

水平帯状の不圧浸透層内の円形暗きよへの浸透流

GROUNDWATER FLOW INTO INFILTRATION GALLERY IN HORIZONTAL UNCONFINED AQUIFER

杉 尾 哲*

By Satoru SUGIO

1. 緒 言

集水暗きよは、飲料用水、農工業用水などの取得や、地下余剰水の排除を目的として広く利用されている。この暗きよの利用を計画する場合には、あらかじめ必要水量が得られるか、あるいは自由地下水面の必要低下が行われるかなどを十分に検討しておかなければならない。このため、たとえば Donnan¹⁾、Muskat²⁾、Hooghoudt、Luthin、Deemter、Kirkham^{3),4)} など数多くの研究者によって行われた研究結果が参照されるが、これらの研究で提唱された算定式の中には、十分に満足できる結果を与え得ないものもあり、合理的な水管理を図るのに困難な場合があった。このようなことから、著者らはこれまでも、おもに円形暗きよについて、種々の境界のもとで理論的な検討を行ってきたが^{5)~9)}、本報はその研究の一部として行ったものであり、境界条件として、地表面下の比較的浅い位置に水平な不透水層がある浸透層において、地表面に湛水がなく、地下水が自由地下水面を形成して円形暗きよに流入している場合を取り扱っている。この場合には、暗きよ取水量だけでなく、自由地下水面の形状そのものが解析の対象となり、暗きよ取水により自由地下水面がもとの位置からどの程度低下するかが問題となる。

解析は、不透水層が存在するために、半無限領域における同様の解析¹⁰⁾の際に採用した Zhukovsky 関数が有効な変換とならないので、本報では Hodograph 法¹¹⁾を採用し、その解析結果を Hell-Shaw モデル実験によって検証した。また解析結果の算定は、かなり煩雑なものとなるため、実用性を考慮して、暗きよ取水量については解析結果と同程度の数値を与える近似算定式を導出し、従来の取水量算定式による算定結果と対比させて、その有用性を検討した。

2. 基礎式

図-1 に示すような流れの場において、Darcy 則が成立する場合の任意点 (x, y) の速度ポテンシャル ϕ は、その点の圧力を p 、透水係数を k 、水の単位体積重量を w とすると

$$\phi = k \{ (\rho/w) \cdot y + \dots \} \dots \dots \dots (1)$$

で表わされる。また x 方向および y 方向の浸透流速を u および v とし、

$$U = u + i(-v) \dots \dots \dots (2)$$

の複素流速を考えると、複素ポテンシャル $W(\phi + i\psi)$ との間には、

$$dW/dZ = -U \dots \dots \dots (3)$$

が成立する。

いま自由地下水面について考えると、条件式は $\phi = ky, \psi = 0$ であり、これらを接線方向 s で微分すると

$$\begin{aligned} u \cdot \partial x / \partial s + v \cdot \partial y / \partial s &= -k \partial y / \partial s \\ v \cdot \partial x / \partial s - u \cdot \partial y / \partial s &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。両式より $\partial x / \partial s, \partial y / \partial s$ を消去すると

$$u^2 + (v + k/2)^2 = k^2/4 \dots \dots \dots (4)$$

が得られるから、式 (2) の実数部と虚数部を 2 軸とするホドグラフ平面を考えると、この平面においては、自由地下水面は中心を $(0, -k/2)$ 、半径を $k/2$ とする円で表示される。また流線はその接線と x 軸とのなす角を θ とおくと、 $\psi = \text{const.}$ より、

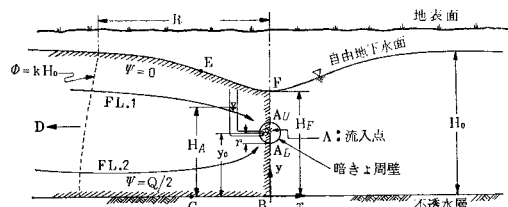


図-1 暗きよ内が満水の場合の z 平面 [$z = x + iy$]

* 正会員 工博 九州産業大学助教授 工学部土木工学科

$$v/u = \tan \theta \dots\dots\dots (5)$$

となるから、流線が直線の場合には座標軸の原点を通る角 θ の直線で表示される。

したがって、ホドグラフ平面を用いれば、解析的に複雑な曲線で画されていた図-1は、簡単な境界内に写像され、写像を繰り返すことによって複素ポテンシャル平面へと写像できることになる。以上の基礎式を用いて、図-1の暗きよへの流れを解析しよう。

3. 複素ポテンシャルの解析

(1) ホドグラフ平面の式

暗きよ内に流入点を仮想して、暗きよへ向かう流れを流入点へ向かう流れに置き換え、このポテンシャル流の解を用いて暗きよへの流れを解析する。ここに図-1の流れは暗きよ中心軸に関して左右対称であるから、暗きよ中心軸より左側の部分について領域の写像を考えてみよう。ここで影響範囲を設定して解析するので、自由地下水面がしだいに回復してもとの高さ H_0 に一致する影響範囲より遠方では、自由地下水面は $H=H_0$ の一定の場合を考えているが、解析上は影響範囲以遠でもなお増大して無限に高くなってゆくと考えておき、解としては $0 \leq kH_0$ の範囲内を採用する。

