

面対称柱体の水中振動による付加質量特性の研究

STUDY ON CHARACTERISTICS OF ADDED MASS DUE TO
OSCILLATION OF SUBMERGED CYLINDER HAVING PLANE
SYMMETRICAL CROSS-SECTION

清 川 哲 志*・小 林 浩**

By Tetsushi KIYOKAWA and Hiroshi KOBAYASHI

1. ま え が き

本論文は円筒、角筒を特別な場合として含む、一般的な対称断面を有する柱体の水中振動による動水圧と付加質量についての3次元解析法を提案し、これによって従来の研究で必ずしも明らかとなっていなかった、く形断面を有する柱体の3次元動的な動水圧の分布特性について解明したものである。

海洋・港湾・河川構造物等水中にある構造物に働く地震時外力としての動水圧を知ることはこれらの耐震設計上不可欠である。円筒構造物については桜井^{1),2)}、後藤・土岐³⁾をはじめとして、すでに多くの理論的、実験的研究が行われており^{4)~6)}、動水圧あるいは付加質量の3次元動的な分布性状に関しても十分に解明されている。しかし、構造物形状としては円筒と並んで基本的であるく形断面柱体に関しては、いくつかの理論的あるいは実験的研究はあるものの^{9)~14)}、小坪¹³⁾の報告にみられるごとく、各研究者によって得られた理論値と実験値間にはかなりの相違があるし、また3次元動的な理論解は得られていないなど、十分に解明されたとはいえないのが現状である。

これに対して小坪¹³⁾はだ円形断面を有する柱体についての動水圧式を導き、これを用いてく形断面柱体の付加質量に関する既存の理論値と実験値間の相違について解明しようと試みた。そして小坪の理論によれば、だ円柱体の付加質量は振動方向と直角な投影面の幅（だ円の長軸または短軸）と同じ直径を有する円筒が排除する流体の質量以上になり得ないことを示した。しかし、このだ円柱体に関する結論は、く形断面柱体の付加質量に関する既存の実験結果あるいは小坪自身の実験結果を十分に

説明し得るものではない。すなわち、R.W. Clough¹¹⁾は模型実験の結果、板の付加質量は板の幅と同じ直径を有する円筒が排除する流体の質量の1.17~1.33倍、また小坪¹³⁾は種々の奥行幅のく形断面柱体に関する実験を行い、付加質量は振動方向と直角な壁面の幅と同じ直径を有する円筒が排除する流体の質量の1.2~1.3倍という結果を得ている。小坪はだ円柱体および小判型断面柱体に関する実験も同時に行っているが、これらに関する実験で粘性の影響がないとき、だ円および小判型断面柱体の付加質量は、振動方向と直角な投影面の幅と同じ直径をもつ円筒が排除する流体の質量と等しくなるという結果を得ている。このことは、く形断面の場合とだ円あるいは小判型断面の場合では明らかに付加質量特性が異なっていることを示しており、同様の事実が土岐¹²⁾によっても指摘されている。

著者はこれらのことより、く形断面柱体にだ円柱体に関する理論を適用し、これによってく形断面柱体の付加質量特性を明らかにすることは無理であると考え、く形断面柱体に働く地震時の動水圧特性を明らかにすべく、この理論解析法について検討してきた。その結果、新たに一般の対称断面を有する柱体の動水圧を求める方法として、フーリエ展開および固有関数展開を用いて3次元流体場における一般解を導き、これによって表わした構造物表面上の境界条件式を構造物表面上でさらにフーリエ展開し、一般解中の未定係数を決定するという方法を考えた。従来、円筒あるいはだ円筒などと異なって、く形断面柱体に関する理論解析が困難であるといわれてきたのは³⁾、円筒あるいはだ円筒の場合、基礎方程式と境界条件をそれぞれ円筒座標、だ円筒座標で表わしたとき、構造物表面での境界条件が簡単に記述され、そのために未定係数が固有関数の直交性などを利用して比較的簡単に求めるのに対し、く形断面の場合そううまくはゆかないためである。これに対する著者の工夫は、構造物表面上の境界条件を構造物表面でフーリエ展開したところ

* 正会員 清水建設(株)研究所 海洋研究部研究員

** 正会員 Eng. Sc. D 清水建設(株)研究所 海洋研究部
主席研究員

あり、これによって一般解中の未定係数に関する複素係数連立1次方程式が得られ、く形断面を含めて一般の対称断面を有する柱体に関しての解を得ることが可能となった。そして本論文ではこれを用いて、従来不明確であったく形断面柱体の動水圧の3次元特性について明らかにした。また、小判型断面柱体についても解析を行い、く形断面と比較してその動水圧特性を論じた。あわせて本理論の妥当性を検証する意味で、既存の実験結果⁹⁾との比較を行った。

2. 面対称柱体の動水圧理論

(1) 基礎方程式と一般解

水深が一定の水域に鉛直な対称面を有する直立構造物があり、これが水中で調和振動を行う場合の動水圧について波の発生の影響も考慮して論じる。ただし、構造物の水平断面は水深方向に一様であり、振動方向は対称面に平行であるとする。座標系を図-1に示す。

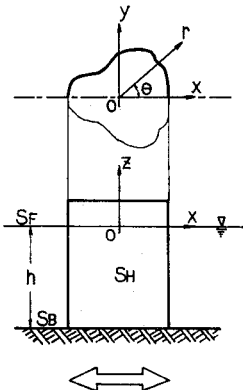


図-1 座標系の定義

この問題を解析するにあたって、構造物の振動によって生じる流体の運動は非回転であるとして速度ポテンシャルを導入し、これを円筒座標系で $\phi(r, \theta, z) \cdot \exp(-i\omega t)$ とする。ただし、 ω は振動の角振動数である。また、柱体の振動と発生波の振幅はともに微小であるとし、線形理論による解析を行う。このとき、 $\phi(r, \theta, z)$ は次の基礎方程式と境界条件を満たす必要がある。

i) 基礎方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ii) 自由表面条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0 \text{ (on } S_F) \dots\dots\dots (2)$$

iii) 海底面での不透過条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ (on } S_B) \dots\dots\dots (3)$$

iv) 構造物表面での不透過条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -n_x a_0 \omega \text{ (on } S_H) \dots\dots\dots (4)$$

v) 無限遠方での放射条件¹⁵⁾

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - ik_0 \phi \right) = 0 \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 a_0 : 構造物の変位振幅、 n : 構造物表面の単位法線ベクトル、 n_x, n_y : 単位法線ベクトルの成分、 k_0 : 波数である。

基礎方程式(1)は、非圧縮性流体に関する連続の方程式を、速度ポテンシャルと円筒座標を用いて表わしたものである。これと、境界条件(2)~(5)を満たす解は、 θ に関する対称性から θ に関して偶関数でなければならない。また、解が周期 2π の周期関数となることも明らかである。 θ に関するこれらの性質をもつ解は、次のようにフーリエ余弦級数で表わすことができる。

$$\phi(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(r, z) \cdot \cos m\theta \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\varphi^{(m)}(r, z)$ は、フーリエ級数の第 m 項に対応したフーリエ係数で、 r と z の関数である。

式(6)を、基礎方程式(1)に代入して整理すると、 $\varphi^{(m)}(r, z)$ に関して次の微分方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \varphi^{(m)} + \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

