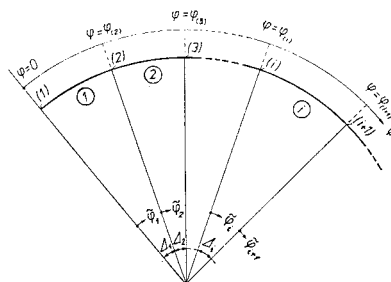


図-5 角度 φ の部分座標系と全体座標系

接線方向荷重 p_t は次式のごとく与えられる¹⁰⁾。

$$p_r(\varphi) = \frac{1}{2}(p_0 + r_s h)[(1 + \lambda) + (1 - \lambda) \cdot \cos 2(\varphi - \varphi_0)] - \frac{1}{4}r_s r[(1 - \lambda) \cdot \cos 3(\varphi - \varphi_0) + (3 + \lambda) \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)] + r_{ct} \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) \dots \dots \dots (43 \cdot a)$$

$$p_t(\varphi) = \frac{1}{2}(p_0 + r_s h)(1 - \lambda) \cdot \sin 2(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{4}r_s r(1 - \lambda)[\sin 3(\varphi - \varphi_0) + \sin(\varphi - \varphi_0)] + r_{ct} \cdot \sin(\varphi - \varphi_0) \dots \dots \dots (43 \cdot b)$$

上式中における $-\frac{1}{4}r_s r(3 + \lambda) \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)$ および $-\frac{1}{4}r_s r(1 - \lambda) \cdot \sin(\varphi - \varphi_0)$ の項はともに土圧による浮力を意味する。そこで、土圧荷重全体でつり合い系をな

すように、上記の余弦関数には絶対値を付し、正弦関数は零とおく³⁾。すなわち、式 (43) は次のごとく変形される。

$$p_r(\varphi) = \frac{1}{2}(p_0 + r_s h)[(1 + \lambda) + (1 - \lambda) \cdot \cos 2(\varphi - \varphi_0)] - \frac{1}{4}r_s r[(1 - \lambda) \cdot \cos 3(\varphi - \varphi_0) + (3 + \lambda)|\cos(\varphi - \varphi_0)|] + r_{ct} \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) \dots \dots \dots (44 \cdot a)$$

$$p_t(\varphi) = \frac{1}{2}(p_0 + r_s h)(1 - \lambda) \cdot \sin 2(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{4}r_s r(1 - \lambda) \cdot \sin 3(\varphi - \varphi_0) + r_{ct} \cdot \sin(\varphi - \varphi_0) \dots \dots \dots (44 \cdot b)$$

式 (25) 右辺第 2 項の荷重項ベクトルに式 (44) を代入すると、次のごとくなる。

表-1 逆マトリックス A^{-1}

0	0	1	0	0	0
-1	0	0	r	0	0
0	0	-1	0	$-\frac{r^2}{EI}$	0
(1 + α)	0	0	-(1 + α)r	0	$-\frac{r}{EFk}$
0	$\frac{r}{EFk}$	(1 + α) - β _r	0	(1 + α) $\frac{r^2}{EI}$	0
-(1 + α) ² + β _r + β _s	0	0	[(1 + α) ² - β _r]r	0	(2 + α) $\frac{r}{EFk}$

表-2 逆マトリックス $\Phi^{-1}(0)$

$\frac{\lambda_3^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 6\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_3^2\lambda_2^2 - \lambda_3^2\lambda_1^2)}{2\lambda_1\lambda_2\Delta}$	0	$\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 6\lambda_1^2\lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2\Delta}$	0	$\frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{2\lambda_1\lambda_2\Delta}$	0
$-\frac{\lambda_3^2(2\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2 - \lambda_3^2)}{\Delta}$	0	$\frac{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{\Delta}$	0	$-\frac{1}{\Delta}$	0
0	$-\frac{\lambda_3^2(5\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 10\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_3^2\lambda_2^2 - 3\lambda_3^2\lambda_1^2)}{2\lambda_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Delta}$	0	$\frac{5\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - 10\lambda_1^2\lambda_2^2}{2\lambda_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Delta}$	0	$-\frac{3\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{2\lambda_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Delta}$
0	$\frac{\lambda_3^2(\lambda_1^2 + 5\lambda_2^2 - 10\lambda_1^2\lambda_2^2 + 3\lambda_1^2\lambda_3^2 - \lambda_3^2\lambda_1^2)}{2\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Delta}$	0	$-\frac{\lambda_1^2 + 5\lambda_2^2 - \lambda_3^2 - 10\lambda_1^2\lambda_2^2}{2\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Delta}$	0	$\frac{\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2 - \lambda_3^2}{2\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Delta}$
0	$\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2}{\lambda_3\Delta}$	0	$-\frac{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{\lambda_3\Delta}$	0	$\frac{1}{\lambda_3\Delta}$
$\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2}{\Delta}$	0	$-\frac{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{\Delta}$	0	$\frac{1}{\Delta}$	0

$$\Delta = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1^2\lambda_2^2 + 2\lambda_1^2\lambda_3^2 - 2\lambda_2^2\lambda_3^2$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}(\varphi) = & \left[\begin{array}{c} \left(\frac{r^4}{\beta_t EI} \right) \left\{ \frac{3}{2} (\rho_0 + r_s h) (1-\lambda) \cdot \sin 2(\varphi - \varphi_0) - r_s r (1-\lambda) \cdot \sin 3(\varphi - \varphi_0) \right. \\ \left. \mp \frac{1}{4} r_s r (3+\lambda) \cdot \sin(\varphi - \varphi_0) + 2 r_{ct} \cdot \sin(\varphi - \varphi_0) \right\} \\ \hline -r \cdot \left\{ \frac{1}{2} (\rho_0 + r_s h) [(1+\lambda) + (1-\lambda) \cdot \cos 2(\varphi - \varphi_0)] \right. \\ \left. - \frac{1}{4} r_s r [(1-\lambda) \cdot \cos 3(\varphi - \varphi_0) + (3+\lambda) |\cos(\varphi - \varphi_0)|] \right. \\ \left. + r_{ct} \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) \right\} \\ \hline 0 \\ \hline \left(\frac{r^3}{\beta_t EI} \right) \left\{ \frac{3}{2} (\rho_0 + r_s h) (1-\lambda) \cdot \sin 2(\varphi - \varphi_0) - r_s r (1-\lambda) \cdot \sin 3(\varphi - \varphi_0) \right. \\ \left. \mp \frac{1}{4} r_s r (3+\lambda) \cdot \sin(\varphi - \varphi_0) + 2 r_{ct} \cdot \sin(\varphi - \varphi_0) \right\} \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{array} \right] \dots\dots\dots (45)
 \end{aligned}$$

