

## 層流中を浮遊する固体粒子の体積濃度分布

### CONCENTRATION DISTRIBUTION OF SUSPENDED SOLID PARTICLES IN THE LAMINAR FLOW

福岡 捷二\*・宮間 俊一\*\*

By Shoji FUKUOKA and Shunichi MIYAMA

#### 1. まえがき

浮遊砂を含む流れに関する Vanoni<sup>1)</sup> の先駆的研究以来、土砂浮遊流の流速分布、抵抗係数、乱れ特性、エネルギー授受等について多くの実験的、理論的研究がなされてきた<sup>2)~5)</sup>。土砂浮遊流の特性に関して多くの点が明らかになった現在、逆に従来の解析の限界、あいまいさも浮かび上がってきたようにも思える。というのは、粒子浮遊流の理論がいくつか提案されているが、いずれの理論も実験データを同程度に説明し得る。しかし個々の理論が立脚している主要な考えは、異なっている。この事実は、現象の本質は何なのかという疑問を抱かせる。個々の理論が採用した基本的な考えは、複雑な土砂浮遊流の力学の一部ではあるが、必ずしも全体を語っていない可能性がある。この理由は乱流現象は本質的には数学的に閉じる問題ではなく、乱れに関して種々の仮定をもちこんで初めて近似解を得ることができると関係がある。一般的には乱れの諸量を平均流と関係づけ、平均流について解くことが行われる。乱流中に固体粒子が混入すると、流れと固体粒子の相互作用が加わり、解析的に解くことはさらに困難になる。粒子浮遊流の研究成果は工学のいろいろな分野で利用されてきたが、さきに述べた問題点を考えるときより理想的な条件のもとで力学の基本に戻って粒子浮遊流について再考することは意義のあることと思う。

乱流と層流の粒子浮遊流では、固体粒子に働く卓越した力が異なるために、粒子の挙動が異なる。乱流中では、固体粒子を浮遊させる主因は乱れによる拡散であるが、実際には乱れ、速度勾配、壁の影響等が複雑にからみあい現象の本質を把えることは容易ではない。

一方、層流では揚力のみが粒子を浮遊させる原因である。したがって層流中の固体粒子浮遊流では、揚力に及ぼす流速分布、壁の効果が明らかになりさえすれば、力学的に説得力のある粒子浮遊流の理論の組み立てが可能となる。福岡ら<sup>6)</sup>は、層流中を等速運動する球の相対速度、揚力、抗力を実測し、実験式を見出した。本研究では、これらの関係式を濃度の低い固体粒子浮遊流に適用し、以下の項目を理論的に考察する。

- (1) 粒子の体積濃度分布、(2) 流れのせん断力分布、  
(3) 流速分布、(4) 水深の変化

#### 2. 考えたこと

層流中に流体よりもやや重い球を入れると、球のまわりに揚力、抗力が発生する<sup>7)</sup>。このとき球はその液中重量と揚力が釣り合う位置を流下することになる。福岡らは<sup>6)</sup>比較的小さい勾配  $i$  をもつ開水路層流中を、1 個の球が等速運動しているときの粒子速度  $u_p$ 、相対速度  $\Delta u = u_p - u$ 、揚力  $L$ 、抗力  $F$  を測定し、次の関係式を得た。

$$\frac{u_p}{u_{\max}} = -1.14 \eta^2 + 2.05 \eta + 0.09 \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\Delta u}{u_{\max}} = 0.14 \eta^2 - 0.05 \eta - 0.09 \dots \dots \dots (2)$$

$$L = \frac{1}{2} \rho g h d^2 i (1 - \eta) \dots \dots \dots (3)$$

$$F = L \cdot i \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 $\eta = y/h$ 、 $i$  : 勾配、 $d$  : 粒径、 $h$  : 水深である。

周囲の流体よりわずかに重い液中重量  $W (=L)$  の固体粒子は、液体との密度差のためにまわりの流体よりも重力の作用を若干大きく受ける。このため粒子は式 (4) で表現される力で流体に仕事をなす。このような仕事になされてもなお流体が等速運動を続けるならば、仕事になされた分だけ流れの底面せん断力が増加し、エネルギー逸散が起こらなければならない。せん断力の増加は、

\* 正会員 Ph.D. 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 運輸省大臣官房

流れの流速分布，水深の変化となって現われる．多数個の粒子を混入している流れでは，この影響はさらに顕著になる．

いま，固体粒子を含む低濃度流れにおいても，個々の粒子の速度，揚力の大きさが単一粒子について見出された式 (1)，式 (3) で表現できるものとする．

### 3. 理論的考察

#### (1) 体積濃度分布

層流中の固体粒子浮遊流では，流体よりも重い粒子を浮遊させる力は揚力である．このとき揚力  $L$  と液中重量  $W$  が釣り合うことより，式 (3) より

$$\frac{1}{2} \rho g h d^2 i (1-\eta) = (\rho_s - \rho) g \frac{\pi}{6} d^3 \dots\dots\dots (5)$$

