

河床波発生初期における波数選択的増幅機構

AMPLIFICATION MECHANISM OF FAVORABLE WAVE NUMBERS
OF INITIALLY FORMED SAND WAVES

中 川 博 次*・辻 本 哲 郎**

By Hiroji NAKAGAWA and Tetsuro TSUJIMOTO

1. ま え が き

移動床に形成される河床波の発生機構については、Kennedy¹⁾以来多くの研究者によって不安定性解析の手法を用いて研究され、また著者らによってその要因としての流砂の遅れ距離の内部構造が明らかにされた²⁾。不安定解析手法を用いた従来の研究成果および残された問題については文献 3), 4) に詳しくレビューされている。これらの研究では、ある波長の波が規則正しく配列している初期擾乱を考え、これがある水理条件（主として Froude 数）のもとで増幅するか否かを調べているのであるが、実際の初期擾乱は著者らが砂粒の不規則な離脱・落下に対する確率過程モデルによってそのスペクトル性状（平衡状態のものより高波数域での減衰性状が緩やか）を求めたような^{3), 4)}不規則波であったり、単にちよっとした一つの波（擾乱）が河床波のきっかけとなったりすることも考えられる。すなわち、移動床砂面上のどの波数域の擾乱がどのように増幅あるいは減衰して平衡状態の河床波へと成長していくのが興味ある研究対象である。こうした点では、砂面形状をフーリエ変換して扱い、波数スペクトルの増幅率を求めた Jain と Kennedy⁷⁾の研究は非常に興味深いだが、彼らの研究では対象とする波数域の波が他の波数域の波からどのような影響を受けているのかがあいまいであるうえ、彼らの用いた遅れ距離と inclination factor の仮定を導入すると、規則波に対する解析結果が従来受け容れられている結果（Kennedy¹⁾、林⁸⁾らによるもの）とまったく相反する面がある（安定・不安定が逆転する領域がある）など、本質的な疑問点がある。そこで、本研究では主として上流側に存在する波状砂面上での流砂状況がどのように影響するかを浮彫にしつつ、河床

波の発生初期の波数選択的増幅機構の説明を試みる。すなわち、本研究の特徴は不安定性解析を単に河床波発生可能領域の区分だけにとどまらず、著者らが先に示したモデル⁵⁾で説明される不規則な初期砂面擾乱がどういった挙動を呈して河床波に発達するかのプロセスの説明にまで適用しようと試みている点である。なお、本研究は河床波の形成機構の研究の一環ではあるが、線形解析を適用するという点で議論はあくまでも発生初期の微小変形時に限られる。

2. 理論解析 I

(1) 上流側に存在する一つの波の影響

いま 図-1 の波長 $2\pi/\kappa$ (κ : 角波数), 振幅 a の波の挙動を調べる。この波上の点での流砂挙動はあくまでもそれより上流の流砂状況に支配され、下流側からの影響はない。また微小時間内の挙動を考えるから波の進行はわずかで無視できる（微小時間 dt 後の波形が明らかになればこれと最初の波形との位相差からその波の進行速度を後から求めることは可能である）。

まず対象とする波と ε だけ離れて上流に存在する波の影響を調べる。この波の波長を $2\pi/\kappa_j$, 振幅を a_j とし、図のような座標系を考えると、波形 $y(x_j)$ および波面上での砂粒の pick-up rate $p_s(x_j)_j$ は次のように書ける。

$$y(x_j) = a_j \sin \kappa_j x_j \dots \dots \dots (1)$$

$$p_s(x_j)_j = p_{s0} + p_{s0} a_j r_{pj} \sin(\kappa_j x_j - \phi_c) \dots (2)$$

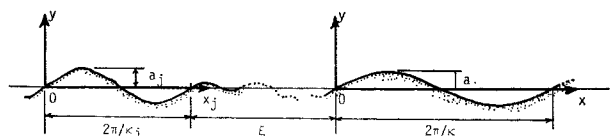


図-1 定 義 図

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室
** 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学教室

ここで、 p_{s0} は非擾乱時の pick-up rate であり、 a_j 、 $r_{pj}p_{s0}$ はこの波での pick-up rate の振動分の振幅、 ϕ_r は底面せん断応力と河床形状の位相差であり、pick-up rate と河床形状の位相差 ϕ_p と同値である²⁾。なお、式 (2) をみると $p_s(x_j)_j$ は x_j より ϕ_r/κ_j だけ上流の影響を受けているように見えるが実際はそうではなく、あくまでもある点の底面せん断応力、pick-up rate はその点の条件だけで決まるが、著者らのモデルにみられるような局所的水深変化の底面せん断応力への効果^{2),5)} などのため、数式の上では位相差が現われているのである。すなわち、式 (1)、(2) と同じ領域 $0 \leq x_j \leq 2\pi/\kappa_j$ で定義される注 1)。この波の上で移動開始した砂は step length^{注 2)}により下流側へ分配されて運ばれ堆積する。この波から運ばれる砂で $x \geq 0$ に落下するものを $p_d(x)_j$ ^{注 3)} と書くと、これは、

$$p_d(x)_j = \int_0^{2\pi/\kappa_j} p_s(x')_j f_X\left(x+\xi + \frac{2\pi}{\kappa_j} - x'\right) dx' \dots\dots\dots (3)$$