上記ベクトルの1行目と3行目に \mp 記号が現われるが、マイナス符号は $0 \leq (\varphi - \varphi_0) < \pi/2$, $3/2 \cdot \pi < (\varphi - \varphi_0) \leq 2\pi$ の区間において、プラス符号は $\pi/2 \leq (\varphi - \varphi_0) \leq 3/2 \cdot \pi$ の区間において用いる。断面对称軸と鉛直線が一致する場合には、半周分 $0 \leq (\varphi - \varphi_0) \leq \pi$ のみ解析すればよいが、一致しない場合には、1周分 $0 \leq (\varphi - \varphi_0) \leq 2\pi$ 解析しなければならない。

式(44)を式(27)に代入して、整理すると、

$$\begin{aligned}
 f(\varphi) = & \left(\frac{r^4}{EI} \right) \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{k\beta_t}{1-k} \right) (\rho_0 + r_s h) (1+\lambda) \right. \\ & + \frac{1}{4} r_s h (3+\lambda) \left[1 + \left(\frac{k\beta_t}{1-k} \right) \right] \cdot |\cos(\varphi - \varphi_0)| \\ & - r_{ct} \left[2 + \left(\frac{k\beta_t}{1-k} \right) \right] \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) \\ & - (\rho_0 + r_s h) (1-\lambda) \left[3 + \frac{1}{2} \left(\frac{k\beta_t}{1-k} \right) \right] \\ & \quad \cdot \cos 2(\varphi - \varphi_0) \\ & \left. + r_s r (1-\lambda) \left[3 + \frac{1}{4} \left(\frac{k\beta_t}{1-k} \right) \right] \cdot \cos 3(\varphi - \varphi_0) \right\} \\ & \dots\dots\dots (46)
 \end{aligned}$$

と与えられる。

(4) 計算の手順

構造系は半径の異なる数個の円弧の組合せからなっている。格間の分割を考えるとき、まず半径の異なる円弧の結合点で大きく分けられる。次にそれぞれの円弧の内部でいくつかの格間に分割される。弧に沿って壁厚が変化する場合には、格間ごとに板厚を一定として階段状に近似させる。そのために、粗すぎる分割では解の信頼性が薄くなり、細かすぎる分割では演算時間が永くなり不経済である。

以上の事柄を考慮して分割されたならば、構造系全体

について通して格点番号および格間番号をつける。そして、始端の未知状態量を終端の状態量まで伝達する計算を行い、終端の境界条件を用いて始端の未知状態量を求める。中間支点で状態量の一部が跳躍変化するならば、その点での中間支点条件より跳躍量を計算できる。

すでに述べたごとく、断面对称軸と鉛直線が一致する場合には、図-6のごとく、上下端ともにせん断力ヒンジに置き換えて、半円周分だけ計算を行えばよい。そのための初期マトリックス \mathbf{B} は次のごとくなる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} = & \begin{array}{cccc} {}^1N_0 & {}^1\tau_{v_0} & {}^1M_0 & 1 \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \dots\dots\dots & (47) \end{array}
 \end{aligned}$$

断面对称軸と鉛直線が一致しない場合には、始端のすべての状態量が未知数であり、1周後の状態量と一致させる必要がある(図-7)。そのための初期マトリックス \mathbf{B} は単位マトリックスとなる。

格間伝達マトリックスの作成において、格間を構成するはりの内的性質は地盤定数

も含めて、一定としている。そのため、繰り返し計算に用いる \bar{N} の値は格間の始端と終端の軸力の平均値を採用する。同様に、地盤とはりの接触、非接触の判断は、格間の始端と終端のたわみの平均値の正、負で行う。

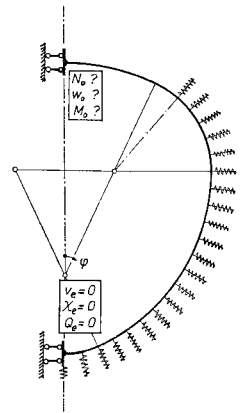


図-6 断面对称軸と鉛直線の一致する系の解析モデル

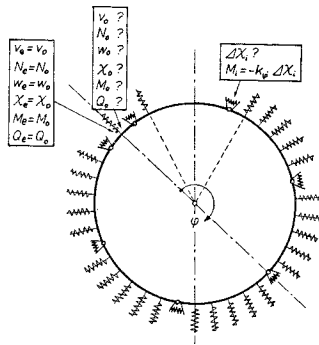


図-7 断面对称軸と鉛直線の一致しない系の解析モデル

ある格間のたわみ w の平均値が正のとき、その格間には地盤反力は作用しない。そこで、地盤反力係数 C_r および C_t は零とおくべきである。しかし、 $C_r = C_t = 0$ とおくと、式 (21) より $\beta_r = \beta_t = 0$ となり、式 (25) 中のマトリックス A の要素のうち、分母に β_t のある項が無窮大となり、計算不可能となる。そこで、計算技術的に、ばねなし領域の C_r, C_t の値として、ばね作用領域の C_r, C_t 値の 10^{-4} 倍した値を用いばよい。ただし、この 10^{-4} という値は経験的に提案するものであり、理論的裏付けに基づくものではない。著者の今までに行った数値計算においては、ばねなし領域の C_r, C_t 値として、 10^{-4} 倍、 10^{-5} 倍、 10^{-6} 倍のどれをとっても、求まる状態量の最大値の差は $\pm 1\%$ 程度となり、実用的には十分、収束した結果を与える。したがって、シールドセグメントトンネルのごとき大規模地下埋設物において、初期不整や二次モーメント応力を考慮することと、このばねなし領域のばね定数の取り扱いとの精度的整合性も問題ないといえる。