このとき、 ϕ に関する境界条件(2),(3),(5)より、

$$\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \varphi^{(m)} = 0 \text{ (on } S_F) \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial z} = 0 \text{ (on } S_B) \dots\dots\dots (9)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial r} - ik_0 \varphi^{(m)} \right) = 0 \dots\dots\dots (10)$$

を得る。

$\varphi^{(m)}(r, z)$ に関する微分方程式(7)、および、境界条件(8),(9),(10)を満たす解を、変数分離法によって求めた固有関数の重ね合わせで表わし¹⁶⁾、これを速度ポテンシャルの展開式(6)に代入すると、基礎方程式(1)および境界条件(2),(3),(5)を満たす一般解が次のように得られる。

$$\phi(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} \cdot K_m(k_n r) - i A_0^{(m)} \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} \cdot H_m^{(1)}(k_0 r) \right\} \cdot \cos m\theta \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 K_m : m 次の第2種変形ベッセル関数、 $H_m^{(1)}$: m 次の第1種ハンケル関数、 k_n : 固有値($k_1 < k_2 < \dots$)、 $A_n^{(m)}$: 複素未定係数である。また、波数 k_0 、固有値 $k_n (n=1, 2, 3, \dots)$ は次の方程式の実正根である。

$$k_0 \tanh k_0 h = -k_n \tan k_n h = \frac{\omega^2}{g} \dots\dots\dots (12)$$

(2) 未定係数の決定

所要の速度ポテンシャルは、式(11)中の未定係数 $A_n^{(m)} (m, n=0, 1, 2, \dots)$ を、式(11)が境界条件(4)を満たすように決めることによって得られる。

境界条件 (4) における n に関する微分は、次のように書くことができる¹⁷⁾。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = n_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \dots \dots \dots (13)$$

式 (11) の ϕ を x, y で偏微分して、式 (13) に代入し、境界条件 (4) を適用すると次式となる。

$$\begin{aligned} & -\frac{n_x \cos \theta + n_y \sin \theta}{2} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{i k_0 A_0^{(m)} \cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} \right. \\ & \cdot (H_{m-1}^{(1)}(k_0 r) - H_{m+1}^{(1)}(k_0 r)) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} k_n A_n^{(m)} \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} (K_{m-1}(k_n r) \\ & \left. + K_{m+1}(k_n r)) \right\} \cdot \cos m\theta + \frac{n_x \sin \theta - n_y \cos \theta}{r} \\ & \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} \cdot K_m(k_n r) \right. \\ & \left. - i A_0^{(m)} \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} \cdot H_m^{(1)}(k_0 r) \right\} \\ & \cdot m \sin m\theta = -n_x a_0 \omega \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

この両辺に、 $\cosh k_0(h+z)$ を乗じて $-h \sim 0$ まで積分すると、直交性より $A_n^{(m)}$ ($n=1, 2, \dots$) に関係のある積分はすべて 0 となり、

$$\begin{aligned} & i \frac{\sinh 2 k_0 h + 2 k_0 h}{8 \cosh k_0 h} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (n_x \cos \theta + n_y \sin \theta) \right. \\ & \cdot (H_{m-1}^{(1)}(k_0 r) - H_{m+1}^{(1)}(k_0 r)) \cdot \cos m\theta \\ & \left. + \frac{2}{k_0 r} (n_x \sin \theta - n_y \cos \theta) \cdot H_m^{(1)}(k_0 r) \cdot m \cdot \sin m\theta \right\} \\ & \cdot A_0^{(m)} = \frac{a_0 \omega}{k_0} \cdot \sinh k_0 h \cdot n_x \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

を得る。

上式は、構造物の表面 S_H 上の任意の点で成り立つ必要があるが、 S_H 上で、 n_x, n_y, r はそれぞれ θ の関数

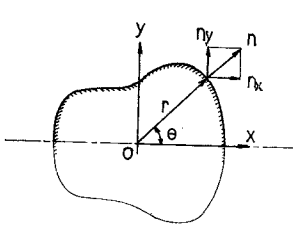


図-2 構造物表面における n_x, n_y , および r

とみなすことができる (図-2 参照)。

すなわち、

$$\begin{cases} n_x = n_x(\theta) \\ n_y = n_y(\theta) \\ r = r(\theta) \end{cases} \dots \dots \dots (16)$$

と書くことができる。

したがって、式 (15)

の両辺はともに θ のみの関数であり、 S_H 上の任意の点で成り立つためには、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ なる任意の θ について成り立てばよいことがわかる。

式 (15) を整理して、次のように表わす。

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Theta_0^{(m)}(\theta) \cdot A_0^{(m)} = c_0 \cdot n_x(\theta) \dots \dots \dots (17)$$

ただし、 $\Theta_0^{(m)}(\theta), c_0$ は次式で定義される。

$$\begin{cases} \Theta_0^{(m)}(\theta) = (n_x(\theta) \cdot \cos \theta + n_y(\theta) \cdot \sin \theta) \\ \cdot (H_{m-1}^{(1)}(k_0 r(\theta)) - H_{m+1}^{(1)}(k_0 r(\theta))) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cdot \cos m\theta + (2/k_0 r(\theta)) \cdot (n_x(\theta) \cdot \sin \theta \\ - n_y(\theta) \cdot \cos \theta) \cdot H_m^{(1)}(k_0 r(\theta)) \cdot m \cdot \sin m\theta \\ \dots \dots \dots (18) \\ c_0 = -i \frac{4 a_0 \omega}{k_0} \cdot \frac{\sinh 2 k_0 h}{\sinh 2 k_0 h + 2 k_0 h} \dots \dots \dots (19) \end{cases}$$

式 (17) の両辺は、ともに θ に関する偶関数であるから、それぞれフーリエ余弦展開ができて、次のように書くことができる。

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \Theta_0^{(m)}(\theta) \cdot A_0^{(m)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cdot \cos l\theta \\ C_0 \cdot n_x(\theta) = \frac{b_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \cdot \cos l\theta \\ \dots \dots \dots (20) \end{cases}$$

ここに、 a_l, b_l ($l=0, 1, \dots$) はともにフーリエ係数で、次式によって求められる。

$$\begin{cases} a_l = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \Theta_0^{(m)}(\theta) \cdot A_0^{(m)} \cdot \cos l\theta d\theta \\ b_l = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} c_0 \cdot n_x(\theta) \cdot \cos l\theta d\theta \\ \dots \dots \dots (21) \end{cases} \quad (l=0, 1, \dots)$$

式 (15) あるいは式 (17) が任意の θ について成り立つためには、その両辺をフーリエ余弦展開したとき各次数における係数が等しくなければならない。

したがって式 (21) より、

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \Theta_0^{(m)}(\theta) \cdot A_0^{(m)} \right) \cdot \cos l\theta d\theta \\ & = \int_0^{\pi} c_0 \cdot n_x(\theta) \cdot \cos l\theta d\theta \quad (l=0, 1, 2, \dots) \\ & \dots \dots \dots (22) \end{aligned}$$

を得る。

ここで、

$$\begin{cases} k_{lm}^{(0)} = \int_0^{\pi} \Theta_0^{(m)}(\theta) \cdot \cos l\theta d\theta \\ \alpha_l^{(0)} = \int_0^{\pi} c_0 \cdot n_x(\theta) \cdot \cos l\theta d\theta \end{cases} \dots \dots \dots (23)$$