で計算される。ここで $f_X(\zeta)$ は step length の確率密度関数である。いま、微小擾乱を考えており、またせん断応力に対する step length の変化は pick-up rate の変化に比較して小さいことをも考えあわせ、非擾乱平坦河床の場合と同様、step length は平均値 A の指数分布に従う¹⁾ものとする。すなわち、

$$f_X(x) = (1/A)\exp(-x/A) \dots\dots\dots (4)$$

を代入して式 (3) を計算すると、

$$p_d(x)_j = p_{s0} \left\{ F_X\left(x+\xi + \frac{2\pi}{\kappa_j}\right) - F_X(x+\xi) \right\} - \frac{p_{s0}a_j r_{pj}}{A} \exp\left(-\frac{x+\xi}{A}\right) \cdot \frac{1}{(1/A)^2 + \kappa_j^2} \left[\left(\kappa_j \cos \phi_r + \frac{1}{A} \sin \phi_r \right) \cdot \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{\kappa_j A}\right) \right\} \right] \dots\dots\dots (5)$$

注 1) 流れについては各波についてその上で固有の流れ場があり、他の領域からの影響はないとし、それぞれの波で固有の流れ場が十分発達していると考えている。このことは Jain ら⁷⁾の研究でも仮定されている。このとき、本論文で用いたような波長・振幅の異なる正弦波を並べた砂面モデルでは、各波のつなぎ目で底面せん断応力、pick-up rate 等が不連続となり非現実的となることは否めない。この欠陥の一部は初期不規則砂面擾乱を Fourier 変換して扱うことによって除かれる¹⁵⁾が、本論文で用いたような砂面モデルの方が流砂の遅れシステムを具体的に理解するうえで有利で、こうした解析が Fourier 変換を対象としたより進んだ研究の前段階として必要と判断した。本論文では定性的に実験結果と比較しているが文献 15) ではより定量的に比較・検討される。

注 2) ここで、step length は砂粒子の初期移動から確実な停止まで (pick-up から deposit まで) を 1 つの step として定義している¹¹⁾。

注 3) p_s 、 p_d とともに単位時間当たり、砂粒 1 個分当たりとして考えられている。

となる。ここに $F_X(x)$ は step length の分布関数である。これだけの砂の落下が ξ だけ離れて上流に存在する波の影響である。

(2) 上流側にある不規則な波列からの影響

ここでは、振幅、波長が $(a, 2\pi/\kappa)$ の波の上流に、振幅、波長が $(a_1, 2\pi/\kappa_1)$ 、 $(a_2, 2\pi/\kappa_2)$ 、 \dots 、 $(a_j, 2\pi/\kappa_j)$ 、 \dots の波が配列しているものとする。このとき、前節の結果より、このうちの第 j 番目だけ上流側に存在する波 $(a_j, 2\pi/\kappa_j)$ から移動開始した砂で対象とする波 $(a, 2\pi/\kappa)$ ($0 \leq x \leq 2\pi/\kappa$ に存在しているとする) に堆積する分、 $p_d(x)_j$ は次式で与えられる。

$$p_d(x)_j = p_{s0} \left\{ F_X\left(x+\xi_j + \frac{2\pi}{\kappa_j}\right) - F_X(x+\xi) \right\} - \frac{p_{s0}a_j r_{pj}}{A} \exp\left(-\frac{x+\xi_j}{A}\right) \cdot \frac{1}{(1/A)^2 + \kappa_j^2} \left[\left(\kappa_j \cos \phi_r + \frac{1}{A} \sin \phi_r \right) \cdot \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{\kappa_j A}\right) \right\} \right] \left. \vphantom{p_d(x)_j} \right\} \xi_j = 2\pi \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \dots + \frac{1}{\kappa_j} + \dots \right) \dots\dots\dots (6)$$

一方、いま対象としている波自身の上で移動開始したもののうちで落下する分もあり、これを $p_d(x)_0$ と書くと、

$$p_d(x)_0 = \int_0^x p_s(x')_0 f_X(x-x') dx' \dots\dots\dots (7)$$

で計算され、この波については、

$$y(x) = a \sin \kappa x \dots\dots\dots (8)$$

$$p_s(x)_0 = p_{s0} + p_{s0}ar_p \sin(\kappa x - \phi_r) \dots\dots\dots (9)$$

であるから、

$$p_d(x)_0 = p_{s0} \{ F_X(x) - F_X(0) \} + \frac{p_{s0}ar_p}{A} \frac{1}{(1/A)^2 + \kappa^2} \cdot \left(\kappa \cos \phi_r + \frac{1}{A} \sin \phi_r \right) \cdot \exp\left(-\frac{x}{A}\right) + \frac{p_{s0}ar_p}{A} \frac{1}{(1/A)^2 + \kappa^2} C \sin(\kappa - \phi) \dots\dots\dots (10)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} C^2 &= (1/A)^2 + \kappa^2 \\ \sin \phi &= \left(\kappa \cos \phi_r + \frac{1}{A} \sin \phi_r \right) / C, \\ \cos \phi &= \left(\frac{1}{A} \cos \phi_r - \kappa \sin \phi_r \right) / C \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

となる。したがって、いま対象としている $(a, 2\pi/\kappa)$ の波の上へ堆積する分は、

$$p_d(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_d(x)_j \dots\dots\dots (12)$$