4. 数値計算例

(1) シールドセグメントリング

図-8 の断面对称軸と鉛直線の一致しないシールドセグメントリングを考える。この断面は、標準コンクリート系セグメント No.36 よりなる¹⁸⁾。計算に用いた諸量は山本・久保田¹³⁾の論文中的数値計算例で用いられた値を使った。

地表よりリングの中心までの距離 $h = 21$ m

上載荷重 $p_0 = 1.0$ tf/m² (9.8 kN/m²)

土の単位体積重量 $\gamma_s = 1.8$ tf/m³ (17.64 kN/m³)

法線方向地盤反力係数 $C_r = 1.0$ kgf/cm³ (9.8 MN/m³)

接線方向地盤反力係数 $C_t = 1.0$ kgf/cm³ (9.8 MN/m³)

側方土圧係数 $\lambda = 0.6$

リングの同心半径 $r = 2875$ mm

セグメントの厚さ $t = 250$ mm

セグメント幅 $b = 900$ mm

セグメントの単位体積重量

$$r_c = 2.6 \text{ tf/m}^3 \text{ (25.5 kN/m}^3\text{)}$$

セグメントの縦弾性係数

$$E = 1.4 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2 \text{ (13.72 GN/m}^2\text{)}$$

セグメントのポアソン比 $\nu = 0.0$

リングの対称軸と鉛直線のなす角度 $\varphi_0 = 0.6614$ rad

幅 b 当たりの断面二次モーメント $I = 1.172 \times 10^{-3}$ m⁴

幅 b 当たりの断面積 $F = 0.2250$ m²

初期不整係数 $\omega_0 = 1.0$

法線方向地盤反力係数 C_r および接線方向地盤反力係数 C_t の間の関係は興味深い。法線方向地盤反力係数 C_r は、通常、現場での平板載荷試験の結果より与えられる。この値 C_r が地盤の物理的性質のみに関係するのに対し、接線方向地盤反力係数 C_t は、地盤の物理的性質および地盤と接触する部分の構造物の粗度にも関係する。したがって、 C_r と C_t の間の関係を土の物理的性質のみで決定することはできない。この関係に関しては、著者の知る限りでは、研究成果とよべるものは発表されていないのが現状である。そこで、この数値計算においては、便宜的に $C_r = C_t$ とおいた。

セグメント継手部の回転ばね定数を k_φ 、無次元化された回転ばね定数を k_φ^* とすると、村上・小泉¹⁵⁾より、

$$k_\varphi^* = k_\varphi \cdot \frac{r}{EI} \dots\dots\dots (48)$$

と定義される。本例題においては、継手部の曲げ剛性の高い場合 $k_\varphi^* = 100$ および、中程度の場合 $k_\varphi^* = 1$ の2

種類について演算を行った。上述の E, I, r を用いて、 k_φ の値を計算すると、 $k_\varphi^* = 100$ のとき、 $k_\varphi = 570.7 \times 10^2$ tf·m/rad