とおくと、式 (22) は、

$$\sum_{m=0}^{\infty} k_{lm}^{(0)} \cdot A_0^{(m)} = \alpha_l^{(0)} \quad (l=0, 1, 2, \dots) \dots (24)$$

と書くことができる。これは未定係数 $A_0^{(m)}$ ($m=0, 1, 2, \dots$) に関する複素係数連立 1 次方程式であり、これを解くことによって $A_0^{(m)}$ を得ることができる。

未定係数 $A_n^{(m)}$ ($n=1, 2, \dots, m=0, 1, 2, \dots$) についても同様に、式 (14) の両辺に $\cos k_n(h+z)$ を乗じて $-h \sim 0$ まで積分すると、

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Theta_n^{(m)}(\theta) \cdot A_n^{(m)} = c_n \cdot n_x(\theta) \quad (n=1, 2, \dots) \dots \dots \dots (25)$$

を得る。ここに、

$$\begin{cases} \Theta_n^{(m)}(\theta) = (n_x(\theta) \cdot \cos \theta + n_y(\theta) \cdot \sin \theta) \\ \cdot (K_{m-1}(k_n r(\theta)) + K_{m+1}(k_n r(\theta))) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \cos m\theta - (2/k_n r(\theta)) (n_x(\theta) \cdot \sin \theta \\ -n_y(\theta) \cdot \cos \theta) \cdot K_m(k_n r(\theta)) \\ \cdot m \sin m\theta \dots \dots \dots (26) \\ c_n = \frac{4 a_0 \omega}{k_n} \cdot \frac{\sin 2 k_n h}{\sin 2 k_n h + 2 k_n h} \dots \dots \dots (27) \end{array} \right.$$

式 (25) の両辺をフーリエ余弦級数に展開して、これが任意の θ について成り立つべきことから、各次数の係数が等しいとおくと、 $A_n^{(m)}$ ($m=0, 1, 2, \dots$) に関して次の連立方程式を得る。

$$\sum_{m=0}^{\infty} k_{lm}^{(n)} \cdot A_n^{(m)} = \alpha_l^{(n)} \quad (l=0, 1, 2, \dots) \dots \dots \dots (28)$$

ここに、

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{lm}^{(n)} = \int_0^{\pi} \theta_l^{(m)}(\theta) \cdot \cos l\theta d\theta \\ \alpha_l^{(n)} = \int_0^{\pi} c_l \cdot n_x(\theta) \cdot \cos l\theta d\theta \end{array} \right. \dots \dots \dots (29)$$

連立方程式 (28) を解くことにより、任意の自然数 n を添字にもつ未定係数 $A_n^{(m)}$ ($m=0, 1, \dots$) を得ることができる。

以上により、速度ポテンシャルの面対称問題に関する一般解 (11) 中の、未定係数 $A_n^{(m)}$ ($n, m=0, 1, 2, \dots$) は、 $n=0$ のとき式 (24)、 $n=1, 2, \dots$ のとき式 (28) で表わされる連立方程式によって求められることが示された。

(3) 動水圧と付加質量

任意点の動水圧 p は、一般化されたベルヌーイの定理から求められ、線形理論の範囲では次式によって表わすことができる。

$$p(r, \theta, z, t) = i\omega\rho e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} \cdot K_m(k_n r) - iA_0^{(m)} \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} \cdot H_m^{(1)}(k_0 r) \right\} \cdot \cos m\theta \dots \dots \dots (30)$$

ただし、 $A_n^{(m)}$ ($n, m=0, 1, 2, \dots$) は連立方程式 (24) および (28) の解である。また、 ρ は流体密度である。

次に、動水圧によって柱体の単位長さ当たり作用する力の x, y 成分を P_x, P_y とすると、対称性から $P_y = 0$ となるのは明らかである。 P_x については次式によって算出することができる。

$$P_x(z, t) = \int_0^{2\pi} p(r, \theta, z, t) \cdot n_x \cdot r d\theta \quad (\text{on } S_H) \dots \dots \dots (31)$$

ただし、 n_x, r 等は式 (16) に示したごとく、柱体の表面 S_H 上で θ の関数である。

動水圧による力 P_x は、時間 t によって変動する。この振幅を $P_x^*(z)$ とすると、 $P_x^*(z)$ は次式で表わすことができる。

$$P_x^*(z) = \sqrt{P_x(z, t) \cdot P_x(z, t)} \dots \dots \dots (32)$$

ここに、 $\overline{P_x(z, t)}$ は $P_x(z, t)$ の共役複素数である。付加質量は、 P_x^* を振動加速度 $a_0\omega^2$ で除すれば得られる。これを M_v とすれば、

$$M_v(z) = \frac{P_x^*(z)}{a_0\omega^2} \dots \dots \dots (33)$$

この付加質量と、構造物の振動方向に直角な投影面の幅と同じ直径をもつ円柱の排除する流体の質量との比を、小坪¹³⁾ にならって F とすると、

$$F(z) = \frac{4 P_x^*(z)}{\pi \rho a_0 \omega^2 d^2} \dots \dots \dots (34)$$

ここに、 d : 振動方向に直角な投影面の幅である。

3. 数値計算による検討と考察

(1) 数値計算上の注意

本理論解析法の特徴は、構造物表面上の法線ベクトルの成分 n_x, n_y および構造物の対称面上にとった z 軸から表面までの距離 r を、 θ の関数としてとらえ、構造物表面における境界条件をフーリエ余弦展開したところにある。 n_x, n_y, r などは柱体の断面形状に応じて与えるものであるが、たとえば、図-3 に示したく形断面の場合、その角のところで n_x, n_y が不連続となる。これを n_x について図に示すと 図-4 の破線となる。一般

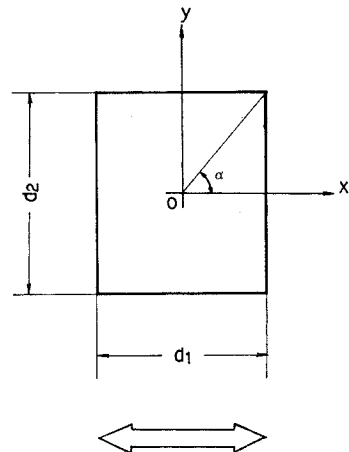


図-3 柱体の断面図と記号の説明

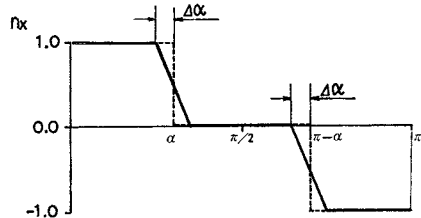


図-4 不連続点の処理の説明図

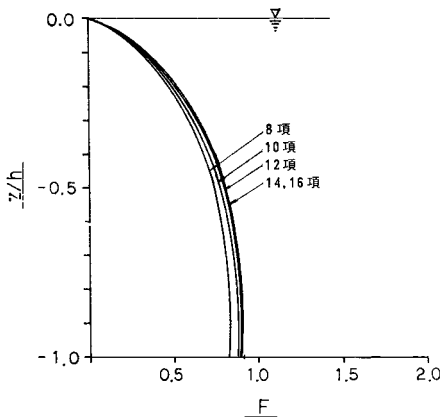


図-5 フーリエ級数の展開項数による F 値分布の比較

によく知られているように、不連続点を有する関数をフーリエ展開すると、項数を増やしても精度が上がらず、逆に不連続点で級数値が飛び出す Gibbs 現象¹⁶⁾ が現われる。これを避けるために、実際の計算にあたっては、図-4 中に実線で示した関数形を用い、図中の $\Delta\alpha$ を変えて動水圧分布などの収束を検討した。この結果、 $\Delta\alpha$ を $\pi/360$ 程度にとれば十分であることがわかり、以下に示す例ではすべて $\Delta\alpha = \pi/360$ に固定して計算を行った。これは、く形の角をわずかに丸めたことに相当するが、現実の構造物の n_x, n_y の関数形としては妥当なものである。

