

## 任意の境界条件を有する偏平らせん殻のフーリエ解析

## FOURIER ANALYSIS OF SHALLOW RIGHT HELICOIDAL SHELLS

井 浦 雅 司\*・平 嶋 政 治\*\*

By Masashi IURA and Masaharu HIRASHIMA

## 1. はじめに

らせん殻および初期ねじれ板の中央面はともに Helicoid とよばれる曲面をなしており、負の Gauss 曲率を有している。らせん桁やらせん階段の構成要素として用いられているらせん殻は、1950 年代の Reissner の研究<sup>1)</sup>に始まり、いままでに多くの研究者によって解析されているものの、その力学的挙動についてはまだ明確にされていない点が残されており、さらにらせん殻の一般解についても議論すべき余地があるものと思われる。

Helicoidal Shell は初期ねじれ板とらせん殻とに分けられ、初期ねじれ板に関しては、タービン翼・推進器などを対象にして Wan<sup>2)</sup>, Knowles & Reissner<sup>3)</sup>, Reissner<sup>4)</sup> らによって研究されている。一方、らせん殻に関しては、回転対称の応力状態について O'Mathuna<sup>5)</sup>, Cohen<sup>6)</sup>, Reissner<sup>7)</sup> らの報告があるものの、特殊な応力状態および支持条件のもとで解が得られており、らせん殻の一般的な力学的特性は明確にされていない。Wan<sup>8)</sup> は両端に等曲げモーメントを受ける偏平らせん殻の解析を行っているが、鉛直変位および応力関数にフーリエ単級数を用い、その一項のみを用いて解析しているため、同次解に一般性が欠けている。Hirashima & Iura<sup>9)</sup> は直線辺が単純支持された偏平らせん殻の解析解を求め、殻の円弧辺における支持条件がその力学的挙動に及ぼす影響を調べている。このように、解析的な解を主体とした研究は、いずれも境界条件の一部があらかじめ決まっており、殻周辺において任意の境界条件を扱える解析解を求めた研究は見当たらない。

一方、エネルギー原理に基づく近似解としては、Rayleigh-Ritz 法による西村の報告<sup>10)</sup>があり、有限要素法による研究として、神薮・西村<sup>11)</sup>、内山・土橋<sup>12)</sup>、平嶋・井浦<sup>13)</sup>らの報告があり、いずれも周辺で支持され等分

布荷重を受けるらせん殻の解析がなされている。これらの研究では、殻のピッチをパラメーターとして力学的特性を調べているが、殻の面内境界条件および面内剛性の影響については述べられていない。

実験的研究としては、Cusens<sup>14)</sup>、土生・平嶋・井浦<sup>15)</sup>らの報告があり、従来らせん殻の解析に多く用いられているはり理論<sup>16)~18)</sup>による仮定が正確でないことが指摘されている。

有限要素法や差分法などの数値解析手法は境界条件の処理が比較的容易に行えるという利点を有しており、殻構造物の解析にも多く用いられている。一方、解析解が得られる問題は限定されてしまう場合が多いものの、解析解の有用性は広く知られているとおりで、その研究も各種の殻について活発に行われている。これらの中で、任意の境界条件を有する殻構造物の解析手法としてフーリエ級数を用いる方法<sup>19)・20)</sup>が一般的であり、本報告も手法としてはフーリエ級数を用いて解析している。しかしながら、らせん殻は極座標を用いているため、基礎微分方程式が定数係数とならず、そのままの形では二方向にフーリエ展開することが困難となる。そのため、同じように極座標を用いる円錐殻や扇形板の解析においても、単級数のみを用いている場合が多く、周辺の支持条件が特定なものに限られてしまう<sup>21)~25)</sup>。Carrier<sup>24)</sup>は扇形板について、たわみを円周方向に  $\cos$  関数展開、半径方向に  $\sin$  関数展開しつり合い式を満足する解を見つけ、周辺固定の解を求めているが、この解も扱える境界条件に限られてしまい、任意の境界条件を扱うことはできない。