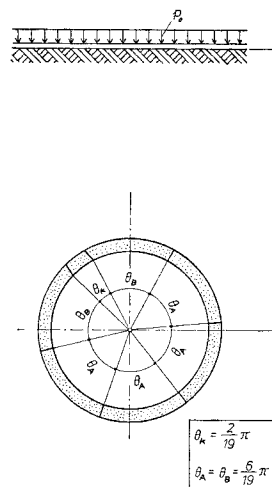


図-8 シールドセグメントリング

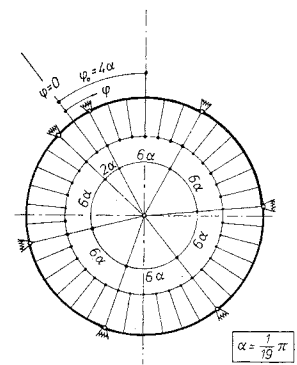
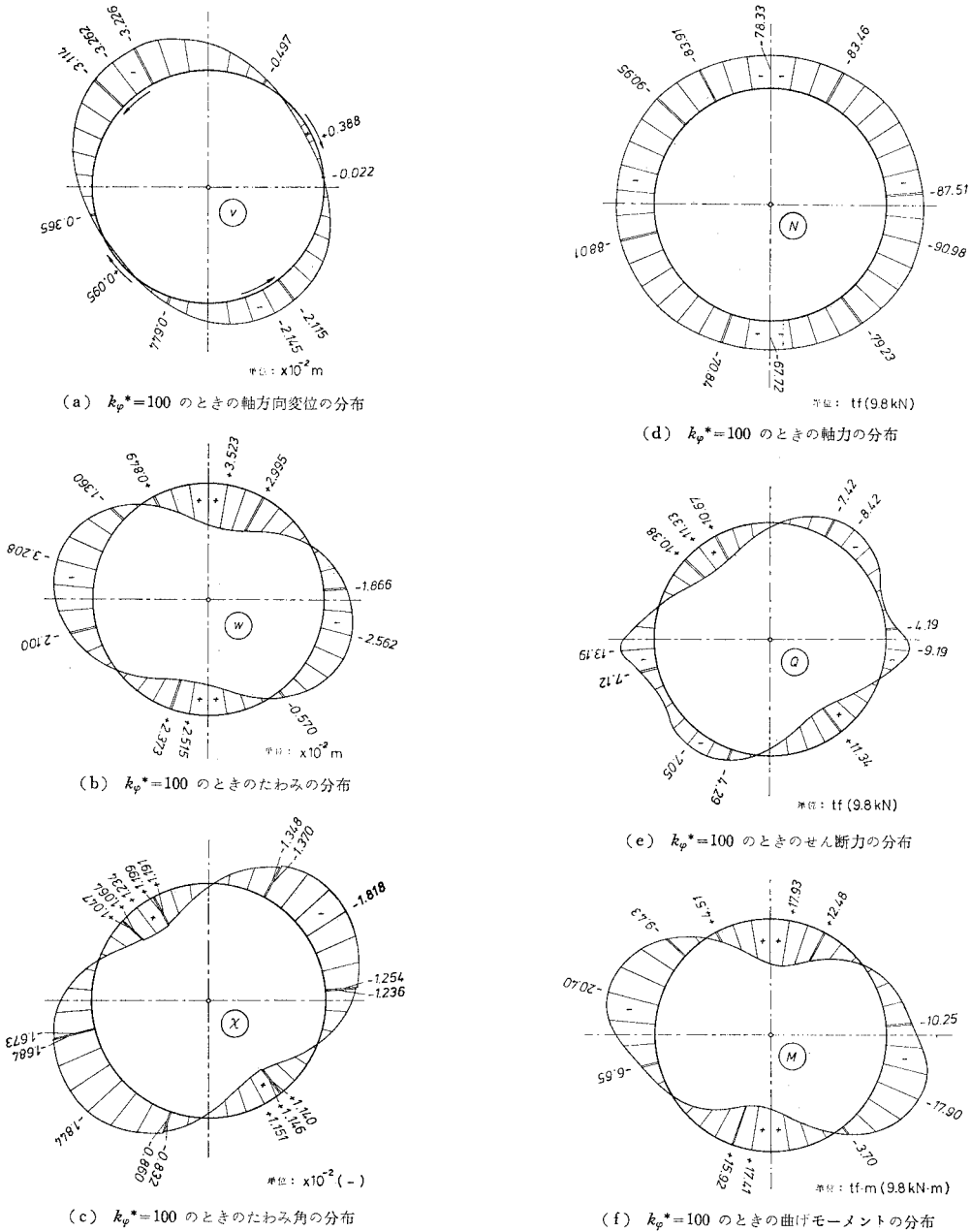


図-9 格間分割



図—10

(559 700 kN·m/rad), $k_{\phi}^*=1$ のとき, $k_{\phi}=570.7$ tf·m/rad (5 597 kN·m/rad) となる。

格間長は、図—9 に示すごとく、半円周を 19 等分した値とした。

$k_{\phi}^*=100$ のときの各状態量の分布を 図—10 (a)~(f) に、 $k_{\phi}^*=1$ のときの各状態量の分布を 図—11 (a)~(f) に示した。

$k_{\phi}^*=100$ において、リングの変形および断面力はセグメント継手部で滑らかに推移しているの、継手部は

剛結とみなすことができる。 $k_{\phi}^*=1$ の場合、たわみ角 χ の分布は継手部において比較的大きな跳躍変化を示しており、リング全体の挙動は剛性一様なリングと多ヒンジリングの中間的性質を表わしている。

$k_{\phi}^*=100$ の場合と $k_{\phi}^*=1$ の場合を比較すると、当然のことながら、 $k_{\phi}^*=100$ の場合の方がモーメント M およびせん断力 Q はやや大きめの値となり、逆にたわみ w およびたわみ角 χ は小さめの値となる。