また、フーリエ級数項を何項とればよいかということも実際に計算をするうえで重要である。この項数と収束の関係の一例を図-5 に示す。この図は、正方形断面柱に対する F の値、すなわち、付加質量とこの正方形断面柱の幅と同直径の円筒が排除する流体の質量の比を、式 (34) によって求めたものである。図から、この場合 14 項で収束していることがわかる。一般的に断面形状が正方形に近い場合は、この程度の項数をとることにより実用上十分な範囲で収束するようである。しかし、断面形状が扁平になるに従って、多くの項数を必要とするようになるので、収束について注意が必要である。

(2) 角筒の剛振動による動水圧

a) 動水圧の 3 次元分布

断面形状が正方形の場合を例にとり、角筒の水中剛振動による、動水圧の最大値 p_{max} の 3 次元的な分布特性を $h/d=1.0$ の場合について 図-6 および 図-7 に示した。

図-6 は、深さ z と水深 h との比 z/h をパラメータとして、動水圧の平面的な分布を示したものである。この図にみられるように振動方向と直角な壁面では、動

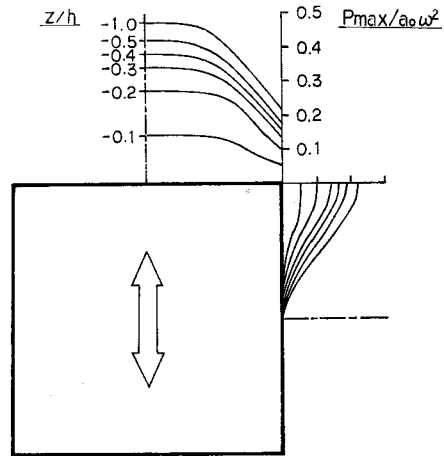


図-6 動水圧の分布例(周方向)

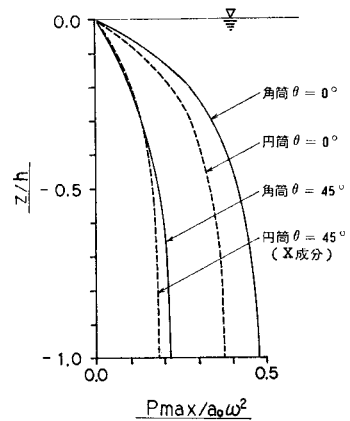


図-7 動水圧の分布例(鉛直方向)

水圧は面の中央部で大きく、端部にゆくほど小さくなっている。また、水面近くでは、動水圧分布はフラットであり、台形状の分布をしているが、水底近くになると、台形の上底にあたる部分が小さくなって、放物線に近い分布となることが知れる。円筒では、周方向分布は深さによらず余弦関数に従うから、この点円筒の動水圧分布と大きく異なるところである。側壁では、動水圧は中央部に向かってなだらかに減少し、中央部で 0 となるような分布性状をもつ。

図-7 は、振動方向正面中央および角筒の端部における動水圧の鉛直分布を示したものである。図中に破線で示したのは、角筒の幅と同じ直径の円筒の動水圧の x 方向成分である。これより、鉛直分布に関しては、角筒としての特徴は特になく、円筒と類似の分布性状をなしていることが知れる。ただし、動水圧の値そのものは、構造物正面で円筒に比べて約 2 割ほど大きいことがわかる。このため、後に述べるように動水圧を角筒のまわりに積分し、柱体の単位長さ当たりの力を求めると、円筒

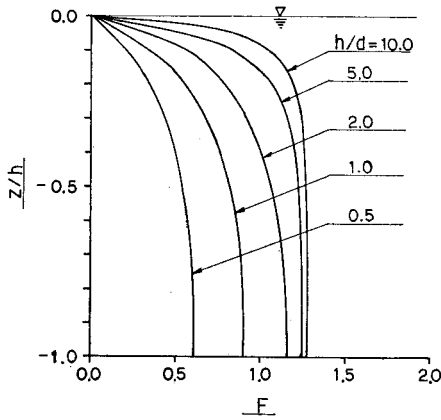


図-8 正方形断面柱の h/d による F の値

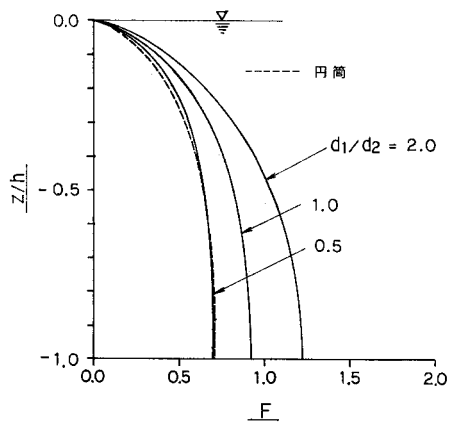


図-10 d_1/d_2 による F 値分布の比較 ($h/d_2=1.0$)

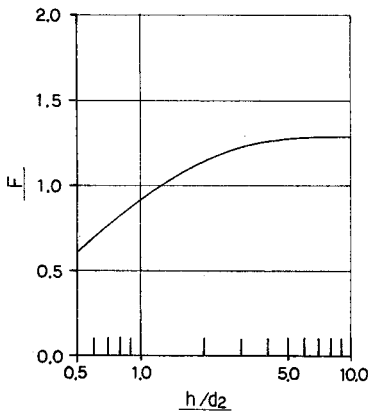


図-9 水底における F の値の細長比による変化

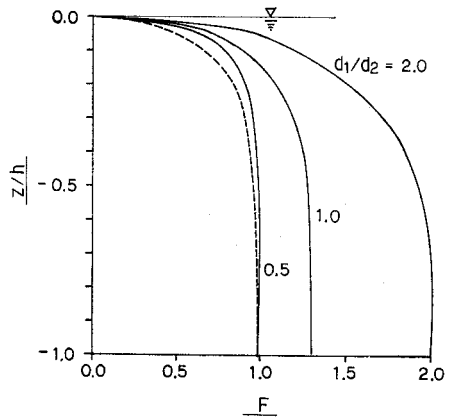


図-11 d_1/d_2 による F 値分布の比較 ($h/d_2=5.0$)

の場合よりも大きくなる。

b) 細長比の影響

図-8 は、幅 d の正方形断面柱に関して、 F の値を水深 h と幅 d の比 h/d をパラメーターとして示したものである。これによれば、角筒が細長くなるとともに F の値が大きくなる事が知れる。

h/d が無限大となる極限では、 F の値は2次元の場合に漸近するはずである。この関係を知るために、水底における F の値を h/d の関数として表現したのが 図-9 である。これによれば、正方形断面柱の場合、 F の極限值は 1.3 であり、 $h/d=5.0$ でほぼ極限值に達していることが知れる。以下では、 h/d が無限大となったときの F の極限值を F の2次元値とよぶ。

c) 奥行幅の影響

く形断面柱体の付加質量は、柱体の幅 d_2 、奥行幅 d_1 、および水深 h 等の関数である。小坪のだ円柱体に関する理論¹³⁾では、 d_1/d_2 の大小に関係なく、 h/d_2 が大きくなると F の値は1に近づく。この点が、く形断面柱体に関する実験結果と異なる点であり、実験ではこの