まず図-1の領域内部をホドグラフ平面 U に描いてみよう。いまD点を無限遠点に選ぶと、D点では $H=\infty$ となり $u=0$ である。不透水層のBD線上では $u \geq 0$ であるが、B点とD点で $u=0$ となるから、BD区間内で u が極大値をとる点が存在し、この点をCとする。また自由地下水面のDF線上で接線の勾配が最大となる点をEとする。式(4)および式(5)に従って領域境界の各線分の対応を考えると、表-1のようになり、図-1の y 軸より左側の浸透領域は図-2の縦軸の右側に写像される。なお図中のFL. 1, FL. 2は流線を示したものである。ついで、この U 平面を

$$k/U = U' = u' + iv' \dots\dots\dots (6)$$

によって U' 平面に写像する。式(6)に式(2)を代入すると、

$$u' + iv' = k(u + iv) / (u^2 + v^2) \dots\dots\dots (7)$$

であり、これに式(4)を代入すると、 $v' = -1$ を得る。すなわち U' 平面で円弧をなす自由地下水面は U' 平面

表-1 領域境界線分の対応

z 平面	U 平面	U' 平面	W 平面
自由地下水面 DEF	式(4)の円弧	$u \geq 0, v \leq 0$	$u' > 0, v' = -1$
領域中央軸 FA	式(5)の直線	$u = 0, v \leq 0$	$u' = 0, v' \leq 0$
" AB	"	$u = 0, v \geq 0$	$u' = 0, v' \geq 0$
不透水層上面 BCD	"	$u \geq 0, v = 0$	$u' > 0, v' = 0$

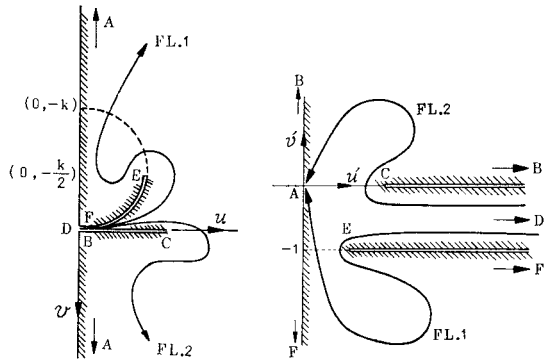


図-2 U 平面 [$U=u + i(-v)$] 図-3 U' 平面 [$U'=u' + iv'$]

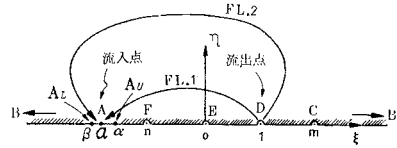


図-4 z 平面 [$z = \xi + i\eta$]

では $v' = -1$ の直線に写像されることになる。また $u = 0$ あるいは $v = 0$ の直線は $u' = 0$ あるいは $v' = 0$ の直線に写像されるが、 $u = v = 0$ の B, D および F 点は無限遠点に対応し、流入点 A は原点に対応する。 U' 平面を図示すると図-3のようであり、すべて直線境界で表わされている。この多角形の内部(ハッチの部分)を図-4の z 平面上半面に写像するとき、E点(多角形の内角: $\alpha_1 = 2\pi$)を $\zeta = 0$ に、D点($\alpha_2 = 0$)を $\zeta = 1$ に、B点を無限遠点を選び、C点($\alpha_3 = 2\pi$)の位置を $\zeta = m$ 、F点($\alpha_4 = -\pi/2$)を $\zeta = n$ (ここに m および n は実数)、係数を M とおくと、 U' 平面から z 平面への写像関数は Schwarz-Christoffel の変換式より、

$$U'(\zeta) = M \int \frac{\zeta \cdot (\zeta - m)}{\sqrt{(\zeta - n)^3 \cdot (\zeta - 1)}} d\zeta$$

となり、その積分結果は式(8)のようになる。

$$U'(\zeta) = 2M \left\{ \sqrt{\zeta - n} - \frac{K_1}{\sqrt{\zeta - n}} - K_2 \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{1-n} + \sqrt{\zeta - n}}{\sqrt{1-n} - \sqrt{\zeta - n}} \right| \right\} + C \dots (8)$$

$$\left[\begin{aligned} K_1 &= n(m-n)/(1-n) \\ K_2 &= (1-m)/\{2\sqrt{(1-n)^3}\} \end{aligned} \right]$$

式(8)に

$$\zeta = \xi + i\eta \dots\dots\dots (9)$$

を代入して実数部と虚数部に分けると、式(10), (11)を得る。

$$u' = 2M \left\{ f_1 - \frac{K_1 f_1}{f_1^2 + f_2^2} - \frac{K_2}{2} \cdot \ln \left(\frac{(\sqrt{1-n} + f_1)^2 + f_2^2}{(\sqrt{1-n} - f_1)^2 + f_2^2} \right) \right\} + C_1 \dots\dots\dots (10)$$

$$v' = 2M \left\{ f_2 + \frac{K_1 f_2}{f_1^2 + f_2^2} - K_2 \cdot \tan^{-1} \frac{2\sqrt{1-n} f_2}{1-n-f_1^2-f_2^2} \right\} + C_2 \dots (11)$$

$$\begin{cases} f_1 = \sqrt{\{\xi-n + \sqrt{(\xi-n)^2 + \eta^2}\}/2} \\ f_2 = \sqrt{\{-(\xi-n) + \sqrt{(\xi-n)^2 + \eta^2}\}/2} \end{cases}$$

ここに、FAB 区間は $\xi \leq n, \eta=0, u'=0$ であるから、式 (10) より $C_1=0$ を得る。また BCD 区間は $\xi > n, \eta=0$ であり、DEF 区間では $n \leq \xi < 1, \eta=0$ であるが、BCD 区間で $\tan^{-1} 0 = \pi$ 、DEF 区間で $\tan^{-1} 0 = 0$ と選ぶと、DEF 区間では $v' = -1$ であるから、式 (11) より $C_2 = -1$ となる。また BCD 区間では $v' = 0$ であるから、式 (11) より次式を得る。

$$M = \frac{\sqrt{(1-n)^3}}{(m-1)\pi} = \frac{-1}{2\pi K_2}$$

(2) 複素ポテンシャルの式

以上によって、図-1 の暗きよ中心軸より左側の浸透領域が図-4 の上半面に写像された。これと同様にして、図-1 の右側の領域は図-4 の下半面に写像されるから、図-1 の両側から流入点へ向かう流れは、無限領域に流入点 ($\xi=a, \eta=0$) と流出点 ($\xi=1, \eta=0$) が1個ずつ存在する場合のポテンシャル流に写像されたことになる。このポテンシャル流の複素ポテンシャルは、流入点への流入量を Q とおくと、次式で表わされる。

$$W = \frac{Q}{2\pi} \cdot \ln \frac{\zeta-a}{\zeta-1} + \mu \dots (12)$$

また式 (12) を実数部と虚数部に分けると

$$\phi = \frac{Q}{4\pi} \cdot \ln \frac{(\xi-a)^2 + \eta^2}{(\xi-1)^2 + \eta^2} + \mu \dots (13)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \cdot \tan^{-1} \frac{(a-1)\eta}{(\xi-a)(\xi-1) + \eta^2} \dots (14)$$