曲げモーメント M の分布図を山本・久保田¹³⁾の与え

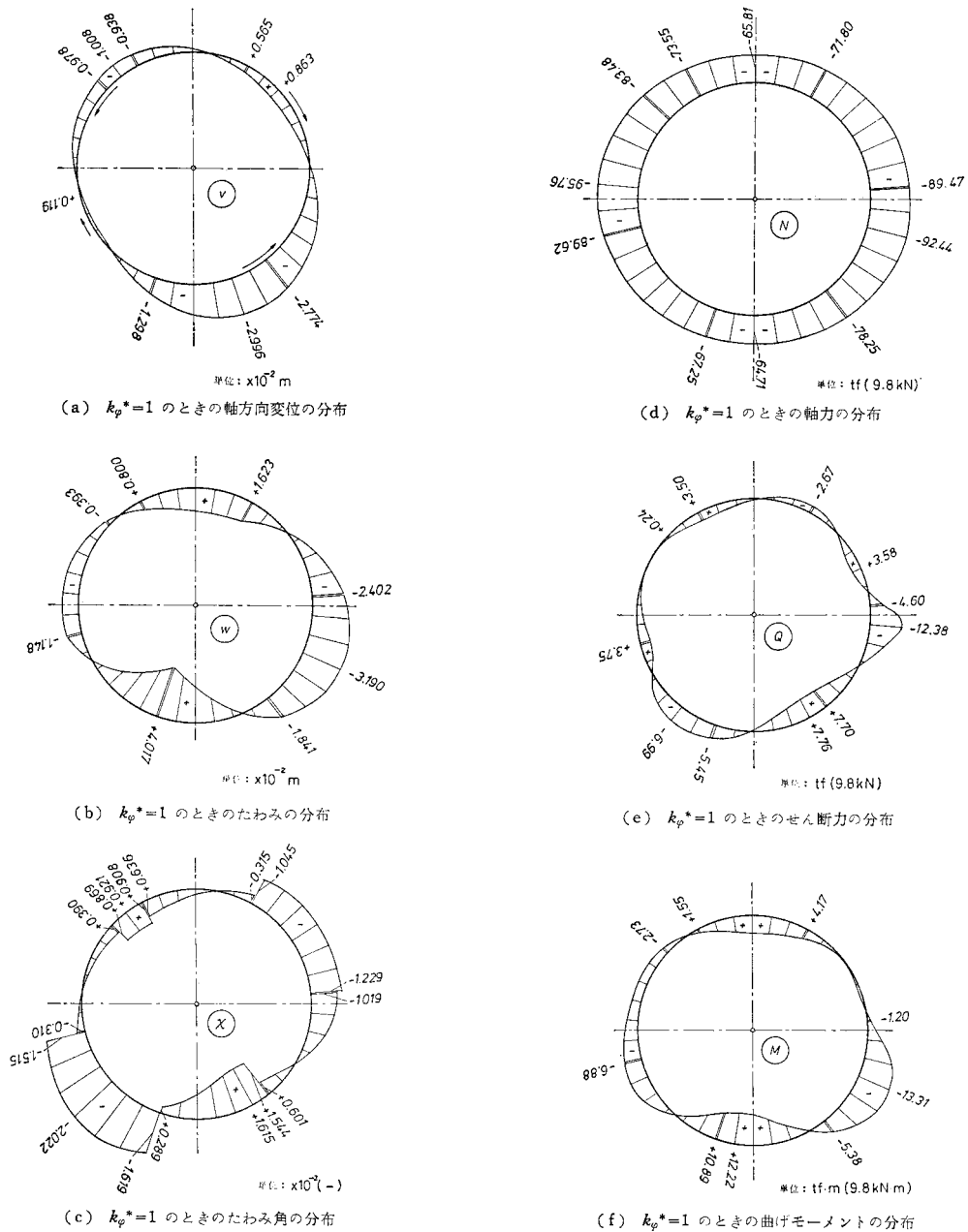


図-11

たものと比較すると、おおむね近い値を示している。ただし、本例題では、リングの垂直軸に対する対称性が存在しないことおよび K セグメントの把握などから、曲げモーメントの分布図は論文 13) に比べて多少複雑な形となっている。

(2) 卵形管

本例題では、DIN 4032, 4.1.2 に定められた卵形管 NW 1200×1800 を解析する。この卵形管が下水道用と

して、図-12 右側のごとく埋設されたとする。卵形管の断面形状は一般的に図-13 (a)のごとく規定される。しかし、この形状のままでは円弧部材の仮定 (2) にそぐわないので、図-13 (b)のごとく左右のかどをまるく削った形に直した。そして、変化する壁厚 T を φ の関数として表わすと、図-14のごとくなる。すなわち、区間 ① では一次曲線、区間 ② では二次曲線、区間 ③ では定数とした。格間は、図-15 に示すごとく、区間 ① を 9 等分、区間 ② を 9 等分、区間 ③ を 3 等分した。

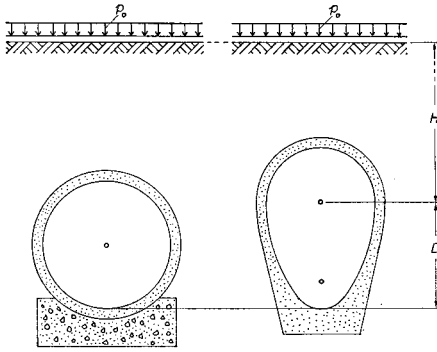


図-12 卵形管および鉄筋コンクリート円形管

その結果、図-16 のごとき断面形を解析したことになる。以下、計算に用いた諸量を列記すると、次のごとくなる。

- 地表より卵形管上半アーチの中心までの距離 $H=5\text{ m}$
- 上載荷重 $p_0=1.0\text{ tf/m}^2$ (9.8 kN/m^2)
- 土の単位体積重量 $r_s=1.8\text{ tf/m}^3$ (17.64 kN/m^3)
- 法線方向地盤反力係数 $C_r=8.0\text{ kgf/cm}^2$ (78.45 MN/m^2)
- 接線方向地盤反力係数 $C_t=8.0\text{ kgf/cm}^2$ (78.45 MN/m^2)

側方土圧係数 $\lambda=0.4$

図-13 (a) において、

- $D=1\ 200\text{ mm}$, $B=720\text{ mm}$
- $T_1=122\text{ mm}$, $T_2=160\text{ mm}$, $T_3=160\text{ mm}$

である。

- 卵形管の単位体積重量 $r_c=2.6\text{ tf/m}^3$ (25.5 kN/m^3)
- 卵形管の縦弾性係数 $E=1.4 \times 10^5\text{ kgf/cm}^2$ (13.72 GN/m^2)