で計算されることになる。すなわち式 (6)、(10) を式

(12) に代入することにより,

$$\begin{aligned}
 p_d(x) = & p_{s0} \left[\{F_X(x) - F_X(0)\} + \left\{F_X\left(x + \frac{2\pi}{\kappa_1}\right) - F_X(x)\right\} + \dots + \left\{F_X\left(x + \frac{2\pi}{\kappa_1} + \dots + \frac{2\pi}{\kappa_j}\right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - F_X\left(x + \frac{2\pi}{\kappa_1} + \dots + \frac{2\pi}{\kappa_{j-1}}\right)\right\} + \dots + \{F_X(\infty) - F_X(\dots)\} \right] \\
 & + \frac{p_{s0} ar_p}{A} \exp\left(-\frac{x}{A}\right) \cdot \frac{1}{(1/A)^2 + \kappa^2} \left(\kappa \cos \phi_r + \frac{1}{A} \sin \phi_r\right) \\
 & - \frac{p_{s0}}{A} \sum_{j=1}^{\infty} a_j r_{pj} \exp\left(-\frac{x + \xi_j}{A}\right) \cdot \frac{1}{(1/A)^2 + \kappa_j^2} \left[\left(\kappa_j \cos \phi_r + \frac{1}{A} \sin \phi_r\right) \left\{1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{\kappa_j A}\right)\right\}\right] \\
 & + \frac{p_{s0}}{A} ar_p \frac{C}{(1/A)^2 + \kappa^2} \sin(\kappa x - \phi)
 \end{aligned}$$

となる。若干整理すると,

$$\begin{aligned}
 p_d(x) = & p_{s0} + p_{s0} S^* \exp\left(-\frac{x}{A}\right) \\
 & + \frac{p_{s0}}{A} ar_p \frac{C}{(1/A)^2 + \kappa^2} \sin(\kappa x - \phi) \\
 & \dots \dots \dots (13)
 \end{aligned}$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned}
 S^* = & \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{b_j/A}{(1/A)^2 + \kappa_j^2} \left(\kappa_j \cos \phi_r + \frac{1}{A} \sin \phi_r\right) \right\} \\
 \kappa_0 = & \kappa, \quad b_0 = ar_p, \\
 b_j = & a_j r_{pj} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{\kappa_j A}\right) \right\} \\
 & \cdot \exp\left(-\frac{2\pi}{A} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{\kappa_i}\right) \quad j > 1 \\
 & \dots \dots \dots (14)
 \end{aligned} \right\}$$

である。ところで、対象としている波の変形は次式で与えられる。

$$\partial y / \partial t = A_1 d \{p_d(x) - p_s(x)\} \dots \dots \dots (15)$$

ここに、 A_1 は一次元の砂の形状係数、 d は砂の粒径である。上式に式 (9), (13) を代入して,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{A_1 d} \frac{\partial y}{\partial t} = & p_{s0} S^* \exp\left(-\frac{x}{A}\right) \\
 & + ar_p p_{s0} \left[\frac{C/A}{(1/A)^2 + \kappa^2} \sin(\kappa x - \phi) \right. \\
 & \left. - \sin(\kappa x - \phi_r) \right] \dots \dots \dots (16)
 \end{aligned}$$

が得られ、上式の周期成分である右辺第 2 項の [] 内を $D \sin(\kappa x - \phi_j)$ とおくと,

$$\left. \begin{aligned}
 \sin \phi_j = & \left(\frac{1}{A} \cos \phi_r - \kappa \sin \phi_r \right) / \sqrt{(1/A)^2 + \kappa^2} \\
 \cos \phi_j = & - \left(\frac{1}{A} \sin \phi_r + \kappa \cos \phi_r \right) / \sqrt{(1/A)^2 + \kappa^2} \\
 D^2 = & \kappa^2 / \{(1/A)^2 + \kappa^2\} \\
 & \dots \dots \dots (17)
 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{A_1 d} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = & p_{s0} \left[S^* \exp\left(-\frac{x}{A}\right) \right. \\
 & \left. + ar_p D \sin(\kappa x - \phi_j) \right] \dots \dots \dots (18)
 \end{aligned}$$

となる。すなわち上式をみてわかるように ($\partial y / \partial t$) は、周期成分(上式右辺第 2 項)と負の指数関数で表わされる

非周期成分(上式右辺第 1 項)とからなっているが、対象とする波の増幅、減衰にかかわるのは第 2 項のみである。第 2 項において、 ϕ_j は ($\partial y / \partial t$) の河床形状との位相差であり、この大きさを知ることでその波が増幅するか減衰するかを知ることができる²⁾。また、流砂量の底面せん断応力に対する遅れ距離を $\delta_{B\tau}$ とすると,

$$\phi_j = \phi_r + \kappa \delta_{B\tau} + \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (19)$$

なる関係が成立し^{2), 9)}、これと式 (17) から,

$$\left. \begin{aligned}
 \sin \kappa \delta_{B\tau} = & \kappa A / \sqrt{1 + (\kappa A)^2} \\
 \cos \kappa \delta_{B\tau} = & 1 / \sqrt{1 + (\kappa A)^2}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