となる。ここに式 (13) の μ の値は、自由地下水面の最低点 F ($\xi=n, \eta=0$) の z 平面での高さを $y=H_F$ とおくと、式 (1) より $\phi_F = kH_F$ であるから、

$$\mu = kH_F - \frac{Q}{2\pi} \cdot \ln \left| \frac{n-a}{n-1} \right|$$

である。なお流れ関数 ψ の値は DEFA 線上で $\psi=0$ 、DCBA 線上で $\psi=Q/2$ の値をとるように選んでいる。

(3) z 平面の式

次に ζ 平面と z 平面との間の関係式を求める。まず式 (3) に式 (6) を代入して、 ζ の導関数で表示し直すと

$$dz/d\zeta = -(U'/k) \cdot (dW/d\zeta) \dots (15)$$

となる。ここに U' は式 (8) で表わされ、 $dW/d\zeta$ は式 (12) より、

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{a-1}{(\zeta-a)(\zeta-1)} \dots (16)$$

と表わされるから、これを式 (15) に代入すると、

$$z = -\frac{Q}{2\pi k} \int \frac{a-1}{(\zeta-a)(\zeta-1)} \cdot U'(\zeta) d\zeta \dots (17)$$

が得られる。この式 (17) を式 (12) と連立させれば、 ζ 平面を媒介として、 z 平面と W 平面の対応がつくので、図-1 の流入点への流れが解けたことになる。

(4) 暗きよ取水量と自由地下水面

式 (12)、(17) に各点の境界条件を与えて、自由地下水面の形状および暗きよへの流入量の算定式を導こう。

まず自由地下水面 DF に沿う式 (17) の積分を考える。ここに自由地下水面は、 ζ 平面では ξ 軸上の $n \leq \xi < 1$ の区間に対応し、 U' 平面では $v'=1$ の直線に対応するから、式 (17) に $\zeta=\xi, U'=u'-i$ を代入して $n \leq \xi < 1$ の区間で積分すると、 z 平面上の自由地下水面上の任意点の座標 (x, y) が式 (18) のように表わされる。

$$x+iy = \frac{Q}{\pi k} \left\{ M \left(\frac{n-a+K_1}{\sqrt{n-a}} \cdot 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{\xi-n}{n-a}} - \frac{1-n-K_1}{\sqrt{1-n}} \cdot L(\xi) \right) + \frac{1-a}{2\pi} \int_n^\xi \frac{L(\xi)}{(\xi-a)(\xi-1)} d\xi \right\} + i \frac{Q}{2\pi k} \cdot \ln \left| \frac{\xi-a}{\xi-1} \cdot \frac{n-1}{n-a} \right| + iH_F \dots (18)$$

$$L(\xi) = \ln \left| \frac{\sqrt{1-n} + \sqrt{\xi-n}}{\sqrt{1-n} - \sqrt{\xi-n}} \right|$$

この式 (18) が自由地下水面形状の算定式である。また自由地下水面が取水以前のもとの高さ H_0 に回復する位置を考え、その位置の座標を z 平面で $(-R, H_0)$ 、 ζ 平面で $(r, 0)$ [$0 < r < 1$] とおくと、式 (18) の積分の上限を $\xi=r$ とすることにより、次式が得られる。

$$-R = \frac{Q}{\pi k} \left\{ M \left(\frac{n-a+K_1}{\sqrt{n-a}} \cdot 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{r-n}{n-a}} - \frac{1-n-K_1}{\sqrt{1-n}} \cdot L(r) \right) + \frac{1-a}{2\pi} \int_n^r \frac{L(\xi)}{(\xi-a)(\xi-1)} d\xi \right\} \dots (19)$$

$$H_0 = \frac{Q}{2\pi k} \cdot \ln \left| \frac{r-a}{r-1} \cdot \frac{n-1}{n-a} \right| + H_F \dots (20)$$

次に領域中央軸 BF に沿う式 (17) の積分を考える。ここに領域中央軸 BF は、 ζ 平面では ξ 軸上の $\xi \leq n$ の区間に対応し、 U' 平面では v' 軸に対応するから、式 (17) に $\zeta=\xi, U'=iv'$ を代入して積分することになる。

まず不透水層上の B 点から自由地下水面の最低点 F までの積分は、積分区間が $-\infty \leq \xi \leq n$ となるが、途中に特異点 A ($\zeta=a$) を含むから、A 点における留数を求めて積分結果を整理すると、虚数部より、

$$H_F = \frac{Q}{\pi k} \left\{ M\pi \frac{1-n-K_1}{\sqrt{1-n}} + \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-a}{n-a} \right| \right\} \dots (21)$$

実数部より，

$$2M \frac{n-a+K_1}{\sqrt{n-a}} + \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \sqrt{\frac{n-a}{1-n}} - 1 = 0 \dots (22)$$