値は 1.2~1.3 となることが報告されている。したがって、本理論による計算値がどうなるかということは興味深い。

図-10 および 図-11 は、それぞれ水深幅比 h/d_2 が 1.0 および 5.0 の場合について、 F の計算値を示したものである。図中には、 $d_1/d_2=0.5, 1.0, 2.0$ の場合を実線で、比較のために d_2 を直径とする円筒の場合を破線で示してある。図より、 d_1/d_2 が大きいほど、すなわち、奥行幅が大きくなり振動方向に細長くなるほど、 F の値が大きくなる事が知れる。また逆に、 d_1/d_2 が小さくなり偏平となるほど、この値は小さくなって、 $d_1/d_2=0.5$ でほぼ円筒の場合に等しくなることがわかる。本解析法では、断面が偏平になるにつれて必要なフーリエ項も増えるので、 $h/d_2=0.5$ までしか計算を行っていないが、 $d_1/d_2 \rightarrow 0$ の極限ではだ円柱体とく形断面柱体ともに厚さが0の板となり、この極限值は小坪のだ円柱体に関する理論より1となる事が知れる。

また、 $h/d_2=5.0$ の場合の結果からわかるように、柱

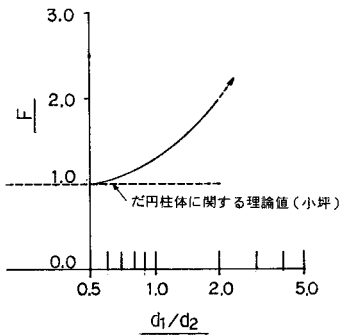


図-12 d_1/d_2 による F の2次元値

体が細長くなると、水底付近の F 値の勾配は無窮大となり、分布は2次元的となる。このとき F の値は各 d_1/d_2 によって一定となり、この値は $d_1/d_2=0.5, 1.0, 2.0$ に対してそれぞれ 1.0, 1.3, 2.0 である。

この2次元的な F の値を、種々の d_1/d_2 に対して計算した結果について 図-12 に示す。この図から、付加質量は $d_1/d_2=0.5$ で柱体の幅と同じ直径を有する円筒の場合に等しく、 d_1/d_2 がこれより大きくなると徐々に円筒の場合より大きくなり、 $d_1/d_2=1.0$ 、すなわち正方形断面柱体では 1.3 倍となることがわかる。このように、く形断面柱体の場合 d_1/d_2 の値によって F の2次元値は異なる。そしてこの点は、図中に破線で示した円柱体に関して小坪が得た結果と大きく異なり、く形断面柱体の付加質量特性の特徴である。

d) く形断面柱体の動水圧の近似式

動水圧を求めるための計算は、理論で述べたようになり複雑であるし、また、計算の道具として電子計算機を必要とするので、設計実務に用いるには不便である。実用上の立場からは、多小の誤差はあっても電卓等で簡単に計算できる近似式があれば便利であり、この観点から円筒の動水圧に関しては種々の近似式が提案されている^{19)~22)}。同様の趣旨により、く形断面柱体の動水圧の

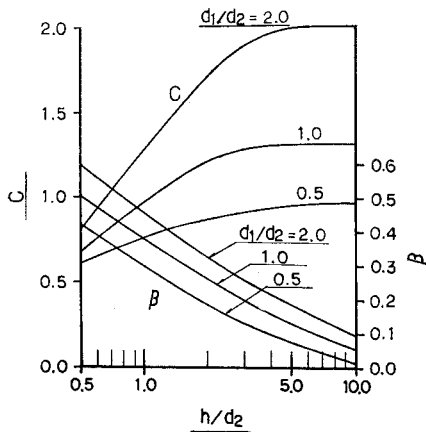


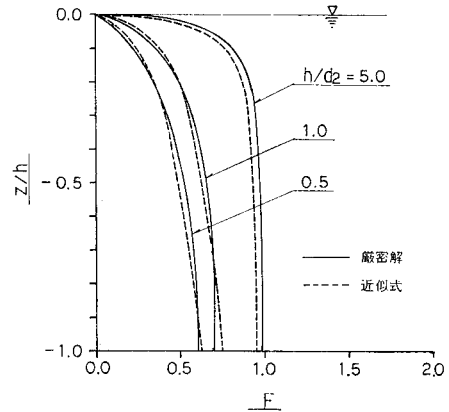
図-13 動水圧の近似式における c, β の値

近似式として次式を提案する。すなわち、柱体の高さ方向の単位長さ当たりに働く動水圧を P として、

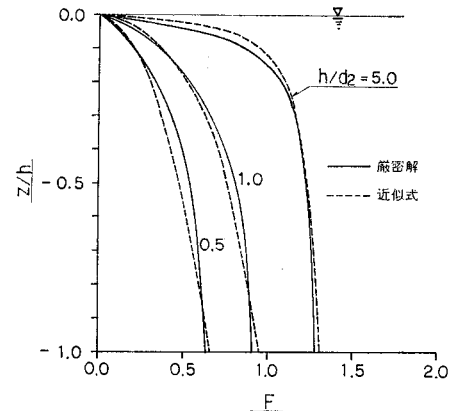
$$P = (\pi/4) \cdot \rho \cdot g \cdot K_h \cdot d_2^2 \cdot F \dots\dots\dots (35)$$

$$F = c \cdot |z/h|^\beta \dots\dots\dots (36)$$

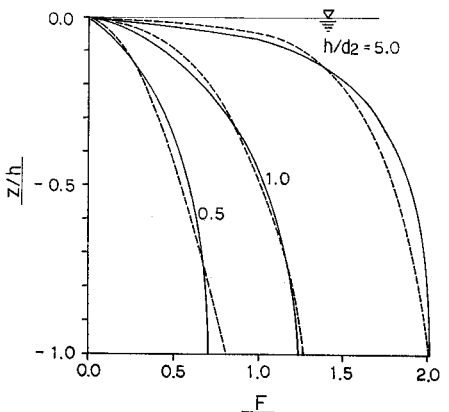
ここに、 K_h は水平震度、 d_2 は振動方向と直角な壁の幅である。また c および β は、厳密解から得られた計算



(a) $d_1/d_2=0.5$



(b) $d_1/d_2=1.0$



(c) $d_1/d_2=2.0$

図-14 近似式による値と厳密解との比較

結果に基づいて、柱体の運動方向の幅 d_1 とこれに直角な幅 d_2 との比 d_1/d_2 をパラメーターとし、水深 h と d_2 の比 h/d_2 の関数として 図-13 に示されている。

提案した近似式による計算値と、厳密解による計算値を比較したのが 図-14 (a)~(c) である。図からわかるように、近似式による計算値は各 h/d_2 および d_1/d_2 に対して、比較的好く厳密解に一致しており、誤差は高々数%程度である。ただし、適用範囲は $0.5 \leq h/d_2 \leq 10.0$ とする。