卵形管のポアソン比 $\nu=1/6$

卵形管の対称軸と鉛直線のなす角度 $\varphi_0=0.0\text{ rad}$

卵形管の幅 $b=1\text{ m}$ について考えるならば、

断面二次モーメント $I=1.0 \times T^3(\varphi)/12(1-\nu^2)$

断面積 $F=1.0 \times T(\varphi)/(1-\nu^2)$

となる。

なお、このような小規模埋設物においては、初期不整や二次モーメント応力の影響は非常に小さいので、考慮

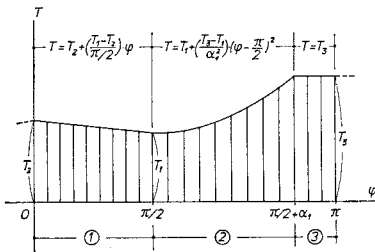


図-14 座標系 φ と壁厚 T の関係

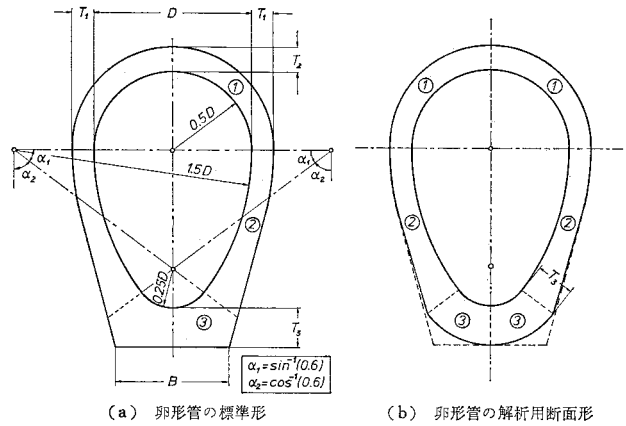


図-13

する必要はない。したがって、

卵形管の初期不整係数 $\omega_0=0.0$

とする。

この断面の壁厚中心線は正確な卵形にはならないが、近似的に、全断面にわたって、壁の内側から $T_1/2$ のところに壁厚中心線があるとして演算を行った。

この断面形状では、区間③における t/r の値がやや大きくなる。すなわち、具体的に計算すると、区間③で、 $(n/r)_{\max}=(t/2r)_{\max} \approx 0.21$ となる。ところが、ひずみの式(4)で用いた条件は $(n/r) \ll 1$ であるから、仮定(3)の内容に反することとなる。しかし、この場合、はりとしての断面が長方形であることから、式(1)'中の関数 $1/(1-\frac{n}{r})$ の Maclaurin 展開によって影響するのは $\int_F (\frac{n}{r})^4 dF$ である。この値は、 $(n/r)=0.21$ において、 $\int_F (\frac{n}{r})^2 dF$ のわずか 2.6% である。したがって、この数値計算例でも、本論文の理論式を適用しても差し支えない。

求められた状態量の分布は、図-20 (a)~(f) の右側半分に示した。

(3) 円形管

図-12 左側に描かれた下水道用鉄筋コンクリート円

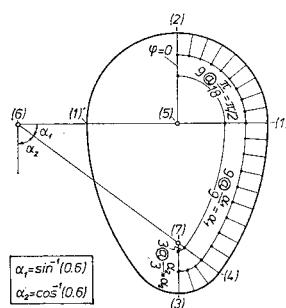


図-15 格間分割

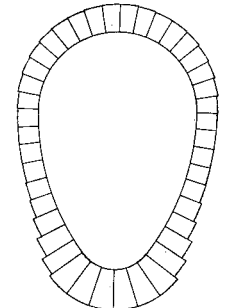


図-16 格間分割された卵形管

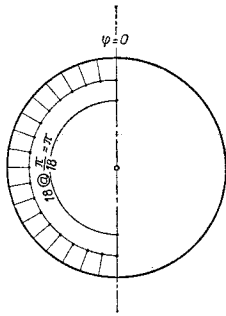
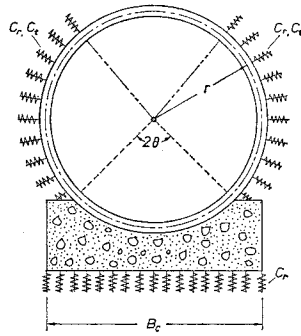
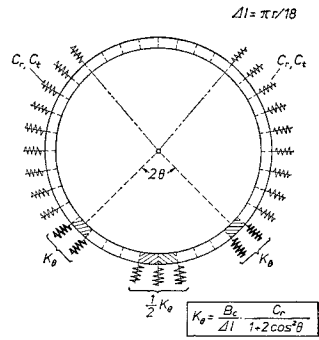


図-17 格間分割



(a) 円形管の構造系



(b) 円形管の解析モデル

形管を考える。(2)の卵形管と応力比較をするために、円形管の流水断面積および材料断面積を卵形管のそれと等しくとった。この結果、円形管の圆心半径および壁厚は次のごとくとなった。

$$r = 797.6 \text{ mm}, t = 144.2 \text{ mm}$$

円形管の埋設深さは、卵形管の中空部分の下端が円形管のそれと同一レベルとなるように決定した(図-12)。なお、他の条件、すなわち、地盤の条件、コンクリート材料の条件、上載荷重の値などは(2)の場合と完全に同じである。

円形管の格間長は、図-17に示すごとく、半円周を18等分し、 $\Delta l = \pi r / 18$ とした。

コンクリート基礎の支承角を 2θ として、この構造系をモデル化すると、図-18のごとくなる。自重を含めて荷重が作用しなければ、円形管の外壁下側の部分とコンクリート基礎は完全に接している。次に土圧等の荷重作用とともに、円形管は全体に偏平化し、さらに下向きに押しつけられる。そこで、変形後に、円形管はコンクリート基礎の左右端のみで接触しているか、または、さらに下端を含めた三点で接触しているかのどちらかであろう。著者は最初、前者の二点支持の仮定を置いて数値計算を試みたところ、円形管の下端がコンクリート基礎の内部に食い込むという矛盾した結果を得た。ゆえに、この構造系においては、円形管は変形後、コンクリート基礎と上記の三点で接触していると考えの方が正しい。

以上のごとくに構造系を設定しても、三接触点における接触長さおよび接触圧力をどう評価するかが問題となる。コンクリート基礎の奥行き方向の単位長さを切り取り、変断面の弾性はりと考えるならば、この問題は弾性床上の2本のはりの接触問題としてとらえることができる。この種の接触問題は、一般に、有限要素法^{19),20)}を用い、数百回の反復計算によって解を得る。本論文の解析手法である伝達マトリックス法の有限要素法に対する利点は、その簡便さにあるのだから、次のごとき単純な仮定を導入した。すなわち、コンクリート基礎は剛体とみ

なし、上記の三接触点で合力の大きさがすべて等しい等分布ばね反力が作用すると考える。そして、接触長さは左右端で $\pi r / 18$ 、下端で $\pi r / 9$ とした。

これらの仮定を用いて、力のつり合い条件よりばね定数 K_θ および基礎よりの分布反力 p_θ を計算すると、図-18、図-19中の□内の式となる。

$$\text{本例題では、} 2\theta = \pi/2$$

として計算を行った。その結果、求められた状態量の分布を図-20(a)~(f)の左側に示した。

最後に、(2)の卵形管および(3)の円形管の垂直応力を比較した。その結果が図-21である。図中の注釈にあるように、点線が曲げモーメントによる縁応力の値であり、それに軸圧縮力 N による応力を加えたのが実線である。また、□印によって、それぞれの断面における最大垂直応力の値を示した。