が得られる。

B点から暗きよ周壁下端 A_L 点 ($x=0, y=y_0-r$) までの積分は， ξ 軸上の A_L 点の位置を $\xi=\beta$ とおくと， $-\infty \leq \xi \leq \beta$ の区間での積分になり，

$$y_0-r = \frac{Q}{\pi k} \left\{ M \left(\frac{n-a+K_1}{\sqrt{n-a}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{n-a} + \sqrt{n-\beta}}{\sqrt{n-a} - \sqrt{n-\beta}} \right| + \frac{1-n-K_1}{\sqrt{1-n}} \cdot 2 \cot^{-1} \sqrt{\frac{n-\beta}{1-n}} \right) + \frac{1-a}{\pi} \int_0^{1/\sqrt{n-\beta}} \frac{2t \cdot \cot^{-1} \{1/(\sqrt{1-n}t)\}}{\{(n-a)t^2-1\}\{(1-n)t^2+1\}} dt \right\} \dots (23)$$

を得る。

暗きよ周壁の上端 A_U 点 ($x=0, y=y_0+r$) については，暗きよ内が満水状態と未満水状態とで境界条件が異なるので，それぞれ別個に考える。

暗きよ内が満水状態の場合には， A_U 点から F 点までの積分を考える。 ξ 軸上の A_U 点の位置を $\xi=\alpha$ とおくと， $\alpha \leq \xi \leq n$ の区間での積分となり，

$$H_F - (y_0+r) = \frac{Q}{\pi k} \left\{ M \left(\frac{n-a+K_1}{\sqrt{n-a}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{n+a} - \sqrt{n-a}}{\sqrt{n+a} + \sqrt{n-a}} \right| + \frac{1-n-K_1}{\sqrt{1-n}} \cdot 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{n-a}{1-n}} \right) + \frac{1-a}{\pi} \int_0^{\sqrt{n-a}} \frac{2t \cdot \cot^{-1} (t/\sqrt{1-n})}{(n-a-t^2)(1-n+t^2)} dt \right\} \dots (24)$$

となる。

次に暗きよ内が満水状態の場合の，暗きよ周壁上の速度ポテンシャルについて考える。不透水層から測った暗きよ内の圧力水頭を H_A とおくと，式 (1) より暗きよ周壁上の各点は $\phi = kH_A$ の等ポテンシャルであり，暗きよ周壁下端 A_L 点では式 (13) に $\xi=\beta, \eta=0$ を代入して，

$$H_A = \frac{Q}{2\pi k} \cdot \ln \left| \frac{\beta-a}{\beta-1} \cdot \frac{n-1}{n-a} \right| \dots (25)$$

を得る。また暗きよ周壁先端 A_U 点 ($\xi=\alpha, \eta=0$) においても

$$H_A = \frac{Q}{2\pi k} \cdot \ln \left| \frac{\alpha-a}{\alpha-1} \cdot \frac{n-1}{n-a} \right|$$

となるから，これを式 (25)

と連立させると

$$\alpha = \{2a - (1+a)\beta\} / (1+a-2\beta) \dots (26)$$

を得る。したがって暗きよ内が満水状態の場合の，自由地下水面の最低点の高さ H_F と流入点への流入量 Q は，式 (19)~式 (26) の 8 式を連

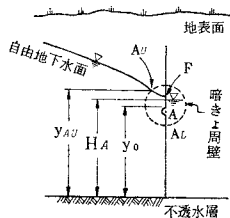


図-5 未満水の場合の z 平面

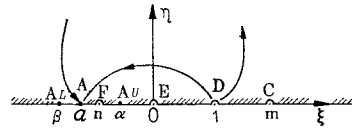


図-6 未満水の場合の ζ 平面

立させて，与えられた境界 H_A, r, R, H_0, y_0 について解くことによって得られる。

次に暗きよ内が未満水状態の場合には， A_U 点を図-5 のように，暗きよ周壁と自由地下水面との交点に選び， ξ 軸上の α の値を $n < \alpha < 1$ の範囲で考えるものとする。このようにすると， A_U 点の位置は式 (18) の自由地下水面の算定式から与えられ，式 (18) の積分の上限を $\xi=\alpha$ とすることによって，実数部と虚数部から次式が得られる。

$$x_{A_U} = -\sqrt{r^2 - (y_{A_U} - y_0)^2} = \frac{Q}{\pi k} \left\{ M \left(\frac{n-a+K_1}{\sqrt{n-a}} \cdot 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{\alpha-n}{n-a}} - \frac{1-n-K_1}{\sqrt{1-n}} \cdot L(\alpha) \right) + \frac{1-a}{2\pi} \int_n^\alpha \frac{L(\xi)}{(\xi-a)(\xi-1)} d\xi \right\} \dots (27)$$

$$y_{A_U} = \frac{Q}{2\pi k} \cdot \ln \left| \frac{\alpha-a}{\alpha-1} \cdot \frac{n-1}{n-a} \right| + H_F \dots (28)$$

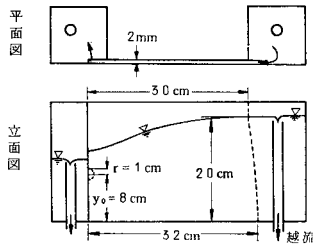
また暗きよ内が未満水状態の場合にも，暗きよ内の水面の高さを H_A とおくと，暗きよ内水面より下側の暗きよ周壁上の各点は $\phi = kH_A$ の等ポテンシャルであり，暗きよ周壁下端 A_L 点では式 (25) が成立する。したがって，暗きよ内が未満水状態の場合の流入点への流入量などは，式 (19)~(23)，(25)，(27) および (28) の 8 式から求めることになるが，未知数として y_{A_U} が 1 個増えたために，一般には解は求まらない。そこで，半無限浸透領域の場合¹⁰⁾と同様の， y_{A_U} が最小の場合の解を次の方法により求め，これを暗きよ内が未満水状態の場合の解とした。まず式 (19)~(23)，(25)，(27) および (28) に R 以外の境界条件を与えて， $n=0, y_{A_U}=H_A$ について解き， R_0 の値を求める。境界条件として与える R の値が $R < R_0$ であれば $n=0$ とおき， $R > R_0$ であれば $y_{A_U}=H_A$ において，再び上記の 8 式を解くと，暗きよ内が未満水状態での流入点への流入量 Q と暗きよ周壁位置での自由地下水面の高さ y_{A_U} および H_F (この場合には物理的な意味はない) が求まる。