が得られ、これは著者らが単一波長の波(規則波)について求めたものとまったく一致している。すなわち、不規則波の効果は ($\partial y / \partial t$) に対して非周期成分として現われるだけで、位相差については規則波に対して得られた結果を不規則波中の各波にあてはめてもよいことがわかる。なお、この非周期成分は主として pick-up rate が各波のつなぎ目で不連続であることに起因している。

(3) いくつかの例

$a_1 = a_2 = \dots = a'$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa'$ とすると ($r_{p1} = r_{p2} = \dots = r_{p'}$),

$$\begin{aligned}
 S^* = & \frac{ar_p/A}{(1/A)^2 + \kappa^2} \left(\kappa \cos \phi_r + \frac{1}{A} \sin \phi_r\right) \\
 & - \frac{a'r_{p'}/A}{(1/A)^2 + \kappa'^2} \left(\kappa' \cos \phi_r + \frac{1}{A} \sin \phi_r\right) \\
 & \cdot \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{\kappa' A}\right) \right\} \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2\pi(j-1)}{\kappa' A}\right\} \\
 = & \frac{ar_p/A}{(1/A)^2 + \kappa^2} \left\{ \left(1 - \frac{a'\kappa' \{(1/A)^2 + \kappa'^2\}}{a\kappa \{(1/A)^2 + \kappa^2\}}\right) \kappa \cos \phi_r \right. \\
 & \left. + \left(1 - \frac{a' \{(1/A)^2 + \kappa'^2\}}{a \{(1/A)^2 + \kappa^2\}}\right) \frac{1}{A} \sin \phi_r \right\} \dots \dots (21)
 \end{aligned}$$

となる。さらに $\kappa = \kappa'$, $a = a'$ とすると、 $S^* = 0$ となる。すなわち、規則波のときに限って非周期成分は消滅し、従来の結果^{2), 9)}とまったく一致したものとなる。これより、従来のように一様に規則波が並び定常進行している状態を対象として解析しなくとも一つの波にのみ着目してその波の挙動を考えてもよいことがわかる。

次に、 $a'\kappa'=0$ とおくと、これは、上流側に平坦河床がある場合であり、対象とする波がただ一つであってもよい。その波の κ の値が、与えられた水理条件に対して発達すべきものならば、その波は発達することが示される。

一方、 $a\kappa=0$ とすると、周期成分は消滅し非周期成分の指数関数部分のみが残る。すなわち、上流側にいくら砂面波があっても平坦河床に新しく波が形成されることはなく、河床波が水路一面に広がるのは次々に初期擾乱が形成されて河床波発達の機会が与えられるか、既存の発達し得る波が進行してくることによるほかないということになる。

3. 理論解析 II (波数別増幅率)

以上の解析により、ある水理条件が不規則波(さまざまな波数からなる初期擾乱)上に導かれたとき、どの波数域の波が選択されて増幅されるかを知ることができる。すなわち、各波数の増幅率は次式で与えられる^{2),9)}。

$$\dot{a}(\kappa)/a = A_1 d r_p p_{s0} D \cos \phi_j \dots\dots\dots (22)$$

式(17),(18)を代入して、

$$\frac{\dot{a}(\kappa)}{a} = -A_1 d p_{s0} r_p \cdot \kappa \cdot \left(\frac{1}{A} \sin \phi_r + \kappa \cos \phi_r \right) / \left\{ \left(\frac{1}{A} \right)^2 + \kappa^2 \right\} \dots\dots\dots (23)$$

であり、ここで ϕ_r を得るべき流れのモデルとしてポテンシャル流理論をもとにした著者らのモデル^{2),9)}を用いる。すなわち波状路床上での水脈の収縮・拡大の効果を考慮して底面せん断応力 $\tau(x)$ と局所流速 $U(x)$ との関係を保つように仮定し、局所的な水深変化 $\partial h/\partial x$ および $U(x)$ がポテンシャル流理論で与えられるものとした。

$$\tau = \beta \rho U^2 \left\{ 1 - (r_2/F_r^2) \frac{\partial h}{\partial x} \right\}$$

ここに、 β は非擾乱流れに対する一種の抵抗係数、 F_r は Froude 数、 r_2 は実験定数である(著者らの先の論文⁵⁾では r_2 の値を 1.0~1.2 程度と予想している)。このとき、 $a r_r \tau_0$ (τ_0 は非擾乱時の底面せん断応力)を底面せん断応力の摂動分の振幅として、

$$r_r = (\tau_2 \kappa F^{**}/F_r^2)^2 + (2 F_{*} \kappa)^2 \dots\dots\dots (24)$$

$$\sin \phi_r = \tau_2 \kappa F^{**}/F_r^2 r_r, \cos \phi_r = 2 F_{*} \kappa / r_r \dots\dots\dots (25)$$

ただし、

$$F_{*} = \frac{F_r^2 \kappa h_0 \tanh \kappa h_0 - 1}{F_r^2 \kappa h_0 - \tanh \kappa h_0} \dots\dots\dots (26)$$

$$F^{**} = \frac{F_r^2 \kappa h_0 (1 - \text{sech } \kappa h_0) - \tanh \kappa h_0}{F_r^2 \kappa h_0 - \tanh \kappa h_0} \dots\dots\dots (27)$$

であるから^{2),9)}、

$$\frac{\dot{a}(\kappa)}{a} = -A_1 d \cdot p_{s0} \cdot \frac{r_p}{r_r} \cdot \frac{\kappa^2}{F_r^2} \left\{ \frac{r_2}{A} F^{**} \right.$$

$$\left. + 2 F_{*} \kappa F_r^2 \right\} / \left\{ \left(\frac{1}{A} \right)^2 + \kappa^2 \right\} \dots\dots\dots (28)$$