(3) 構造物形状による比較

a) 円筒、角筒および 45° 角筒

図-15 に示した 振動方向の 投影面の幅 d_2 が等しい 円筒および角筒について F の値を比較したのが 図-16, 17 である。角筒に関しては、壁面と平行に振動する場合と、対角線に平行に振動する場合の 2 ケースについて計算を行った。後者の場合を 45° 角筒とよぶことにする。

図-16 は $h/d_2=1.0$ 、図-17 は 5.0 の場合である。

これらの図からわかるように、 F の値は h/d_2 の値にかかわらず角筒、円筒、45° 角筒の順で大きい。対角線に平行に振動する 45° 角筒の場合、 F の値が円筒などに比べても小さくなるのは、動水圧の x 成分の値が柱体正面付近で円筒の場合の半分近くになっているためである。参考までに、 θ が $0 \sim \pi/2$ の間の構造物表面各点に

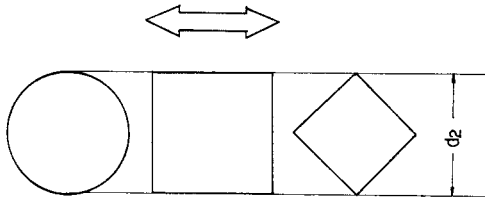


図-15 断面形状 (円筒、角筒、45° 角筒)

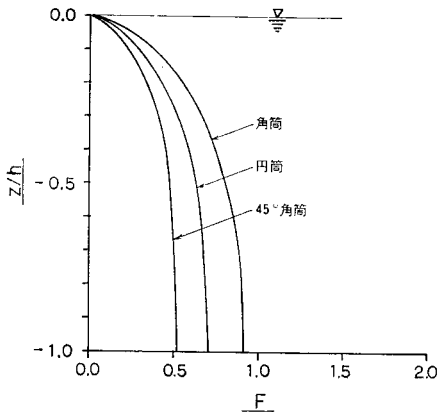


図-16 円筒、角筒、45° 角筒の F 値の比較 ($h/d_2=1.0$)

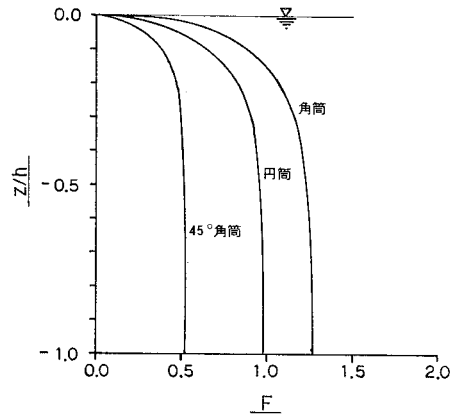


図-17 円筒、角筒、45° 角筒の F 値の比較 ($h/d_2=5.0$)

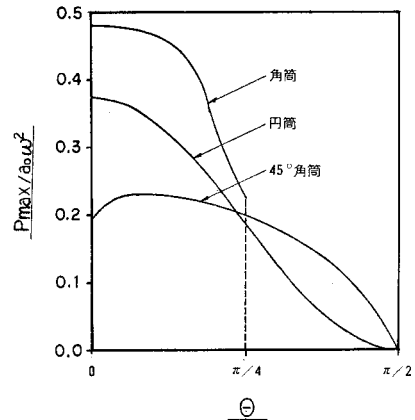


図-18 動水圧の x 成分の分布

おける動水圧の x 成分を、それぞれ円筒、角筒、45° 角筒について示すと 図-18 のようである。

b) 小判型断面柱体

次に 図-19 に示した小判型断面柱体と、く形断面柱体との比較について述べる。 $d_1/d_2=0.5$ の場合について、それぞれ F 値の鉛直分布を示したのが 図-20, 21 である。図-20 は $h/d_2=1.0$ 、図-21 は 5.0 の場合で

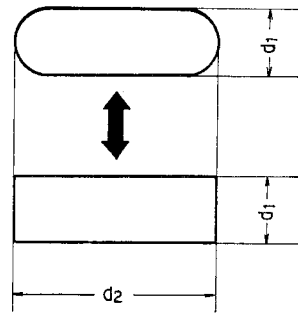


図-19 断面形状 (小判型、く形) と記号の説明

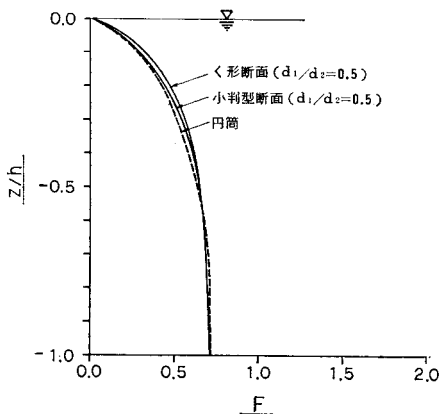


図-20 形状による F 値の比較 ($h/d_2=1.0$)

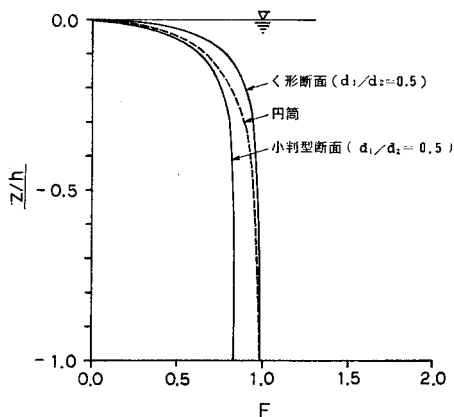


図-21 形状による F 値の比較 ($h/d_2=5.0$)

ある。なお、参考のために d_2 を直径とする円筒の F 値を、図中に破線で示した。図-20 から知れるように $h/d_2=1.0$ 、すなわち、柱体が比較的太く短い場合には、く形断面、小判型断面、さらには円形断面も、 F 値分布はほとんど差異がない。これに対して柱体が細長くなると図-21 にみられるごとく、く形断面と小判型断面では、分布性状はよく似ているものの、その値は歴然と異なっており、水底で、く形断面、円形断面、小判型断面に対して、それぞれ、0.99、0.99、0.85 である。

小判型断面は $d_1/d_2=1.0$ で円形断面となるから、 d_1/d_2 が 0.5 から 1.0 の間では上に示した値の間の中間の値をとるものと考えられる。0.5 < d_1/d_2 < 1.0 の各 d_1/d_2 に対して F の2次元値を計算し、 d_1/d_2 の関数として示したのが図-22 である。図中には、く形断面に対する値、および、小坪によるだ円断面に対する値を比較のために示してある。図からわかるように、小判型断面の場合 $d_1/d_2=1.0$ 、すなわち円形断面のときを最大値として、 d_1/d_2 が小さくなるに従って単調に減少し、 $d_1/d_2=0.5$ でその値は 0.91 となっている。フーリエ級数の収束の関係から d_1/d_2 が 0.5 以下の場合について