以上によって求めた流入点への流入量 Q を，求める暗きよ取水量 Q と考える。

4. モデル実験による検証

以上の解析結果の検証実験として，Hele-Shaw モデ

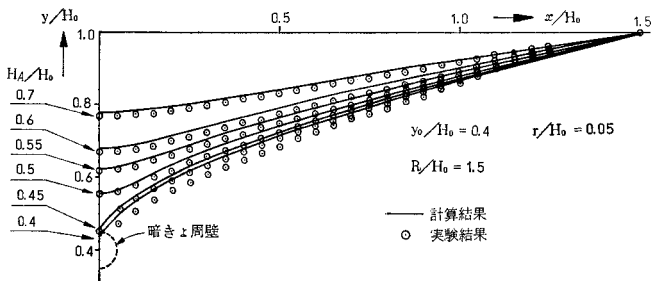
ルを用いた実験を行った。実験装置は図一7の概略図に示すような、2枚の透明アクリル板を用いたもので、裏側の板の上流部を立面図の点線のように切り、表側の板との間を2



図一7 実験装置の概略図

mmの間隔で保って浸透領域とした。この点線の形状は $y_0=8\text{ cm}$, $r=1\text{ cm}$, $H_0=20\text{ cm}$, $R=30\text{ cm}$ の境界条件のもとで、不透水層上で $\phi=kH_0$ となる位置を種々の暗きよ内水頭について算定し、その平均位置 ($x=32\text{ cm}$) と自由地下水面上の $\phi=kH_0$ の位置をなめらかな曲線で結んだものである。粘性流体には油温 20°C で $\nu=0.83\text{ cm}^2/\text{s}$ の機械油を用いた。動粘性係数の値は油温によって異なるので、実験時に油温を測定し、Red Wood 粘度計によってあらかじめ作成しておいた検定線から値を読み取った。実験は図一7平面図の右側の油槽に注油し、越流管で H_0 の一定値に保ちながら、左側の油槽で暗きよ内水頭を設定して、ここから越流してくる流量をメスシリンダーで測定した。また自由地下水面の形状は、アクリル板前面に物差しを押しあてて測定した。

以上の実験装置によって測定した実験結果と解析結果とを比較してみよう。まず $H_0=20\text{ cm}$, $R=30\text{ cm}$ の場合の自由地下水面形状の計算結果と実験結果を図一8に示している。これを比較すると、計算結果は実験結果より曲線のふくらみ具合が大きく、 $x/H_0=0.5$ 付近では全体的に高い位置を示している。またこの曲線のふくらみは H_A/H_0 が小さいほど大きくなっている。この相違については、モデルの浸透領域の上流端を表わす $\phi=kH_0$ の等ポテンシャル線の形状の不適当あるいは $x/H_0=0.5$ 付近の平板間隔の不均一などによる実験誤差とも考えられるが、その相違はわずかであり、自由地下水面の最低点の高さ H_F は各実験ともよく一致していることなどを考慮すれば、解析結果はほぼ満足できる解であるといえよう。

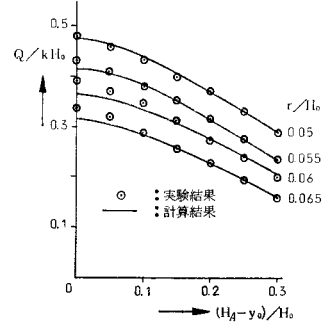


図一8 自由地下水面の実験結果との比較

表一2 図一9の実験の境界条件

$H_0(\text{cm})$	r/H_0	y_0/H_0	R/H_0
20.0	0.05	0.4	1.50
18.2	0.055	0.44	1.67
16.7	0.06	0.48	1.84
15.4	0.065	0.52	2.00

次に暗きよ取水量の実験結果の平均値と計算結果を図一9に示している。なお実験は上流端水位 H_0 を種々変えて行っているため、それぞれの r/H_0 , y_0/H_0 , R/H_0 の値を表一2に示している。なお実験結果は、実験装置の平行平板間隔 D



図一9 暗きよ取水量の実験結果との比較

を 2 mm として整理すると、全体的に大きな値が得られた。ここに動粘性係数を ν , 重力の加速度を g とすると、二次元の Poiseuille 流れの平均流速の式と Darcy の式との相似関係から、モデルの透水係数は $k=gD^2/(12\nu)$ である。いま実験装置の測定流量を Q_E とおくと、単位奥行き当たりの無次元流量は、

$$\frac{2Q_E}{D \cdot kH_0} = \frac{2A \nu Q_E}{gH_0 D^3}$$

となつて、平板間隔 D の値が整理結果に大きく影響することがわかる。そこで $R/H_0=1.5$, $r/H_0=0.05$, $y_0/H_0=0.4$, $H_A/H_0=0.65$ の場合について、測定流量の平均値から D の値を逆算すると $D=2.083\text{ mm}$ を得た。実験装置の作成精度を考慮すると 0.083 mm 程度の誤差が発生することは十分に考えられるので、平板間隔は $D=2.083\text{ mm}$ であると考え、図一9はこの値を用いて整理している。

計算結果を実験結果と比較すると、暗きよ内が満水状態の場合には、よく一致しているが、未満水状態の場合に、やや小さめの値を与えている。これは半無限浸透領域の場合¹⁰⁾に詳しく述べたように、暗きよ内水頭 H_A が小さいほど、暗きよ周壁の形状と解析上で暗きよ周壁と仮想する $\phi=kH_A$ の等ポテンシャル線の形状との相違が大きくなるための解析誤差によるものである。本報の場合にはこれら2つの形状が一致するように流入量を補正する計算は行っていないが、全体的には、ほぼ満足できる値を与えている。