となる。ただし、 $F_r^2 = U_0^2/g h_0$ 、 g は重力加速度、 U_0 、 h_0 はそれぞれ非擾乱時の平均流速および水深である。安定・不安定の領域区分だけならば上式分子の { } 内の符号で判定され、その結果は先に示したとおりである⁵⁾。

さて、pick-up rate の推定には著者らによる^{5),9)}次式を用いる。

$$p_{s*} \equiv p_s \sqrt{d/(\sigma/\rho - 1)g} = F_0 \tau_{*c} \{ 1 - (\tau_{*c}/\tau_*)^3 \} \dots\dots\dots (29)$$

ここに、 σ/ρ は砂の比重、 τ_{*c} は無次元底面せん断応力、 F_0 は実験定数で約 0.03、また τ_{*c} はいわゆる限界掃流力よりも厳しい移動限界 ($p_s=0$) での無次元底面せん断応力で、砂粒 Reynolds 数が大きいときは約 0.035 である。

$$\left. \begin{aligned} \tau_*/\tau_{*0} &= \tau/\tau_0 = 1 + a r_r \sin(\kappa x - \phi_r) \\ p_{s*}/p_{s*0} &= p_s/p_{s0} = 1 + a r_p \sin(\kappa x - \phi_p) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

$$a r_p \sin(\kappa x - \phi_p) = (d p_{s*}/d \tau_*)_{\tau_* = \tau_{*0}} \cdot a r_r \cdot \tau_{*0} \sin(\kappa x - \phi_r) \dots\dots\dots (31)$$

であり、上式に式(29)を代入して、

$$\left. \begin{aligned} \phi_p &= \phi_r \\ r_p &= \{ 1 + 3 \tau_{*c} (\tau_{*0} - \tau_{*c})^{-1} \} \cdot r_r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

が得られ^{注4)}、結局各波数の波の増幅率の無次元量は次式で与えられる。

$$\frac{\dot{a}}{a} \sqrt{\frac{d}{(\sigma/\rho - 1)g}} = \frac{F_0 A_1 d}{A} \tau_{*0} \left(1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau_{*0}} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2 \tau_{*c}}{\tau_{*0}} \right) \cdot \frac{\Gamma^*(\kappa h_0)}{F_r^2} \dots\dots\dots (33)$$

ただし、

$$\Gamma^*(\kappa h_0) \equiv - \frac{(r_1 \kappa h_0)^2}{1 + (r_1 \kappa h_0)^2} \cdot \frac{1}{F_r^2 \kappa h_0 - \tanh \kappa h_0} \cdot [2 r_1 \tanh \kappa h_0 (F_r^2 \kappa h_0)^2 - \{ r_2 (1 - \text{sech } \kappa h_0) + 2 r_1 \} F_r^2 \kappa h_0 + r_1 \tanh \kappa h_0] \dots\dots\dots (34)$$

$$r_1 \equiv A/h_0 \dots\dots\dots (35)$$

である。上式において A または r_1 の推定は、たとえば式(29)と平衡平坦河床での掃流砂量式(たとえば Meyer-Peter-Müller 式、Bagnold 式など¹⁰⁾)とから得られる A/d と τ_{*c} の関係式で推定し得るが^{11),注5)}、 r_2 の合理的決定法はいまのところ確立されておらず、本論文で用いた流れのモデルについては今後せん断乱流モデルを用い

注 4) 著者らの以前の論文^{2),9)}では τ_{*0} が τ_{*c} よりも十分大きいとして $r_p = r_r$ としている。

注 5) 文献 11) では、Meyer-Peter-Müller 式をはじめいくつかの掃流砂量式(平衡平坦河床を対象とするもの)を認め、それぞれに対して流砂の stochastic model から A/d と τ_{*c} との関係式を計算し、実験結果と比較している。

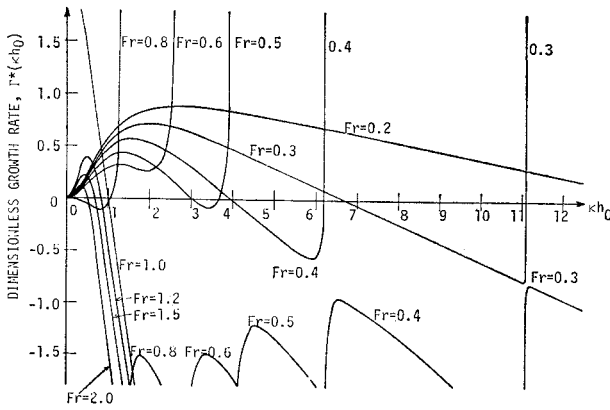


図-2 波数別の無次元増幅率

た最近の研究成果との関連からなお検討・修正を要する。このように式 (33) において 2 つのパラメーターの推定精度の斉合性を欠いていることが、これ以上の精密な理論解析の進展を阻んでいるといえる。そこで以下では、著者らの以前の研究⁵⁾で採用したパラメーターの値を仮定することにして式 (34) を計算し、波数による選択的増幅の特徴を定性的に調べることにする。