本報告においては、殻の基本性状を論ずるうえで、他の数値解析手法に比べ解析的な解が勝っていることより、フーリエ級数による手法を用いてらせん殻の解析解を求めている。その際に、従来の研究と異なる点は、基礎微分方程式において変数変換を行い定数係数の微分方程式を誘導し、変位および応力関数を二方向にフーリエ展開して余関数を求めている点である。得られた一般解

\* 正会員 工修 東京電機大学助手 理工学部建設工学科

\*\* 正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科

は、偏平らせん殻の直線辺および円弧辺において、力学的に許容され得る任意の境界条件を扱うことができる。さらに扇形板の一般解をも求めており、この解も周辺において任意の境界条件を扱うことができる。なお四隅点において法線方向変位が拘束されるような境界条件については考えていない。

対象としているらせん殻は法線方向等分布荷重を受ける偏平殻であり、Vlasov 型の微分方程式より曲げ理論解を求めている。O'Mathuna<sup>9)</sup>の数値結果は回転対称問題に限定されているが、ピッチと最小曲率半径の比が  $\pi/3$  以下であれば、偏平殻理論の解は厳密解の1%以内の誤差しか含まないことが示され、神菌・西村<sup>10)</sup>も偏平殻理論が広範囲に適用できることを示している。土木・建築構造物の構成要素として使用されているらせん殻はほとんどが偏平らせん殻であり、本報告で得られた結果は十分な精度をもって適用できるものと思われる。

本文ではまず偏平らせん殻の基礎微分方程式を提示し、極座標を変換することにより定数係数の微分方程式を導き、フーリエ級数による手法を用いて特殊解と余関数を求めている。その際に扇形板の曲げ問題についてふれ、らせん殻の一般解においてピッチに関する項を零とおくだけでは扇形板の曲げ解が得られないことを示し、別に扇形板の一般解を求めている。数値計算例においては、文献(8)で用いられているパラメータ  $\delta$  と同じ意味を有する無次元量  $K$  を用いて扇形板の力学的挙動と比較することにより、偏平らせん殻の力学的特性を調べている。

2. 偏平らせん殻の基礎方程式<sup>9)</sup>

本報告においては、図-1に示されているように、 $r=r_0, r_1$  および  $\theta=\theta_0, \theta_1$  ( $\theta_1-\theta_0=\alpha$ ) において境界を有するらせん殻を考える。なおなんら一般性を失うことなく、 $\theta_0=0, \theta_1=\alpha$  とおくことができる。法線方向変位  $w$  および応力関数  $\phi$  を用いると、法線方向等分布荷重下における偏平らせん殻のつり合い式と適合条件式は

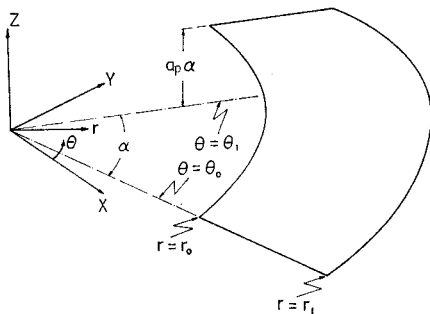


図-1 らせん殻と座標系

$$\left. \begin{aligned} r^2 r^2 w + \frac{K}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \right) &= \tilde{P}_n \\ r^2 r^2 \phi - \frac{K}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

と書け、ここに、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\phi} &= \frac{\beta^2 \phi}{Et}, \quad \beta^4 = \frac{12(1-\nu^2)}{t^2} \\ K &= 2 a_p \beta^2, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \\ \tilde{P}_n &= \frac{P_n}{D}, \quad r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

であり、 $E$  は Young 係数、 $t$  は殻厚(一定)、 $\nu$  は Poisson 比、 $P_n$  は法線方向等分布荷重であり、さらに  $a_p$  に  $2\pi$  を乗じたものが殻のピッチを示している。断面力は、図-2に示す方向を正とすれば、法線方向変位と応力関数とにより

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{r^2 \partial \theta^2}, \quad N_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ N_{r\theta} &= N_{\theta r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \right) \\ M_r &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right\} \\ M_\theta &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\} \\ M_{r\theta} &= M_{\theta r} = -D(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ Q_r &= \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta) \\ Q_\theta &= \frac{\partial M_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} M_{r\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