以上によって、本解析結果の妥当性が確か

められたものとする。

5. 境界条件と水理諸量との関係

以上の解析結果を用いて、境界条件の変化に伴う暗きよ取水水量および自由地下水面の最低点の高さの変化を調べてみよう。まず図-9は暗きよの中心位置を一定にして暗きよ内水頭を変えた場合の暗きよ取水水量の変化を示したものであり、図の横軸には暗きよ内水頭と暗きよ中心位置との差 $(H_A - y_0)/H_0$ をとっている。この図より、暗きよ内水頭を小さくするほど暗きよ取水水量が多くなり、その変化はほぼ直線的であることがわかる。次に図-10は $Q/kH_0 \sim r/H_0$ および $H_F/H_0 \sim r/H_0$ の関係を示したものである。これより暗きよ径が大きいほど暗きよ取水水量が多く、暗きよ径の違いによる暗きよ取水水量の変化は暗きよ径が小さいときに大きいことがわかる。また自由地下水面の最低点の高さは、暗きよ径が大きいほど低く、その変化はいずれも H_A/H_0 の値に漸近してゆく傾向を示している。なお Q/kH_0 の曲線のうち、 $y_0/H_0=0.4$, $H_A/H_0=0.6$ と $y_0/H_0=0.3$, $H_A/H_0=0.6$ の曲線は重なっている。これに示されるように、暗きよ内水頭が同じ場合には、暗きよの中心位置を変えても暗きよ取水水量にはほとんど無関係で、ほぼ一定値を示す。次に図-11は $Q/kH_0 \sim R/H_0$ および $H_F/H_0 \sim R/H_0$ の関係を示したものである。ここに影響範囲の値 R は、井戸の影響半径と同様に、取水施設の設計時には、その地盤に適した値を与えて取水水量等を予測することになるが、この図より、 R/H_0 がある程度大きいときには、暗きよ取水水量および自由地下水面の高さに与える R/H_0 の影響は小さく、特に自由地下水面の高さについては暗きよ径が大きいほどその傾向が強いことがわかる。またこの図から、暗きよ径の違いによる暗きよ取水水量および自由地下水面の高さの変化は、 R/H_0 が大きいほど小さいこともわかる。

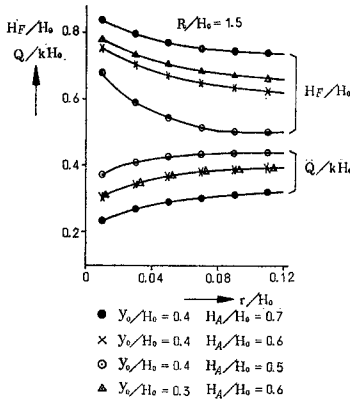


図-10 算定結果 (その 1)

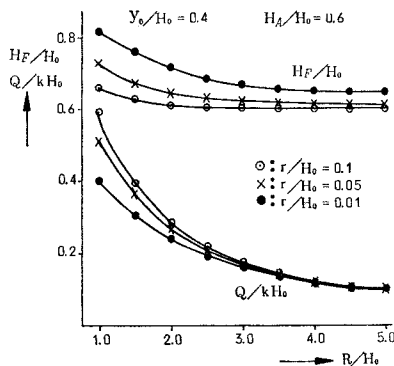


図-11 算定結果 (その 2)

6. 取水水量の簡易算定式

(1) 算定式の誘導

前述のように、暗きよ取水水量は解析結果の8式を連立に解いて得られるが、その算定はかなり煩雑である。そこで、より簡易に算定することを次に考えてみよう。

いま図-1 (以下、図-5 も含めて考える) の代わりに、境界形状の類似した図-12 のような、上下を不透水層ではさまれた帯状の被圧浸透領域を考える。図-12 は浸透領域の高さ H が一定である点で図-1 と相違するので、図-1 の自由地下水面の高さに応じて図-12 の浸透領域の高さを 適当に与えれば、図-12 の暗きよ取水水量を図-1 のその近似値として使えるのではないかと考えた。

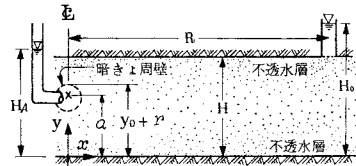


図-12 水平帯状領域

図-12 の暗きよ内に流入点を仮想し、流入点へ向かう流量を Q' とおくと、流入点へ向かう流れの複素ポテンシャルは次式で表わされる。

$$W = \frac{Q'}{2\pi} \cdot \ln \left(\sinh^2 \frac{\pi z}{2H} + \sin^2 \frac{\pi a}{2H} \right) + C \dots (29)$$

この式 (29) に $z = x + iy$ を代入して整理すると、実数部から速度ポテンシャルの式が得られる。

$$\phi = \frac{Q'}{4\pi} \cdot \ln \left\{ \left(\sinh^2 \frac{\pi x}{2H} - \sin^2 \frac{\pi y}{2H} + \sin^2 \frac{\pi a}{2H} \right)^2 + \sinh^2 \frac{\pi x}{H} \cdot \sin^2 \frac{\pi y}{H} \right\} + C \dots (30)$$

ここで $x=R$, $y=H$ で $\phi = kH_0$ とおくと、式 (30)

より、

$$C = kH_0 - \frac{Q'}{2\pi} \cdot \ln \left(\sinh^2 \frac{\pi R}{2H} + \sin^2 \frac{\pi a}{2H} - 1 \right)$$