これから、この荷重条件においては、卵形管に発生する最大垂直応力は、円形管のそれのわずか65%にしかならないことがわかる。

5. あとがき

地中に埋設された中空断面の構造物を伝達マトリックス法で解く方法を示した。解析のための弾性関係式を厳密な方法で求め、二次変形理論を用いて、通常は無視されている付加曲げモーメントの影響、初期不整の影響、軸圧縮ひずみの影響などを考慮した。さらに、円弧部材の接線方向に作用する地盤反力も考慮した。

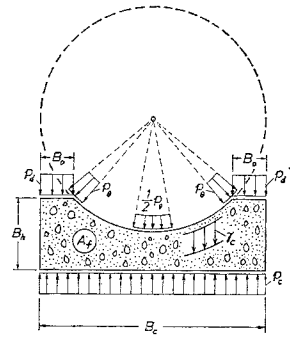
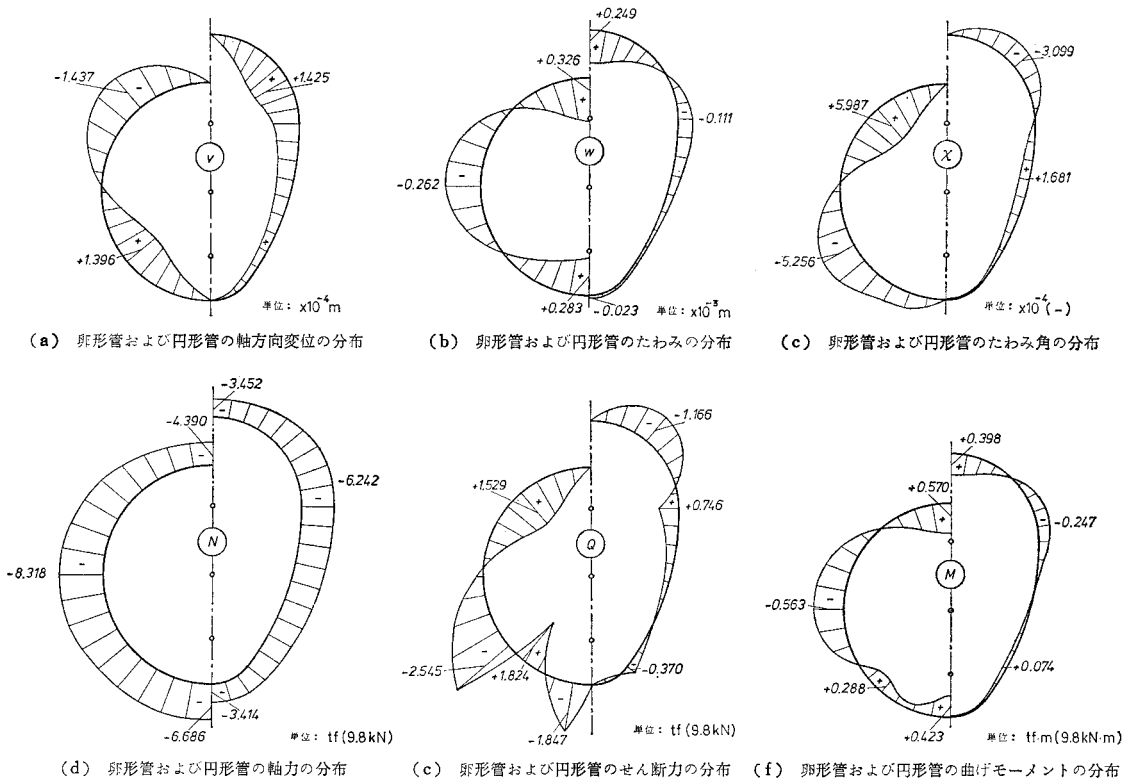


図-19 コンクリート基礎より円形管に作用する反力

$$p_\theta = \frac{B_c}{\Delta l} \frac{r_c \left(\frac{2B_c}{B_c} \right) p_\theta \left(\frac{A_c}{B_c} \right) \tau}{1 + 2 \cos^2 \theta}$$



図—20

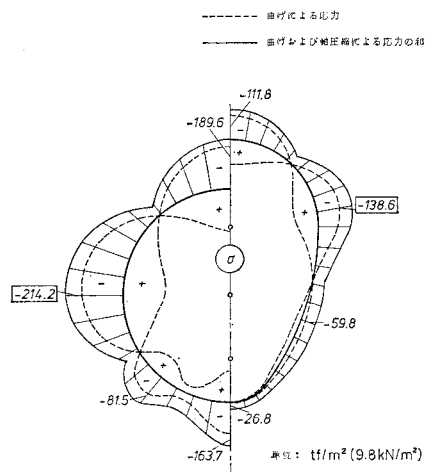
格間伝達マトリックスは、固有値解析によらず、常微分方程式の一般解から積分定数を消去する方法により求めた。なぜならば、後者の方法は、前者の方法に比べて、数値的安定性が高く、演算時間も格段に少なくて済むからである。その反面、後者の方法は、使用するマトリックスの種類が多く、やや複雑となる。そこで、プログラミング化が便利のように、マトリックス要素を表記した。

土圧荷重の公式は、小規模の埋設物と大規模の埋設物では異なる。本論文では、シールドセグメントリングなどの大規模の埋設物の設計に用いる土圧の式を採用した。しかし、鉄筋コンクリート管などの小規模の埋設物では、Marston 公式などを用いるのが普通である。また、文献 7) においては、Marston 公式の代わりに、掘削した溝幅の全土塊重量および矢板引抜き時の付加的土圧の和の式を用いることを提唱している。このような場合に、本論文の式を適用するには、その公式に適合するように土柱の高さ h を割り増してかければよい。

本論文の基礎理論部分では、できるだけ多くの影響因子を取り入れて式の誘導を図ったが、小規模な下水道管などでは、初期不整や二次モーメント応力以上に荷重系や地盤定数評価の適不適などの方が、解析結果により大きな影響を与える。そこで、これらの小規模な構造物で