と表わされる。なお面内断面力と変位の関係は、

$$\left. \begin{aligned} N_r &= C \left\{ \frac{\partial v}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{v}{r} \right) \right\} \\ N_\theta &= C \left( \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{v}{r} + \nu \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ N_{r\theta} &= N_{\theta r} = \frac{C(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{2 a_p}{r^2} w \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

となり、ここに、

$$C = \frac{Et}{1-\nu^2} \dots\dots\dots (5)$$

であり、 $u, v$  はそれぞれ  $\theta$  および  $r$  方向の変位である。

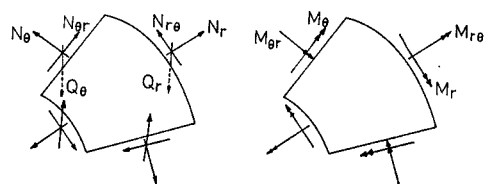


図-2 断面力

次に無次元パラメーター  $x, y$  を導入し, それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{\alpha}{2}(1+x) \\ \ln r &= \frac{y}{2} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + \frac{1}{2} \ln(r_0 \cdot r_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

と定義すると, 殻の境界はそれぞれ  $x = \pm 1, y = \pm 1$  で与えられる. 式(6)を用いて式(1)を書き換えると次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} L_1(w) + L_2(\tilde{\phi}) &= \tilde{P}_n e^S \\ L_1(\tilde{\phi}) - L_2(w) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} L_1(\ ) &= \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}^4} + 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} - 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} \\ &\quad + 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} - 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^4} + \frac{\partial^4}{\partial \bar{y}^4} \\ L_2(\ ) &= K \left( \frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right), \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b} \\ S &= 2y \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + 2 \ln(r_0 \cdot r_1) \\ a &= \frac{2}{\alpha}, \quad b = \frac{2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

である. 式(7)の解は特殊解と余関数の和で表わされ

$$\left. \begin{aligned} w &= w^I + w^II + w^III \\ \tilde{\phi} &= \tilde{\phi}^I + \tilde{\phi}^II + \tilde{\phi}^III \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

とおける. ここに,  $(\ )^I$  は特殊解であり,  $(\ )^{II}$  は  $x$  方向にフーリエ展開した余関数,  $(\ )^{III}$  は  $y$  方向にフーリエ展開した余関数である.

### 3. 基礎微分方程式の一般解

#### (1) $w^I, \tilde{\phi}^I$ について

特殊解を求めるにあたり, 法線方向等分布荷重を  $x$  方向へフーリエ展開する.

$$P_n = \sum_{m=1,3,5}^M (P^m \sin \lambda_m x + Q^m \cos \lambda_m x) \dots\dots(10)$$

ここに,

$$P^m = 0, \quad Q^m = \frac{2P_n}{\lambda_m} (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{2} \dots\dots(11)$$

であり,  $M$  は採用するフーリエ級数の項数である. 式(10)を式(7)へ代入して特殊解を求めるとそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} w^I &= \sum_{m=1,3,5}^M \frac{\delta_{1,m}}{(\delta_{1,m}^2 - \delta_{2,m}^2)} \tilde{Q}_m e^S \cos \lambda_m x \\ \tilde{\phi}^I &= \sum_{m=1,3,5}^M \frac{\delta_{2,m}}{(\delta_{1,m}^2 - \delta_{2,m}^2)} \tilde{Q}_m e^S \sin \lambda_m x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

となり, ここに

$$\delta_{1,m} = a^4 \lambda_m^4 - 20 a^2 \lambda_m^2 + 64$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{2,m} &= -3Ka\lambda_m \\ \tilde{Q}_m &= \frac{Q^m}{D} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

である.