である。この式 (30) に暗きよ周壁上端 ($x=0$, $y=y_0+r$) で暗きよの速度ポテンシャル $\phi = kH_A$ を与えて整理すると、次式が得られる。

$$Q' = \frac{2\pi k(H_0 - H_A)}{\ln \frac{\sinh^2 \frac{\pi R}{2H} + \sin^2 \frac{\pi a}{2H} - 1}{\sin^2 \frac{\pi}{2H}(y_0 + r) - \sin^2 \frac{\pi a}{2H}}} \dots\dots(31)$$

流入点の位置 a の値は、たとえば暗きよ内が満水状態の場合には、暗きよ周壁の上下両端が等ポテンシャルであるための条件式 $\phi_{(x=0, y=y_0+r)} = \phi_{(x=0, y=y_0-r)}$ を整理して得られる式 (32) より求めるべきであろうが、

$$\sin^2 \frac{\pi a}{2H} = \left\{ \sin^2 \frac{\pi(y_0+r)}{2H} + \sin^2 \frac{\pi(y_0-r)}{2H} \right\} / 2 \dots\dots(32)$$

本解析の近似の程度を考慮して、式 (32) で $r/y_0 \rightarrow 0$ において得られる近似値 $a=y_0$ を流入点の位置として採用する。したがって式 (31) に $a=y_0$ を代入すると、図-12 の流入点への流入量 Q' の近似解が得られるが、これを図-12 の暗きよ取水量 Q' と考える。ちなみに $y_0/H=0.5$, $r/H=0.05$, $R/H=2.0$ の場合について式 (31) より暗きよ取水量を求めると、 $Q'/k(H_0-H_A)=0.845$ となる。この値は、同じ境界条件について別の解析¹²⁾で求められた値 0.846 と比較すると、よく一致しており、このことから図-12 の流れに対する式 (31) の妥当性が確かめられる。

次に図-12 の流れを図-1 のそれと対比させて、両方の暗きよ取水量が数値的に一致するように図-12 の浸透領域の高さ H を与えることを考えてみよう。ここに浸透領域の高さ H は図-1 の自由地下水面の形状に応じて与えることになるが、自由地下水面の形状は図-8, 10, 11 に示されたように、境界条件によって異なる。しかし、そのうちでも暗きよ内水頭 H_A と影響範囲 R の影響が比較的大きいと考えられるので、 H を H_A と R の関数として関係式を考えてみた。解析解で求めた暗きよ取水量 Q と式 (31) の Q' とを比較して、数値的に種々検討の結果、式 (33) を得た。なお式 (31) は暗きよ内が満水状態の場合の算定式であるが、式 (33) の検討の際には未満水状態の場合にも式 (31) がそのまま適

用できるものとして検討している。

$$\frac{H}{H_0} = \frac{H_A}{H_0} + \frac{1 - H_A/H_0}{2(R/H_0 - 1.7)^2 + R/H_0 + 0.3 - 3(H_A - y_0)/H_0} \dots\dots(33)$$

したがって、図-1 の H_A/H_0 , R/H_0 および y_0/H_0 の値を式 (33) に与えて H を求め、図-1 の H の高さの不透水層を仮想すれば、図-1 の暗きよ取水量を、満水状態および未満水状態について、式 (31) から近似的に算出できることになる。

(2) 解析解および従来の算定式との比較

図-1 の暗きよについての従来の取水量算定式としては、次の4式があげられる。まず式 (34) は¹³⁾当初は図-1 の境界について求められたものであるが、現在では浸透層底面の不透水層上に設けられた、側壁の両側から取水する箱型暗きよの取水量算定式として用いられている。式 (35) は式 (34) に、不圧井戸の場合の Forchheimer 式の不完全貫入による補正¹⁴⁾と同じ補正を行ったもので、水理公式集¹⁵⁾などにはこの式が記載されている。次に式 (36), (37) は暗きよの左右の上流部で水面の高さが異なっている場合について求められたものである¹⁶⁾が、ここでは左右の水面の高さを同じとおいて整理した算定式を示している。

$$Q_D = k(H_0^2 - H_A^2)/R \dots\dots(34)$$

$$Q_F = \frac{k(H_0^2 - H_A^2)}{R} \cdot \sqrt{\frac{H_A - y_0 + 1.5r}{H_A}} \cdot \sqrt{\frac{H_A + y_0 - r}{H_A}} \dots\dots(35)$$

$$Q_R = \frac{\pi k(H_0 - H_A)}{\ln\left(\frac{y_0}{4\pi r}\right) + \frac{\pi R}{2y_0}} \dots\dots(36)$$

$$Q_V = \frac{\pi k(H_0 - H_A)}{\ln\left(\frac{y_0}{\pi r}\right) + \frac{\pi R}{2y_0}}$$

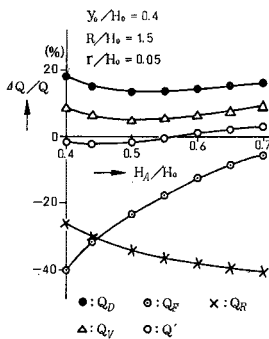


図-13 近似式の算定誤差 (その 1)

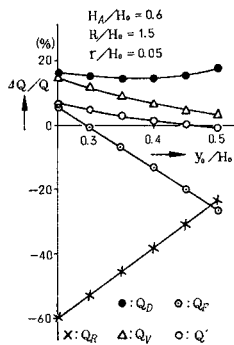


図-14 近似式の算定誤差 (その 2)