が得られる．式 (5) を書き直すと

$$d = \frac{3}{\pi} \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho} h \cdot i (1-\eta) \dots\dots\dots (6)$$

となる．浮遊する粒子の最大径は  $d_{\max} \leq \frac{3}{\pi} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} h \cdot i$  である．いま粒子密度  $\rho_s$ ，水理条件が同一であれば，粒径が決まると粒子の存在する高さ  $\eta$  が一義的に決定される．式 (6) は粒径が同じならば，全粒子は同じ高さを流れることを示している．以上のように，層流では粒径～体積百分率の関係と単位時間当たりに混入する粒子の総量が決まると，それぞれの高さを流れる単位時間当たりの粒子体積が一義的に決まる．このことから体積濃度分布を導くことができる．任意に選ばれた粒径～体積百分率，図-1 (a) が与えられたとする．図の縦軸には粒径  $d$  なる大きさの粒子の体積  $V$  を単位時間に混入される粒子の総体積  $Q_s$  で無次元化したもの，横軸には  $d$  を浮遊粒子の最大径  $d_{\max}$  で無次元化した  $d_*$  を選ぶ．これらの粒子が流れの中に入ると，径  $d$  のものは式 (6) に従って高さ  $\eta$  の位置を流れる．このときの各高さを流れる無次元粒子量  $V/Q_s$  を図示したのが 図-1 (b) である．式 (6) によれば  $d$  と  $\eta$  は一次の関係にあるため，図-1 (b) は 図-1 (a) と相似な図形となる．図-1 (a) より径  $d$  以下の粒子の体積は，

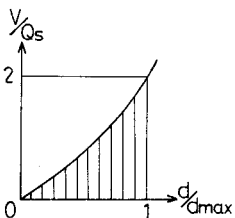


図-1 (a)  $\frac{V}{Q_s} = f_1(d_*)$

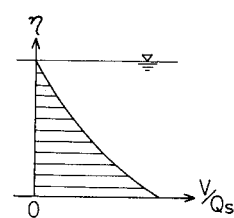


図-1 (b)  $\frac{V}{Q_s} = f_2(\eta)$

$$V_d = Q_s \int_0^{d_*} f_1(d_*) d(d_*)$$

となる．ここに  $f_1(d_*)$  は粒径～体積百分率の関係を表す既知関数である．

一方，粒径  $d$  の粒子が高さ  $y$  の位置を流れていくとすると，単位時間当たり高さ  $y$  より上を流れる粒子の体積は

$$B \int_y^h c(y) \cdot u_p(y) dy$$

で与えられる．ここに， $c(y)$  は体積濃度， $B$  は水路幅である．両式は相等しい．すなわち

$$B \int_y^h c(y) u_p(y) dy = Q_s \int_0^{d_*} f_1(d_*) d(d_*) \dots\dots\dots (7)$$

上式の両辺を  $y$  で微分し，式 (6) を用いて変形すると体積濃度分布を得る．

$$c(\eta) = \frac{3}{\pi} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{h}{d_{\max}} i \frac{Q_s}{B h u_p(\eta)} f_2(\eta) \dots\dots\dots (8)$$

ここに， $f_2(\eta) (= V/Q_s)$  は各高さを流れる粒子の無次元体積量を表す既知関数である．式 (8) より体積濃度分布  $c(\eta)$  と  $V/Q_s$  の関係は

$$c(\eta) = \frac{3}{\pi} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{h}{d_{\max}} i \frac{Q_s}{B h u_p(\eta)} \cdot \frac{V}{Q_s} \dots\dots\dots (9)$$

で与えられる． $\eta=0$  での体積濃度を  $c_0$  とおくと，式 (8) は次式となる．

$$\frac{c(\eta)}{c_0} = 0.09 \frac{u_{\max}}{u_p(\eta)} \frac{f_2(\eta)}{f_2(0)} \dots\dots\dots (10)$$

以上の議論では，自分を取り囲む他の粒子の存在を考慮していない．実際には固体粒子が多数混入し濃度分布が  $c(y)$  であるときには，粒子をとりまく流体の密度が上昇するために，圧力が静水圧分布より高まる．このため固体粒子に働く浮力が増加し，その分だけ粒子の移動する位置は他の粒子の影響を受けない場合よりも上昇する．このとき粒径  $d$  の粒子は， $\eta$  の高さではなく  $\eta' (> \eta)$  の高さを流れていくことになる．