#### (2) $w^{II}, \tilde{\phi}^{II}$ について

法線方向変位および応力関数を  $x$  方向へフーリエ展開し,

$$\left. \begin{aligned} w^{II} &= \sum_{m=0,1,3,5}^M w_{c,m}^{II}(y) \cos \lambda_m x \\ &\quad + \sum_{m=1,3,5}^M w_{s,m}^{II}(y) \sin \lambda_m x \\ \tilde{\phi}^{II} &= \sum_{m=0,1,3,5}^M \tilde{\phi}_{c,m}^{II}(y) \cos \lambda_m x \\ &\quad + \sum_{m=1,3,5}^M \tilde{\phi}_{s,m}^{II}(y) \sin \lambda_m x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

とおく. まず  $m > 1$  の場合について考えると, 式(14)を式(7)へ代入することにより(ただし  $\tilde{P}_n = 0$ ),  $w_{c,m}^{II}$  と  $\tilde{\phi}_{s,m}^{II}$  および  $w_{s,m}^{II}$  と  $\tilde{\phi}_{c,m}^{II}$  とに関する二組の連立微分方程式を得る.

$$\left. \begin{aligned} L_3(w_{c,m}^{II}) + L_4(\tilde{\phi}_{s,m}^{II}) &= 0 \\ L_3(\tilde{\phi}_{s,m}^{II}) + L_4(w_{c,m}^{II}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

$$\left. \begin{aligned} L_3(w_{s,m}^{II}) - L_4(\tilde{\phi}_{c,m}^{II}) &= 0 \\ L_3(\tilde{\phi}_{c,m}^{II}) - L_4(w_{s,m}^{II}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} L_3(\ ) &= \frac{d^4}{d\bar{y}^4} - 4 \frac{d^3}{d\bar{y}^3} + (4 - 2a^2 \lambda_m^2) \frac{d^2}{d\bar{y}^2} \\ &\quad + 4a^2 \lambda_m^2 \frac{d}{d\bar{y}} + (a^4 \lambda_m^4 - 4a^2 \lambda_m^2) \\ L_4(\ ) &= Ka\lambda_m \left( \frac{d}{d\bar{y}} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} w_{c,m}^{II} &= A_m \exp\{(\lambda+1)\bar{y}\} \\ \tilde{\phi}_{s,m}^{II} &= B_m \exp\{(\lambda+1)\bar{y}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

および

$$\left. \begin{aligned} w_{s,m}^{II} &= \hat{A}_m \exp\{(\hat{\lambda}+1)\bar{y}\} \\ \tilde{\phi}_{c,m}^{II} &= \hat{B}_m \exp\{(\hat{\lambda}+1)\bar{y}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

とおくと,  $A_m$  と  $B_m$  および  $\hat{A}_m$  と  $\hat{B}_m$  とに関する以下の連立方程式を得る.

$$\left. \begin{aligned} A_m f(\lambda) + B_m g(\lambda) &= 0 \\ A_m g(\lambda) + B_m f(\lambda) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_m f(\hat{\lambda}) - \hat{B}_m g(\hat{\lambda}) &= 0 \\ \hat{A}_m g(\hat{\lambda}) - \hat{B}_m f(\hat{\lambda}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} f(X) &= \{X^2 - (1+a\lambda_m)^2\} \{X^2 - (1-a\lambda_m)^2\} \\ g(X) &= Ka\lambda_m X, \quad (X = \lambda, \hat{\lambda}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

である.  $A_m$  と  $B_m$ , さらに  $\hat{A}_m$  と  $\hat{B}_m$  が非自明解を

もつ条件として、 $\lambda$  および  $\hat{\lambda}$  に関する 8 次代数方程式を得るが、これらは同一の形をしており

$$f(X)^2 - g(X)^2 = 0 \quad (X = \lambda, \hat{\lambda}) \dots\dots\dots (23)$$

と書ける。一般にこの解は、(i) 8 根すべてが実根の場合と、(ii) 4 根が実根で残りの 4 根が虚根の場合とに分けられる。なお式(23)は  $X$  に関して 8 次の代数方程式であるが、実際には 4 次の代数方程式を解けばよいことは明らかである。まず (i) の場合を考えると、式(23)の解は