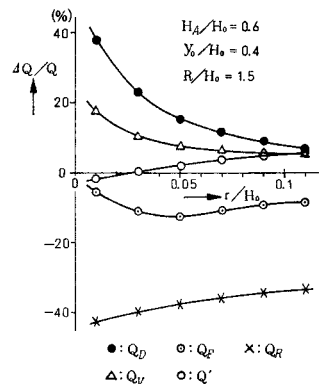
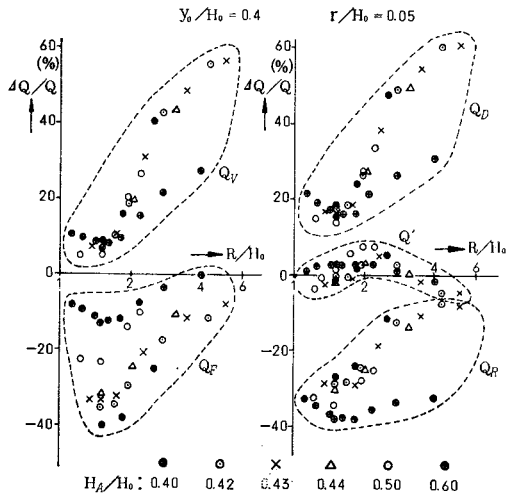


図-15 近似式の算定誤差 (その 3)



図—16 近似式の算定誤差 (その 4)

$$+ \frac{k\{(H_0 - y_0)^2 - (H_A - y_0)^2\}}{R} \dots\dots(37)$$

これらの式 (34)~(37) および式 (33) を適用した式 (31) の算定結果を式 (19)~(28) の解析解の算定結果 Q と比較してみよう。諸算定式の算定結果を Q_i とするとき、種々の境界条件について求めた $(Q_i - Q)/Q = \Delta Q/Q$ の値を 図—13~16 に示している。これらの図より、従来の算定式は境界条件によって、非常に大きな算定誤差を生ずることがわかる。たとえば式 (35) は、 R/H_0 が小さい場合および暗きよ内が未満水状態の場合に過小な値を与えているが、図—9 に示されたように、本解析解が未満水状態の場合に実験結果よりも数 % 程度の小さな値を与えることを考慮すれば、式 (35) の誤差は 図—13~16 に示された値よりも大きいと考えるべきであろう。これらの中で、式 (33) を適用した式 (31) の算定結果は最も解析解の算定結果に近く、精度よく算定されていることがわかる。ただし、この式も近似算定式であるから、あらゆる境界条件のもとで誤差が小さいとは限らないであろうが、少なくとも、実際に計算する機会が多いと考えられる 図—13~16 で取り扱った境界条件の範囲内では、従来の算定式に代わって、図—1 の暗きよ取水量の算定に、実用的に十分な精度で用い得るものであるといえよう。

7. 結 言

以上によって、比較的浅い位置に水平な不透水層がある不圧浸透領域に、円形の集水暗きよを埋設した場合の、集水暗きよへの浸透流について、暗きよ内が満水状態と未満水状態での解を求め、これより暗きよ取水量と自由地下水面の形状を求めることができたものとする。

以上の解析結果から、暗きよ径を大きくすると自由地下水面の最低点の高さは低くなり、暗きよ内水頭の値に漸近すること、暗きよ内水頭を小さくすると暗きよ取水量は多くなり、その変化は直線的であることおよび暗きよ内水頭が同じ場合には、暗きよの中心位置を変えても暗きよ取水量はほとんど変化しないことなど種々の傾向が明らかになった。次に本解析解の算定は煩雑であることから、暗きよ取水量については、実用性を考慮して近似算定式を誘導した。この算定式は従来の算定式に比べて精度よく算出できるものである。

終りに、本研究を進めるにあたり、九州産業大学研究補助員 白地哲也君のご協力をいただいた。ここに記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Aronovici, V.S. and W.W. Donnan : Soil-permeability as a criterion for drainage-design, Trans. AGU., Vol. 27, No. 1, pp. 95~101, 1946.
- 2) Muskat, M. : The flow of homogeneous fluids through porous media, McGraw-Hill, New York, pp. 175~181, 1946.
- 3) Schilfgaarde, J.V., D. Kirkham and R.F. Frevert : Physical and mathematical theories of tile and ditch drainage and their usefulness in design, Res. Bull., Iowa, Agr. Exp. Stat. AMES., 436, pp. 667~706, 1956.
- 4) Kirkham, D. : Flow of ponded water into drain tubes in soil overlying an impervious layer, Trans. AGU., Vol. 30, No. 3, pp. 369~386, 1949.
- 5) 上田・杉尾 : 被圧水で満たされた円形暗きよの取水量について, 土木学会論文報告集, No. 194, pp. 91~101, 1971年10月.
- 6) 上田・杉尾 : 水で満たされていない円形暗きよの取水量について, 土木学会論文報告集, No. 201, pp. 77~86, 1972年5月.
- 7) 杉尾 哲 : 自由地下水面をもつ半無限領域内の円形暗きよについて, 土木学会論文報告集, No. 208, pp. 43~52, 1972年12月.
- 8) 上田・杉尾・神野 : 自由地下水面がある有限領域内の集水暗きよの水理解析, 土木学会第25回年次学術講演会講演集, 第2部, pp. 395~398, 1970年11月.
- 9) 杉尾 哲 : 被圧帯水層上辺に設けた集水施設の浸透流量の算定式, 日本地下水学会誌, 第20巻, 第3号, pp. 99~107, 昭和53年11月.
- 10) 前出7)と同じ.
- 11) たとえば, Harr, M.E. : Groundwater and Seepage, McGraw-Hill, New York, pp. 81~88, 1962.
- 12) 崎山・細川・阿部・丑田 : 海岸付近の通常砂層地盤における効率的な上層取水の一方法, 土木学会論文報告集, No. 300, pp. 143~146, 1980年8月.
- 13) 前出1)と同じ.
- 14) Forchheimer, P. : Hydraulik, Berlin, pp. 440~441, 1930.
- 15) 土木学会水理公式集改訂委員会 : 水理公式集・昭和46年改訂版, 土木学会, p. 376, 昭和48年.
- 16) Gupta, A.D. : Contribution A L'Étude des Drains D'Interception en Milieu Poreux, Pub. Sci. et Tech. du Ministère de L'Air, No. 438, pp. 1~101, 1967.

(1980.12.9・受付)