次に  $\eta'$  の高さを求める．いま河床から  $y$  の高さでの力のつり合いを考える．濃度分布は式 (9) で与えられる． $y$  で切断した水平面に作用する圧力は

$$\rho g (h-y) + 4p(y)$$

となる．ここに  $4p(y)$  は静水圧からのずれである．水面から  $y$  までの深さを流れる粒子浮遊流の重量 (単位面積当たり) は

注 1) 流体の密度が一様大きくなり静水圧分布をしているときには浮力の増大は起こらない．一方，流体よりも重い粒子混入により粒子の濃度分布  $c(y)$  が生じ密度分布が  $\rho' = \rho + (\rho_s - \rho)c(y)$  となったときには圧力分布は静水圧分布からずれる．このときには，球のまわりの圧力の積分の鉛直上向き成分である浮力が増大する．

$$\rho g(h-y) + (\rho_s - \rho) g \int_y^h c(y) dy$$

となる。したがって粒子浮遊による浮力の増加分は

$$4p(y) = (\rho_s - \rho) g \int_y^h c(y) dy \dots\dots\dots (11)$$

で与えられる。これは流体の密度が粒子混入のために

$$\rho' = \rho + (\rho_s - \rho) c(y) \dots\dots\dots (12)$$

となったと考えればよい。このときつり合い式は式 (5) の  $\rho$  の代わりに  $\rho'$  を用いて

$$\frac{1}{2} \rho' g h d^2 i (1 - \eta') = (\rho_s - \rho') g \frac{\pi d^3}{6} \dots\dots\dots (13)$$

となる。式 (13) に式 (5), (12) を代入し、変形することにより  $\eta'$  は次式で与えられる。

$$\eta' = \eta + \frac{(\rho_s - \rho) c(y)}{\rho + (\rho_s - \rho) c(y)} \left( 1 - \eta + \frac{\pi d}{3 h i} \right) \dots\dots (14)$$

多粒子混入による浮力の増加のため、式 (14) で与えられる量だけ単一粒子の場合より押し上がる。すべての粒子の密度が同じであれば、押し上げられた後でも径の大きなものが小さなものより決して上に位置することはない。したがって固体粒子の層間隔が縮まることになり上昇部分の濃度が高まる。

次に多粒子浮遊流の体積濃度分布を求める。式 (14) より浮力の増大によって押し上げられる量 ( $\eta' - \eta$ ) はほぼ  $(1 - \eta)$  に比例する。いま  $\eta = 0$  に存在した粒子が多粒子混入により  $\eta' = \eta_0'$  の位置に移動したとする。このとき式 (14) より  $\eta$  と  $\eta'$  の関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \eta' &= \eta + (1 - \eta) \eta_0' \\ \eta_0' &= \frac{(\rho_s - \rho) c(0)}{\rho + (\rho_s - \rho) c(0)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

式 (15) より  $\eta' = \eta_0'$  以上の高さでは濃度はほぼ一様に高められる。したがって  $V/Q_s$  が  $\eta$  の一次式であれば押し上げられた後も  $\eta$  の一次式となり、 $\eta$  の  $n$  次式であればほぼ  $\eta$  の  $n$  次式で表わされると考えてよい。図-2 は多粒子浮遊による濃度分布の変化を示す。

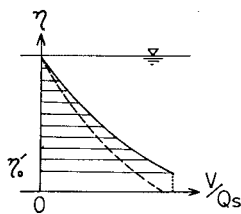


図-2

いま投入される粒子の粒径~体積百分率 ( $V/Q_s = f_1(d_*)$ ) が与えられているとき  $V/Q_s = f_2(\eta)$  は前述のように求まる。

粒子は押し上げられても流砂量の変化はないので、図-1 (b) と 図-2 のハッチ部分の面積は等しくなる。すなわち、式 (15) を用いて

$$\int_{\eta}^1 f_2(\eta) d\eta = \int_{\eta + (1 - \eta)\eta_0'}^1 f_3(\eta) d\eta \dots\dots\dots (16)$$

となる。

$$\int f_2(\eta) d\eta = F_2(\eta), \int f_3(\eta) d\eta = F_3(\eta) \text{ とおき、両辺}$$

を  $\eta$  で微分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} -F_2'(\eta) &= -(1 - \eta_0') F_3' \{ \eta + (1 - \eta) \eta_0' \} \\ f_2(\eta) &= (1 - \eta_0') f_3 \{ \eta + (1 - \eta) \eta_0' \} \end{aligned}$$