4. 考 察

ここでは $r_1=1.0$, $r_2=1.2$ として式 (34) で与えられる κh_0 による増幅率の相違を調べ、河床波の発達初期における波数選択的増幅の特徴を検討することにする。Froude 数を 0.3~2.0 と変えて式 (34) で計算された $\Gamma^*(\kappa h_0)$ と κh_0 の関係を 図-2 に示した。この図では増幅率そのものではなくその無次元量を示してあるので、 κh_0 に対する増幅率の相違を比較することはできるが、Froude 数の違いによる増幅率の相違 (大小関係) は必ずしも図のとおりではないことを注意しておく。

図-2 によると、Froude 数が大きいほど増幅する波数域が狭くなっていることがわかる。特に $Fr > 1$ では (antidunes), 発達する波数域は限られ、Froude 数の小さいもの (dunes や ripples) に比べ規則的な河床形状となることが予想される。一方逆に Froude 数が小さいほど高波数域まで増幅可能な波が広がっており、波長の短い波を含む不規則性の強い波に成長していくものと予想される。

図-2 にみられるもう一つの特徴は、 $Fr < 1$ の場合、増幅率が無限大となる波数が存在することである。これは式 (34) の分母が零となるときで、このときの波数と Froude 数の間には次式の関係が成立する。

$$Fr^2 = \tanh \kappa h_0 / \kappa h_0 \dots \dots \dots (36)$$

以上述べた結果は、河床波の波数スペクトルの初期発達段階での変化と次のように対応づけることができる。

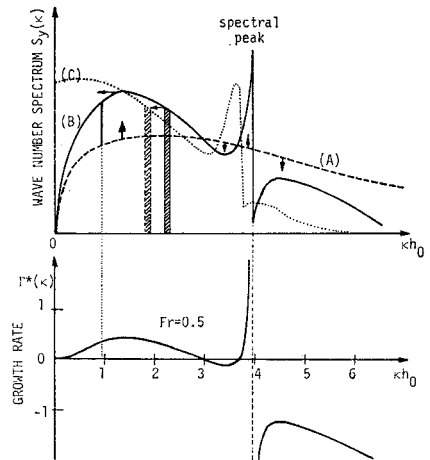


図-3 河床波の初期発達過程における波数スペクトルと波数別増幅率の関係

いま 図-3(b) に $Fr=0.5$ の場合の増幅率が波数の関数として示されている。そして 図-3(a) の曲線 (A) のように初期擾乱が広い波数域にわたって比較的一様なスペクトル密度を有しているとしよう (著者らのモデル^{5),6)}にみられるように、砂粒のランダムな離脱・落下に伴って発生した初期擾乱のスペクトルは平衡状態の河床波のそれに比べると広くなだらかである)。図-3(b) のように各波数の波の振幅の増大・減少率が与えられると、線形解析が許容される発達初期の段階では各波数の波が波長を変化させずに振幅だけ変化し、また (振幅の 2 乗) ~ (その波数の河床高分散への寄与分) ~ (スペクトル密度) であるから、スペクトル密度は dt 時間内に $\{\Gamma^*(\kappa h_0)\}^2 dt$ に比例した分だけ変化する (図-3(a) の曲線 (B) への変化)。したがって時間とともに波数域が限られてゆき、特に式 (36) を満足する波数付近の波が集中して発達する傾向が予想される。そのため、河床にみられる擾乱はまったく初期のランダムなものに比べてかなり規則正しいものに変質する。一方、時間がある程度以上経過してくると、単に各波ごとに波高 (振幅) を増加させるのではなく、波数による波速差のための追いつき、追いつき時の合体による波長変化を伴った変化となり¹²⁾ (線形解析では説明されない)、スペクトル密度は増加するとともに低波数側へ移行する傾向を伴って変化する (図-3(a) の曲線 (B) から (C) への変化)。

最後に上述の考察を、河床波の初期発達過程に関して行われた若干の実験結果¹³⁾と比較しておく。実験は長さ 9 m, 幅 33 cm の鋼製可変勾配水路で、中央粒径 0.45 mm のほぼ均一砂 (比重 2.61) で行われ、初期に平坦にならされた移動床に注意深く所定の水理条件の水流を導き、河床縦断形状の時間的変化を自走式超音波測深器で調べたものである。実験条件の範囲は $h_0/d=110\sim$

230, $Fr = 0.35 \sim 0.53$, $\tau_{*0} = 0.2 \sim 0.45$, $R_{e*} = 16 \sim 25$ 程度である ($R_{e*} \equiv u_* d / \nu$ は砂粒 Reynolds 数で u_* : 摩擦速度, ν : 水の動粘性係数である). この実験によって得られた河床擾乱の波数スペクトル (M.E.M. で計算された) の時間的変化を図-4注6)に示した. 図中の k は波数 (κ は角波数で $\kappa = 2\pi k$), $S_y(k)$ は波数スペクトルである. この図をみると, 通水初期のスペクトルは図-3(a)の曲線 (B) で概略的に示したものとよく似ており, 顕著なピークの存在が認められる. またピークを除外すると, スペクトルの高波数域での通減性状は平衡状態でのいわゆる「-3 乗則」¹⁴⁾ よりも緩やかで, 著者らのモデルに基づく初期擾乱のスペクトル^{9), 10)} (高波数域では波数の -2 乗に比例して通減する) に近いことが認められる. これらの波数スペクトル測定結果から得られる発達初期におけるスペクトルのピークに対応する波数^{注7)}と Froude 数との関係を示したものが図-5で, 図中に破線で示される式 (36) の関係がよく満足されていると判断される. この事実はすでに Jain と Kennedy⁷⁾ によっても指摘されており, 図には Jain らの実験結果も併示してある. なお, 図-4をみると上に述べたピークに対応する波数より低波数側ではスペクトル密度が順調に増大していること, また特にピークの波数に着目するとよくわかるようにスペクトルの形全体が時間とともに徐々に低波数側へ移行していることが認められ, 先の考察と一致している. ところで本実験では高波数成分も時間的に増加しており先の考察とは一見矛盾しているようである. 一方 Jain らの実験結果⁷⁾ では彼らの理論結果とは逆にこの波数成分は時間的に減少している. しかし, これは先の議論では不安定機構のみに基づくスペクトル密度の変化を論じたのに