$$X_{2j-1} = -X_{2j} = \xi_j \quad (j=1 \sim 4) \dots\dots\dots (24)$$

と書け、ここに  $\xi_j$  は実数である。このとき、式(18)、(19)より  $w_{c,m}^{\text{II}}$ ,  $\tilde{\phi}_{s,m}^{\text{II}}$ ,  $w_{s,m}^{\text{II}}$ ,  $\tilde{\phi}_{c,m}^{\text{II}}$  は以下のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} w_{c,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^4 (\hat{A}_{2j-1,m} e^{\xi_j \bar{y}} \cosh \xi_j \bar{y} \\ &\quad + \hat{A}_{2j,m} e^{\xi_j \bar{y}} \sinh \xi_j \bar{y}) \\ \tilde{\phi}_{s,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^4 (\tilde{T}_j \hat{A}_{2j-1,m} e^{\xi_j \bar{y}} \cosh \xi_j \bar{y} \\ &\quad + \tilde{T}_j \hat{A}_{2j,m} e^{\xi_j \bar{y}} \sinh \xi_j \bar{y}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{c,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^2 (A_{2j-1,m} e^{\eta_j \bar{y}} \cosh \eta_j \bar{y} + A_{2j,m} e^{\eta_j \bar{y}} \sinh \eta_j \bar{y}) + A_{3,m} e^{\bar{y}} \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} \\ &\quad + A_{6,m} e^{\bar{y}} \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} + A_{7,m} e^{\bar{y}} \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} + A_{8,m} e^{\bar{y}} \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} \\ \tilde{\phi}_{s,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^2 (\bar{T}_j A_{2j-1,m} e^{\eta_j \bar{y}} \sinh \eta_j \bar{y} + \bar{T}_j A_{2j,m} e^{\eta_j \bar{y}} \cosh \eta_j \bar{y}) + A_{5,m} e^{\bar{y}} (\bar{T}_3 \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} \\ &\quad - \bar{T}_4 \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y}) + A_{6,m} e^{\bar{y}} (\bar{T}_3 \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} + \bar{T}_4 \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y}) \\ &\quad + A_{7,m} e^{\bar{y}} (\bar{T}_3 \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} - \bar{T}_4 \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y}) + A_{8,m} e^{\bar{y}} (\bar{T}_3 \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} \\ &\quad + \bar{T}_4 \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y}) \\ w_{s,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^2 (A_{2j+7,m} e^{\eta_j \bar{y}} \cosh \eta_j \bar{y} + A_{2j+8,m} e^{\eta_j \bar{y}} \sinh \eta_j \bar{y}) + A_{13,m} e^{\bar{y}} \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} \\ &\quad + A_{14,m} e^{\bar{y}} \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} + A_{15,m} e^{\bar{y}} \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} + A_{16,m} e^{\bar{y}} \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} \\ \tilde{\phi}_{c,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^2 (-\bar{T}_j A_{2j+7,m} e^{\eta_j \bar{y}} \sinh \eta_j \bar{y} - \bar{T}_j A_{2j+8,m} e^{\eta_j \bar{y}} \cosh \eta_j \bar{y}) \\ &\quad + A_{13,m} e^{\bar{y}} (-\bar{T}_3 \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} + \bar{T}_4 \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y}) \\ &\quad + A_{14,m} e^{\bar{y}} (-\bar{T}_3 \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} - \bar{T}_4 \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y}) \\ &\quad + A_{15,m} e^{\bar{y}} (-\bar{T}_3 \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} + \bar{T}_4 \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y}) \\ &\quad + A_{16,m} e^{\bar{y}} (-\bar{T}_3 \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} - \bar{T}_4 \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{c,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^2 (A_{2j-1,m} e^{\eta_j \bar{y}} \cosh \eta_j \bar{y} + A_{2j,m} e^{\eta_j \bar{y}} \sinh \eta_j \bar{y}) + A_{13,m} e^{\bar{y}} \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} \\ &\quad + A_{14,m} e^{\bar{y}} \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} + A_{15,m} e^{\bar{y}} \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} + A_{16,m} e^{\bar{y}} \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} \\ \tilde{\phi}_{c,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^2 (-\bar{T}_j A_{2j+7,m} e^{\eta_j \bar{y}} \sinh \eta_j \bar{y} - \bar{T}_j A_{2j+8,m} e^{\eta_j \bar{y}} \cosh \eta_j \bar{y}) \\ &\quad + A_{13,m} e^{\bar{y}} (-\bar{T}_3 \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} + \bar{T}_4 \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y}) \\ &\quad + A_{14,m} e^{\bar{y}} (-\bar{T}_3 \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} - \bar{T}_4 \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y}) \\ &\quad + A_{15,m} e^{\bar{y}} (-\bar{T}_3 \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} + \bar{T}_4 \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y}) \\ &\quad + A_{16,m} e^{\bar{y}} (-\bar{T}_3 \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} - \bar{T}_4 \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_j &= \tilde{T}_j \quad (j=1, 2) \\ \bar{T}_3 &= \frac{-Ka\lambda_m(\kappa\bar{M}_1 + \mu\bar{M}_2)}{(\bar{M}_1)^2 + (\bar{M}_2)^2} \\ \bar{T}_4 &= \frac{-Ka\lambda_m(\mu\bar{M}_1 - \kappa\bar{M}_2)}{(\bar{M}_1)^2 + (\bar{M}_2)^2} \\ \bar{M}_1 &= \{\kappa^2 - \mu^2 - (1+a\lambda_m)^2\} \{\kappa^2 - \mu^2 \\ &\quad - (1-a\lambda_m)^2\} - 4\kappa^2\mu^2 \\ \bar{M}_2 &= 4\kappa\mu(\kappa^2 - \mu^2 - 1 - a^2\lambda_m^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