は、初期不整や二次モーメント応力の影響は無視して計算しても差し支えない。しかし、大規模な構造物であるシールドセグメントトンネルなどでは、 t/r の値の減少に伴い、初期不整や二次モーメントの影響は、最終結果に 10% 以上の数値誤差を含ませることが考えられ無視しがたい。

数値計算例として、断面对称軸と鉛直線の一致しないシールドセグメントリング、卵形の断面をもった管、そ



図—21 卵形管および円形管の応力の分布

して、コンクリート基礎をもつ鉄筋コンクリート円形管を取り上げた。どの計算結果も、ほぼ現実の状況に対応した値が求まったと思われる。ただし、コンクリート基礎上の円形管の例題は、荷重とともに境界条件が変化するため、コンクリート基礎の扱いに関して問題を残している。また、この種の円形管は頂点部分に最大応力を発生して破壊することが多いという報告が福岡・矢部⁶⁾によってなされている。それに対し、この例題では、曲げモーメントによる応力は頂点で最大値となり、軸圧縮による応力は側面で最大値となった。両者の値を加えると、結局、最大応力は側面で発生することとなり、現実の破壊の報告とは異なる。おそらく、これは土圧の取り扱いに起因すると思われるが、今後の研究課題として、取り組みたい。

伝達マトリックス法の問題点として常に指摘されるのは、数値誤差に伴う収束の問題である。本論文の数値計算例は、倍精度プログラムを用いたが、収束の問題はなら発生しなかった。しかし、もしも、別の構造系の解析において収束性が危ぶまれるならば、中村¹⁷⁾の開発した“修正伝達マトリックス法”を用いればよい。

本論文の数値計算は、東京理科大学理工学部（野田校舎）電子計算機センターの IBM 370 138 を使用して行われた。

最後に、本論文を書くにあたり、種々の貴重な助言ならびに資料を提供くださいました東京理科大学理工学部土木工学科 杉木六郎教授、桜井建材産業（株）副社長 櫻井次郎氏に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Flüge, W. : Stresses in Shells, Springer-Verlag, Berlin, 1960.
- 2) Pestel, E.C. and F.A. Leckie : Matrix methods in elastomechanics, McGraw-Hill, New York, 1963.
- 3) Schulze, H. and H. Duddeck : Spannungen in schildvorgetriebenen Tunneln, Beton- und Stahlbetonbau, Bd. 59, pp. 169~175, August, 1964.
- 4) Windels, R. : Spannungstheorie zweiter Ordnung für den teilweise gebetteten Kreisring, Die Bautechnik, Bd. 43, pp. 265~274, August, 1966.
- 5) Grad, J. and M.A. Brebner : Algorithm 343, Eigenvalues and eigenvectors of a real general matrix, Communications of Association for Computing Machinery, pp. 820~826, 1968.
- 6) 福岡正巳・矢部正宏 : 埋設鉄筋コンクリート管のひびわれの実態, 下水道協会誌, 5 巻 44 号, 1968 年.
- 7) 建設省土木研究所 : 遠心力鉄筋コンクリート管埋設実験報告書, 土木研究所資料第 428 号, 1969 年 3 月.
- 8) 結城皓広 : 継手の剛性と組み方を考慮したシールドセグメントの解析, 土木学会論文報告集, No. 176, pp. 13~22, 1970 年 4 月.
- 9) 成岡昌夫・遠田良喜 : 伝達マトリックス法, コンピュータによる構造工学講座 I-2-B, 培風館, 1970 年.
- 10) Hain, H. and H. Horst : Spannungstheorie 1. und 2. Ordnung für beliebige Tunnelquerschnitte unter Berücksichtigung der einseitigen Bettungswirkung des Bodens, Strasse Brücke Tunnel, Bd. 22, pp. 85~94, April, 1970.
- 11) Duddeck, H. : Zu den Berechnungsmethoden und zur Sicherheit von Tunnelbauten, Der Bauingenieur, Bd. 47, pp. 43~52, Februar, 1972.
- 12) 波田凱夫・新家 徹・頭井 洋 : 伝達マトリックス法によるアーチの面内弾性座屈および 2 次の応力問題の解析, 土木学会論文報告集, No. 224, pp. 1~11, 1974 年 4 月.
- 13) 山本 稔・久保田尚子 : 弾性ヒンジセグメントの計算例と応用, トンネルと地下, 第 7 巻 3 号, pp. 40~49, 1976 年 3 月.
- 14) 中村秀治 : 管路, 薄肉はりなどの線形常微分方程式の数値解析法, 土木学会論文報告集, No. 271, pp. 13~25, 1978 年 3 月.
- 15) 村上博智・小泉 淳 : シールドセグメントリングの耐荷機構について, 土木学会論文報告集, No. 272, pp. 103~115, 1978 年 4 月.
- 16) 山口良雄・河田博之・山崎幹男 : セグメントの各種設計法の比較, 構造物設計資料, 第 55 号, pp. 3~8, 1978 年 9 月.
- 17) 中村秀治 : 数値誤差の改善を考慮した伝達マトリックス法の提案, 土木学会論文報告集, No. 289, pp. 43~53, 1979 年 9 月.
- 18) 土木学会・日本下水道協会共編 : シールド工用標準セグメント, 日本下水道協会, 1973 年.
- 19) 菊池 昇 : 変分不等式によるはりの接触問題, 土木学会論文報告集, No. 294, pp. 33~43, 1980 年 2 月.
- 20) Kamemura, K. and J.K. Lee : Finite Element Approximations of Smooth Contact-Impact Problems, Proc. of JSCE, No. 311, pp. 119~128, July, 1981.
- 21) 東田 淳・堀田清美・篠崎 亘・三笠正人 : 遠心力鉄筋コンクリート管(コンクリート支承)に加わる土圧と管の強度について, 土木学会論文報告集, No. 310, pp. 97~112, 1981 年 6 月.

(1980.12.11・受付)