注 6) 図中には通水後約 10 分後に測定された水理条件に基づき, Froude 数の値を示してある.

注 7) まず各時刻の砂面縦断形状のスペクトル図から通水時間 t とスペクトルピークに対応する波数との関係を図示し¹³⁾, 発達初期のスペクトルピークに対応する波数として $t \rightarrow 0$ の外挿値を採用した. これは初期発達過程にある時間を客観的に決定し得ないこと, 通水後最初の砂面縦断形状の測定時刻が実験ケースによって必ずしも同じでないためである. なお, Jain らの⁷⁾ データについても同じ方法で整理した.

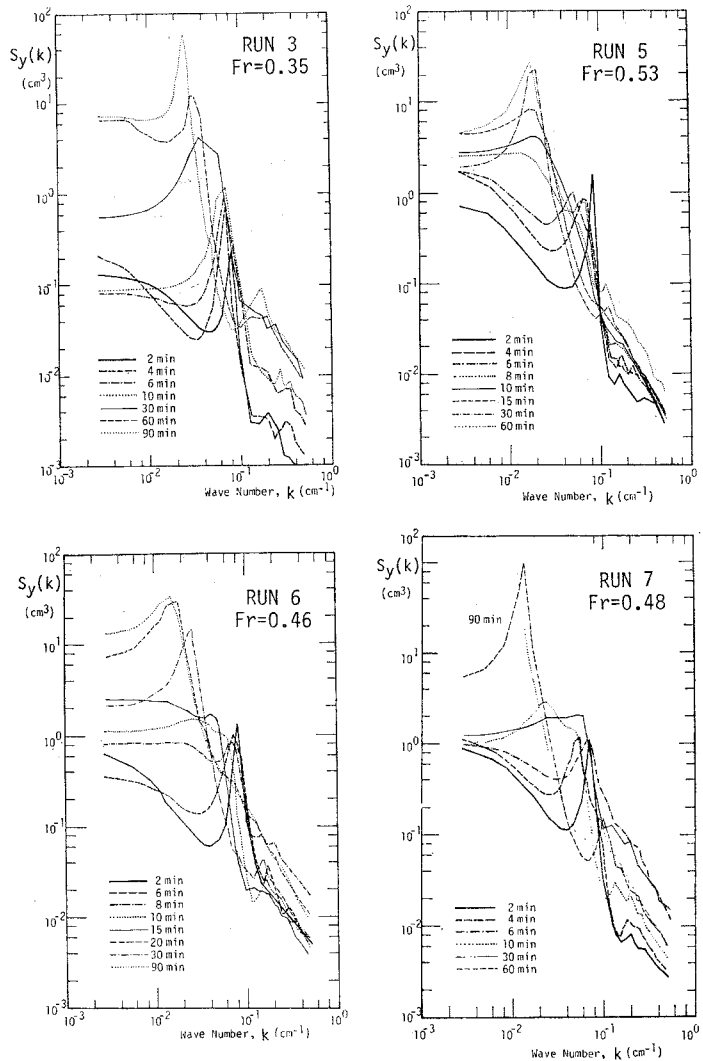


図-4 河床波の発達過程における波数スペクトルの時間的変化の測定例

対し, 実際には初期擾乱の生成過程が継続して行われ, そのため河床高の分散が増加 (広い波数域でスペクトル密度が増加) しているためで, より進んだ定量的な解析

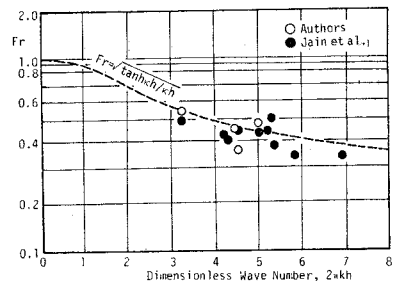


図-5 河床波の初期発達過程におけるスペクトルピークに対応する波数とフルード数の関係

ではこの擾乱生成と不安定機構に基づく波数選択的増幅過程の両面の定量的評価が必要となる。また Jain ら⁷⁾が指摘しているような高波数域でのサブピークは著者らの実験でもわずかに認められるようではある¹³⁾が顕著なものではない。今後、さまざまな条件での河床波の形成に伴うスペクトルの時間的変化例を数多く、しかも精度よく実測することにより、定量的な議論へと進展し得るものと考えられる。