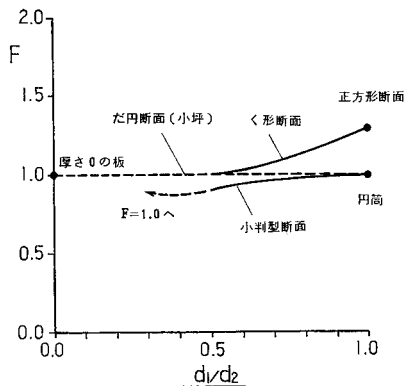


図-22 F の2次元値の形状による比較

は計算を行わなかったが、0 < d_1/d_2 < 0.5 なる d_1/d_2 に対しては、 F の値はそのまま単調に減少するのではなく、図中に破線で示したごとく途中で増加し、最終的に 1.0 に漸近するものと思われる。これは、く形断面、だ円断面、小判型断面、いずれも $d_1/d_2 \rightarrow 0$ では厚さが 0 の板となって、 F の値も同一値に収束するはずであり、その極限値はすでに述べたように小坪の理論¹³⁾により 1.0 であることが知っているから、容易に理解できるであろう。したがって、小判型断面の場合 d_1/d_2 の値によって F の極小値が存在することになる。この事実は図-23 に示した土岐の実験結果¹²⁾によっても裏付けられよう。この図は、土岐がく形断面柱体および小判型断面柱体に関して、 d/b の値を変化させて実験的に付加質量を求めたものであり、図中に示したように、グループ I、II、IV はく形断面、グループ III は小判型断面である。この中で、グループ II は模型の規模による影響を調べるのが目的で、グループ I の 2 倍の寸法となっている。また、グループ IV は振動様式の違いによる影響を調

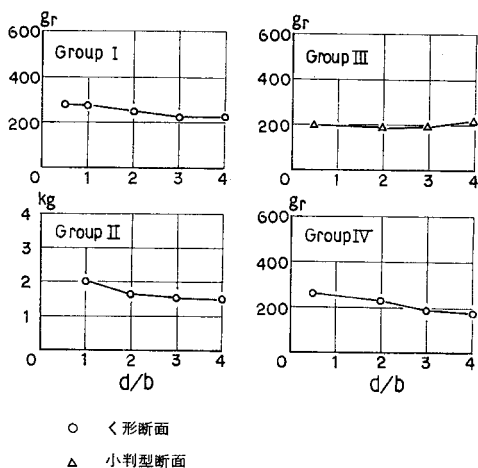


図-23 く形および小判型断面柱体の付加質量の実験値 (土岐による)

べるのが目的で、他のグループが模型下端のみ板ばねで支持されているのに対し、上下両端が支持されている。また、本論文で用いている記号とは $d=d_2$, $b=d_1$ の関係がある。したがって、 d/b の増大は断面が扁平になることであり、 $d/b=2.0, 4.0$ がそれぞれ $d_1/d_2=0.5, 0.25$ に対応する。すなわち、土岐の小判型断面柱体に関する実験結果は $d_1/d_2=0.33$ と 0.5 の間に付加質量の極小値、したがって F の極小値が存在することを示すものである。く形断面柱体に関する土岐の実験結果が、いずれも d_1/d_2 が小さくなるに伴って付加質量も減少するという。本理論による解析結果と一致していることなどを合わせて考えると、土岐の実験結果は、 d_1/d_2 が 0.5 以下の場合の小判型断面柱体の F 値の特性に関する先の推論を裏付けているものと解せられる。

以上述べたごとく、いずれにしても小判型断面の場合、 $0.5 < d_1/d_2 < 1.0$ なるすべての d_1/d_2 に対して、く形断面よりも F 値は小さく、したがって d_2 が同じ場合動水圧も小さい。これは、流体中を運動する柱体を考えた場合、く形断面のように角ばったものに比較して、その角を丸めた小判型断面などが流体中における慣性抵抗が減ることは、われわれが経験的によく知るところであり、常識的にも首肯できるであろう。図中に見る両者の F 値の違いは、これを理論結果として定量的に示したものとえよう。

(4) 理論の妥当性の検証

小林ら⁹⁾は、小型圧力変換器を用いて、正方形断面柱体が水中振動をするときの、動水圧分布に関する模型実験を行っている。ここでは、小林らの実験条件に合わせて本理論によって解析を行い、得られた結果を比較検討して、理論の妥当性について検証したので、これについて述べる。

実験は幅 4 m、長さ 5 m、水深 0.5 m の平面水槽の中央部に動電型振動台を設置した平面振動水槽で、一辺が 44.3 cm の正方形断面柱を用いて、振動方向が壁面に平行な場合と、対角線に平行な場合について行われている。

解析は実験と同様に、水深 0.5 m の水中において一辺 44.3 cm の正方形断面柱が、振動数 21.1 Hz、振動加速度 200 gal で調和振動をしているものとして行った。ただし、解析では構造物は平面的に無限な水域中に孤立していると仮定しているので、この点が有限な水槽中で行われた実験と条件が異なっている。しかし、この影響については小林らが検討しており、結論として無視できるものと考えられる。

計算値と実験値を比較したのが 図-24, 25 である。

図-24 は水深 0.4 m の位置での動水圧の周方向分布

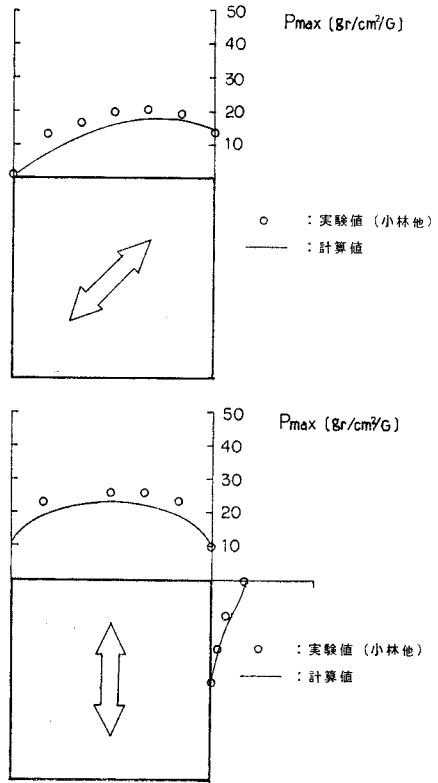


図-24 実験値⁹⁾との比較(周方向)

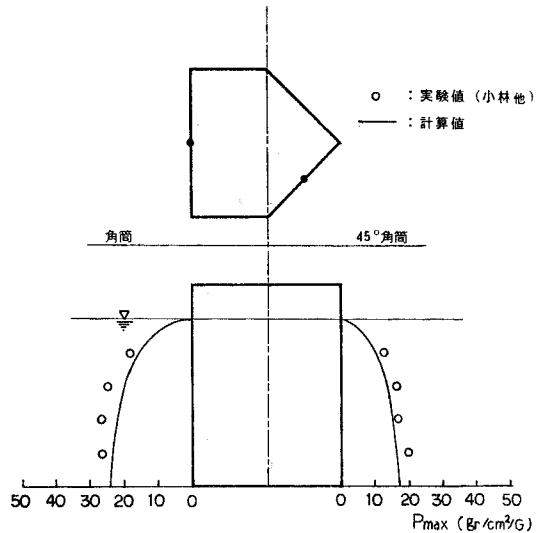


図-25 実験値⁹⁾との比較(鉛直方向)

を、図-25 は壁中央部における鉛直分布を示している。図中実線は本理論による計算値、○印は小林らによる実験値である。また、●印は動水圧の測定および計算位置を示す。壁面に平行に振動する場合、対角線に平行に振動する場合ともに、計算値は実験値よりも若干小さめであるものの、分布性状はよく一致している。実験値が大