であり、 $A_{1,m} \sim A_{16,m}$  は定数で殻の境界条件より決定される。

以上で  $m > 1$  の解が求まり、次に  $m=0$  の解を求め、式(14)より  $m=0$  のときは

$$\left. \begin{aligned} w_{s,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^4 (\hat{A}_{2j+7,m} e^{\xi_j \bar{y}} \cosh \xi_j \bar{y} \\ &\quad + \hat{A}_{2j+8,m} e^{\xi_j \bar{y}} \sinh \xi_j \bar{y}) \\ \tilde{\phi}_{c,m}^{\text{II}} &= \sum_{j=1}^4 (-\tilde{T}_j \hat{A}_{2j+7,m} e^{\xi_j \bar{y}} \cosh \xi_j \bar{y} \\ &\quad - \tilde{T}_j \hat{A}_{2j+8,m} e^{\xi_j \bar{y}} \sinh \xi_j \bar{y}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ここに、

$$\tilde{T}_j = \frac{-Ka\lambda_m \xi_j}{\{\xi_j^2 - (1+a\lambda_m)^2\} \{\xi_j^2 - (1-a\lambda_m)^2\}} \dots\dots\dots (27)$$

であり、 $\hat{A}_{1,m} \sim \hat{A}_{16,m}$  は定数で殻の境界条件より決定される。

次に (ii) の場合を考えると、式(23)の解は

$$\left. \begin{aligned} X_{2j-1} &= -X_{2j} = \eta_j \quad (j=1, 2) \\ X_{5,6,7,8} &= \pm \kappa \pm i\mu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

と書け、ここに  $\eta_j, \kappa, \mu$  は実数であり、 $i = \sqrt{-1}$  である。このとき、式(18)、(19)より  $w_{c,m}^{\text{II}}$ ,  $\tilde{\phi}_{s,m}^{\text{II}}$ ,  $w_{s,m}^{\text{II}}$ ,  $\tilde{\phi}_{c,m}^{\text{II}}$  は以下のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} w^{\text{II}} &= w_{c,0}^{\text{II}}(y), \quad \tilde{\phi}^{\text{II}} = \tilde{\phi}_{c,0}^{\text{II}}(y) \dots\dots\dots (32) \end{aligned} \right\}$$

と書け、式(7)へ代入すると常微分方程式が得られ、これを解くことにより  $w_{c,0}^{\text{II}}$ ,  $\tilde{\phi}_{c,0}^{\text{II}}$  は次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} w_{c,0}^{\text{II}} &= A_{1,0} + A_{2,0} \bar{y} + (A_{3,0} + A_{4,0} \bar{y}) e^{2\bar{y}} \\ \tilde{\phi}_{c,0}^{\text{II}} &= A_{5,0} + A_{6,0} \bar{y} + (A_{7,0} + A_{8,0} \bar{y}) e^{2\bar{y}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