したがって、 $Q_s$  中の粒径  $d$  なる粒子の体積  $V$  の分布は  $\eta \geq \eta_0'$  に対し

$$\frac{V}{Q_s} = f_3(\eta) = \frac{1}{1 - \eta_0'} f_2 \left( \frac{\eta' - \eta_0'}{1 - \eta_0'} \right) \dots\dots\dots (17)$$

となり、体積濃度分布は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} c'(\eta) &= \frac{3}{\pi} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{h}{d_{\max}} i \frac{Q_s}{Bhu_p(\eta')} f_3(\eta) \\ &\dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

したがって投入される固体粒子の粒径~体積百分率、単位時間に投入される粒子の総量  $Q_s$  が与えられると式 (1), (15), (17), (18) より多粒子浮遊流の体積濃度分布を求めることができる。

(2) 多粒子浮遊によるせん断力の増加と流速分布、および水深の変化

図-3 に示す検査領域 A-A'-B'-B 内の粒子運動を考える。定常状態では A-A' 面に作用するせん断力と検査面内の流体の体積力の流下方向成分はつり合っている。すなわち、

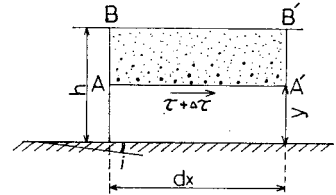


図-3

$$\begin{aligned} \rho g i (h' - y) dx + (\rho_s - \rho) g i dx \int_y^{h'} c'(y) dy \\ = (\tau + \tau') dx \end{aligned}$$

ここで、 $\tau$  は固体粒子を含まないときのせん断力であり第1項で表わされる。粒子混入によるせん断力の増分は

$$\tau' = (\rho_s - \rho) g i \int_y^{h'} c'(y) dy \dots\dots\dots (19)$$

となる。ここに  $h'$  は粒子浮遊流の水深である。

粒子混入による流速変化量を  $u'$  とする。粘性係数  $\mu$  は、低濃度のため粒子混入によっても変化しないものとする。このとき  $u'$  は式 (19) を用い

$$\mu \frac{du'}{dy} = \tau' \dots\dots\dots (20)$$

より算定可能である。

次に、多粒子混入による水深の変化を見積もる。固体粒子混入により流速分布が変化するために同流量に対して水深が変化する。その変化量を  $\Delta h (= h' - h)$  とすれば  $\Delta h$  は次式で求められる。

$$\int_0^{h - \Delta h} (1 - c'(y)) (u + u_0) dy = \int_0^h u dy \dots\dots (21)$$

この関係式にさきに求めた  $c', u_0$  を代入し  $\Delta h$  の大き

さを求めると低濃度粒子浮遊流では、 $dh$  は  $h$  に比べて無視してよい大きさとなる。

#### 4. あとがき

粒子浮遊流に関する工学的問題の多くは乱流である。しかし、乱流中の浮遊粒子の運動は、確率的な性質をもつ乱れの影響を強く受けるため一義的には決まらない。これに対し層流中の固体粒子の挙動は、粒子に作用する力および流体と粒子の相対運動が定まるために解析的な取り扱いが可能となる。

本研究は、工学的問題を離れ物理的、数学的立場から粒子浮遊流の力学を検討している。すなわち層流中を多粒子が運動するとき、どのような機構で粒子の運動様式が決まるかに着目し、それに基づいて粒子の体積濃度分布形を求めた。次に粒子を浮遊することによる速度分布とせん断力分布、水深の変化を算定した。層流の場合には、初めに投入される粒子の粒径～体積百分率と単位時

間当たり投入される粒子の総量が既知であれば、上記の問題は一義的に決定できる。このことが層流と乱流の粒子浮遊流の大きな相違点である。

#### 参考文献

- 1) Vanoni, V.A. : Transportation of suspended sediment by water, Proc. ASCE, Vol. 70, 1944.
- 2) 志村博康：浮遊流砂を有する水流の諸特性について，土木学会論文集，第46号，1957.
- 3) 日野幹雄：固体粒子を浮遊した流れの乱流構造，土木学会論文集，第95号，1963.
- 4) 吉川秀夫・福岡捷二・石田 貴：土砂浮遊流における流体と砂粒子の相対運動のモデル化，第20回水理講演会論文集，1976.
- 5) Itakura, T. and T. Kishi : Open channel flow with suspended sediment, Proc. ASCE, Vol. 106, No. Hy 8, Aug., 1980.
- 6) 福岡捷二・佐藤郁太郎・堀康次郎：層流中を運動する球に働く揚力と抗力に関する実験的研究，土木学会論文報告集，No. 295, 1980.
- 7) 福岡捷二・石田 貴・逸目英正：自由表面をもつ層流せん断流中の球に働く抗力と揚力，土木学会論文報告集，No. 271, 1978.

(1981.8.26・受付)