5. あとがき

本研究では、砂の運動を pick-up rate と step length で表わすことによって上流側での流砂状況が下流へいかに影響を及ぼしているかがわかることに着目し、上流の河床条件のいかんにかかわらず、ある波長・振幅の波がどのように増幅あるいは減衰するかを調べた。これによって、ある波数域に広がった初期擾乱の中からどの波数域の波が選択されて増幅していくかが明らかにされた。その結果、ある波長・振幅の波はどのような不規則波の中に存在していても（たとえ平坦河床の中にただ一つ存在していたとしても）、その波が連続して規則正しく配列していたのと同じ条件で増幅することが予想された。すなわち、上流側の波の影響は周期成分としては、つまり位相差の変化には効いてこない。このことは、砂の運動性状によっては一つの波が下流側へ新しい波を誘起することがないことを示す。ただし、これらの理論結果は、流れ場が一つ一つの波の上で十分発達しており互いに干渉していないとの仮定のもとであり、本解析に含まれるパラメーター r_2 の検討を含めせん断流モデルを用いた最近の研究成果を参考に研究を進めていく予定である。

いずれにせよ、理論解析（線形）の結果、与えられた水理条件のもとで各波ごとにどのような挙動（振幅の増大または減少）をするかが明らかにされ、これをもとに河床波の成長初期におけるスペクトルの発達の概略を論じた。この結果は若干の実験結果と比較された。特に初期成長段階においては式 (36) を満足する波数の卓越することが示され、砂粒のランダムな離脱・落下を素過程とする初期砂面擾乱がランダム性の高いものであるにもかかわらず、実際初期に形成され観察される河床波が比較的規則正しいものであるという矛盾が解決された。

以上のように本論文で、従来から多くの研究者によって興味を持たれてきた移動床砂面の不安定性解析を単に河床波形成領域区分だけでなく河床波の初期発達機構の記述として適用することの可能性が示された。本論文では流砂の局所的状況が不規則な砂面波上でどう伝達され

るかに着目しているが、用いた砂面モデルは必ずしも現実的でない。また流砂の非平衡とともに重要な流れの問題について擾乱路床上の底面せん断応力分布についての詳しい議論は避けているなど、モデルの内部について今後さらに検討を進める必要がある。それとともに、初期擾乱の発生（河床高分散の生成過程）および波同志の合体等に基づく低波数側へのスペクトル密度の移行過程のそれぞれをも定量評価し、河床波の発達過程をスペクトルの時間的変化として総合的に把握できるところまで研究を進めてゆく予定である。

参考文献

- 1) Kennedy, J.F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 16, Part 4, pp. 521~544, 1963.
- 2) 中川博次・辻本哲郎: 移動床砂面の不安定要因としての遅れ距離・位相差, 土木学会論文報告集, 第 305 号, pp. 139~142, 1981.
- 3) Reynolds, A.J.: A decade's investigation of the stability of erodible stream beds, *Nordic Hydrology*, 7, pp. 161~180, 1976.
- 4) Kennedy, J.F.: Bed forms in alluvial streams: Some views on current understanding and identification of unresolved problems, 'Application of Stochastic Processes in Sediment Transport', edited by H.W. Shen and H. Kikkawa, Chapter 6a, 13 p., 1980 (Paper delivered at the U.S.-Japan Binational Seminar on Sedimentation, Hawaii, USA, 1978).
- 5) 中川博次・辻本哲郎: 砂礫の運動に伴う移動床砂面の擾乱発生過程, 土木学会論文報告集, 第 291 号, pp. 53~62, 1979.
- 6) Nakagawa, H. and T. Tsujimoto: Stochastic study on origin of small scale bed forms related to probabilistic characteristics of bed load movements, Proc. 3rd International Symposium on Stochastic Hydraulics, JSCE-IAHR, Tokyo, Japan, Paper B-8, pp. 359~370, 1980.
- 7) Jain, S.C. and J.F. Kennedy: The spectral evolution of sedimentary bed forms, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 63, Part 2, pp. 301~314, 1974.
- 8) Hayashi, T.: Formation of dunes and antidunes in open channels, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 96, HY 2, pp. 357~366, 1970.
- 9) Nakagawa, H. and T. Tsujimoto: Sand bed instability due to bed load motion, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 106, HY 12, 1980.
- 10) たとえば, Yalin, M.S.: *Mechanics of Sediment Transport*, 2nd edition, Pergamon Press, 1977.
- 11) 辻本哲郎・中川博次・村上正吾: 掃流砂の step length の役割とその平坦河床における評価について, 土木学会第 35 回年次学術講演会講演概要集, 第 II 部, II-167, pp. 330~331, 1980.
- 12) 中川博次・辻本哲郎: 河床波の発達性状に関する実験的考察, 京都大学防災研究所年報, 第 19 号 B-2, pp. 289~309, 1976.
- 13) 辻本哲郎・自閑茂治・富田邦裕: 砂漣の発生と発達について, 昭和 55 年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, II-19, 1980.
- 14) Hino, M.: Equilibrium-range spectra of sand waves formed by flowing water, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 34, Part 3, pp. 565~573, 1968.
- 15) 辻本哲郎・中川博次: 移動床砂面の不安定性に関する研究の新しい方向, 土木学会第 36 回年次学術講演会講演概要集, II-292, 1981.

(1980.12.9・受付)