きめに出る原因として、理論で考慮しなかった水の粘性、運動の有限振幅性等の影響が考えられるが、今回はこれについての結論を出すに至らなかった。しかし、いずれにしてもここに示した実験値との比較の結果は、本文中に示した面対称柱体に関しての理論が妥当なものであるということ、立証しているものと解してよいであろう。

4. 結 論

一般的な面対称柱体の地震時動水圧を解析するための3次元理論を導き、これによって、く形断面柱体、小判型断面柱体等の動水圧および付加質量特性について検討した。また、あわせて既存の実験結果と比較して理論解析法の妥当性について検証した。これらによって得られた結果を以下のごとくまとめ、これを結論とする。

(1) 面体称柱体の水中剛振動に伴う流体の速度ポテンシャルは、フーリエ展開および固有関数展開を用いると、一般的に式(11)のごとく表わすことができる。

(2) 一般解(11)中の未定係数は、個々の構造物形状に対応して、複素係数連立1次方程式(24)および(28)の解として得られる。これを式(11)に代入すると速度ポテンシャルが得られ、動水圧は式(30)、付加質量は式(33)から求めることができる。

(3) 本文中では省略したが、本理論解析法を円筒構造物に適用すると、円筒が剛振動をするときの解が解析的に得られる。したがって、本理論は円筒の場合の拡張となっているといえることができる。

(4) く形断面柱体では、動水圧は、前面浅水部で台形状、深水部で放物線状であり、側面では中央部に向かってなだらかに減少し、中央部で0となるような分布性状をもつ。

(5) 正方形断面柱体では、水深 h と幅 d の比 h/d が大きいくほど動水圧は大きく、 $h/d=5.0$ で、水底における値はほぼ2次元値に達する。これは、正方形断面以外のく形断面の場合も同様である。

(6) 正方形断面柱の F 値、すなわち、付加質量とく形の幅と同じ直径をもつ円筒が排除する流体の質量の比の2次元値は1.3である。この結果は小坪の実験結果¹³⁾と一致する。ただし、断面が扁平となると実験値の方が本理論解析法による計算値よりも大きくなる。これは小坪のただ円柱体に関する理論と実験の比較でも同様であり、流体の粘性の効果によるものと考えられる。

(7) く形断面柱体に対する F 値は、柱体の振動方向の幅 d_1 と、これに直角な幅 d_2 との比が小さいほど小さく、 $d_1/d_2=0.5$ で円筒の場合とほぼ同じになる。これは小坪が得た、だ円柱体に関する結論とは逆である

が、小坪¹³⁾および土岐¹²⁾の実験結果は上記の結論を支持するものである。

(8) く形断面柱体に関する F の2次元値は d_1/d_2 の関数であり、この関係は図-12に示したごとく $d_1/d_2=2.0$ で $F=2.0$ 、1.0で1.3、以下単調に減少し、 $d_1/d_2=0.5$ で $F=1.0$ となる。

(9) く形断面柱体の動水圧を計算するための近似算定式を提示した。これによって動水圧を計算するには、まず d_1/d_2 、 h/d_2 の値に対応して図-14から c 、 β の値を読み取り、これを式(36)に代入して F の値を求める。そして、これを式(35)に代入すれば柱体の単位長さ当たりの動水圧を求めることができる。

(10) 振動方向に直角に同じ幅をもつ角筒、円筒、45°角筒の順に動水圧が大きい。

(11) 同じ d_1/d_2 の値をもつく形断面柱体と小判型断面柱体では、小判型の方が動水圧が小さく、しかも同じ幅をもつ円筒よりも小さいので、耐震上有利な形状であるといえる。ただし、柱体が太く短い場合には、この効果は小さい。

(12) 小判型断面柱体の場合、動水圧が極小となるような d_1/d_2 が存在する。

(13) 実験値との比較による検討の結果は、いずれも本理論の妥当性を支持するものであった。

以上、本研究で得られたおもな成果を要約して述べた。本研究により、従来不明確であったく形断面柱体等の3次元付加質量特性をかなり明らかにできたと考えられる。しかし、水中構造物の耐震設計法を確立してゆくためには、なお解決すべき課題は多く、軸対称構造物の厳密解、動水圧の過渡現象なども残された重要な課題の一つであろう。この点についても今後研究を進めてゆく所存である。

おわりに、本論文をまとめるにあたって東京工業大学日野幹雄教授に貴重なご助言をいただいたことを記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 桜井彰雄：水中構造物の振動，電力中央研究所報告，昭38.8.
- 2) 桜井彰雄：水中に立てられた柱状構造物の振動，土木技術，第16巻6号，pp. 11~17, 1961.
- 3) 後藤尚男・土岐憲三：水中橋脚の振動と耐震設計に関する基礎的研究，土木学会論文集，No. 100, pp. 1~8, 昭38.12.
- 4) Jacobson, L.S. : Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and of fluid surrounding a cylindrical pier., Bulletin, S.S.A., Vol. 39, pp. 189~204, 1949.
- 5) Chadrsekaran, A.R. et al. : Hydrodynamic pressure on circular cylindrical cantilever structure surrounded by water, 4th Symposium on Earthquake Eng., pp. 161~171, Nov., 1970.
- 6) 伊藤喜行・木原 力：円柱の動揺に伴う造波抵抗，港湾技

- 術研究所報告，第 11 卷，第 3 号，1972.
- 7) 岡本舜三・加藤勝行・伯野元彦：水中構造物の模型振動実験，土木学会第 17 回年次学術講演会概要，pp. 79～80，1962.
 - 8) 小林 浩・田中正博・蔵田忠広：海洋構造物に作用する地震時動水圧，第 24 回海岸工学講演会論文集，pp. 404～408，1977.
 - 9) 前出 8)
 - 10) Snelson, T.E. and F.T. Mavis : Virtualmass and acceleration in fluid, Trans. A.S.C.E., Vol. 122, 1957.
 - 11) Clough, R.W. : Effects of earthquakes on underwater structures, 2nd W.C.E.E., Vol. II, pp. 815～831, 1960.
 - 12) 土岐憲三：構造物基礎の地震応答に関する研究，京都大学学位論文，pp. 19～28，昭.44.3.
 - 13) 小坪清真：だ円形水中橋脚に働く地震力とその弾性振動，土木学会論文集，No. 120, pp. 14～24，昭.40.8.
 - 14) 桜井彰雄：仮想質量と水中における柱の振動，土木学会第 15 回年次学術講演会概要，III-29，昭.35.
 - 15) ズンマーフェルト：物理数学—偏微分方程式論—，講談社，pp. 201～206，昭.51.
 - 16) 井島武士：最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用，1971 年度水工学に関する夏期研修会講義集，B-1，1971.
 - 17) 寺沢寛一：自然科学者のための数学概論，岩波書店，pp. 16～18，1972.
 - 18) 日野幹雄：スペクトル解析，朝倉書店，pp. 10～13，1977.
 - 19) 前出 2)
 - 20) 前出 12)
 - 21) 土岐憲三・手塚昌信：水中橋脚に働く動水圧の近似計算式について，土木学会第 20 回年次学術講演会概要，昭.40.
 - 22) 小坪清真・高西照彦：多柱基礎橋脚に対する水の付加質量の 3 次元解析，土木学会論文報告集，No. 259, pp. 25～39，1977.3.

(1981.4.17・受付)