ここに、 $A_{1,0} \sim A_{8,0}$  は殻の境界条件より決定される定数である。

### (3) $w^{\text{II}}$ , $\tilde{\phi}^{\text{II}}$ について

法線方向変位および応力関数を  $y$  方向へフーリエ展開し

$$\left. \begin{aligned} w^{\text{III}} &= \sum_{n=0,1,3,5}^N w_{c,n}^{\text{III}}(x) \cos \lambda_n y \\ &+ \sum_{n=1,3,5}^N w_{s,n}^{\text{III}}(x) \sin \lambda_n y \\ \tilde{\phi}^{\text{III}} &= \sum_{n=0,1,3,5}^N \tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}}(x) \cos \lambda_n y \\ &+ \sum_{n=1,3,5}^N \tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}}(x) \sin \lambda_n y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

とおく。ここに、 $N$  は採用するフーリエ級数の項数である。まず  $n \geq 1$  の場合について考えると、式(34)を式(7)へ代入することにより(ただし  $\tilde{P}_n=0$ )、 $w_{c,n}^{\text{III}}$ 、 $w_{s,n}^{\text{III}}$ 、 $\tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}}$ 、 $\tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}}$  に関する連立微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} L_5(w_{c,n}^{\text{III}}) + L_6(w_{s,n}^{\text{III}}) + L_7(\tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}}) \\ + L_8(\tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}}) &= 0 \\ L_5(w_{s,n}^{\text{III}}) - L_6(w_{c,n}^{\text{III}}) + L_7(\tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}}) \\ - L_8(\tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}}) &= 0 \\ L_5(\tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}}) + L_6(\tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}}) - L_7(w_{c,n}^{\text{III}}) \\ - L_8(w_{s,n}^{\text{III}}) &= 0 \\ L_5(\tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}}) - L_6(\tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}}) - L_7(w_{s,n}^{\text{III}}) \\ + L_8(w_{c,n}^{\text{III}}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} L_5(\ ) &= \frac{d^4}{d\bar{x}^4} + (4-2b^2\lambda_n^2) \frac{d^2}{d\bar{x}^2} \\ &+ (b^4\lambda_n^4 - 4b^2\lambda_n^2) \\ L_6(\ ) &= -4b\lambda_n \frac{d^2}{d\bar{x}^2} + 4b^3\lambda_n^3 \\ L_7(\ ) &= -K \frac{d}{d\bar{x}} \\ L_8(\ ) &= Kb\lambda_n \frac{d}{d\bar{x}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} w_{c,n}^{\text{III}} &= \tilde{A}_n \exp(\tilde{\lambda}x), \quad w_{s,n}^{\text{III}} = \tilde{B}_n \exp(\tilde{\lambda}x) \\ \tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}} &= \tilde{C}_n \exp(\tilde{\lambda}x), \quad \tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}} = \tilde{D}_n \exp(\tilde{\lambda}x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

とおくと、 $\tilde{A}_n$ 、 $\tilde{B}_n$ 、 $\tilde{C}_n$ 、 $\tilde{D}_n$  に関する連立方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}_n\alpha_1 + \tilde{B}_n\alpha_2 - \tilde{C}_n\alpha_3 + \tilde{D}_n\alpha_4 &= 0 \\ -\tilde{A}_n\alpha_2 + \tilde{B}_n\alpha_1 - \tilde{C}_n\alpha_4 + \tilde{D}_n\alpha_3 &= 0 \\ \tilde{A}_n\alpha_3 - \tilde{B}_n\alpha_4 + \tilde{C}_n\alpha_1 + \tilde{D}_n\alpha_2 &= 0 \\ \tilde{A}_n\alpha_4 + \tilde{B}_n\alpha_3 - \tilde{C}_n\alpha_2 + \tilde{D}_n\alpha_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= a^4\tilde{\lambda}^4 + 4a^2\tilde{\lambda}^2 - 2a^2\tilde{\lambda}^2b^2\lambda_n^2 - 4b^2\lambda_n^2 + b^4\lambda_n^4 \\ \alpha_2 &= 4b^2\lambda_n^3 - 4a^2\tilde{\lambda}^2b\lambda_n \\ \alpha_3 &= Ka\tilde{\lambda}, \quad \alpha_4 = Ka\tilde{\lambda}b\lambda_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

である。 $\tilde{A}_n$ 、 $\tilde{B}_n$ 、 $\tilde{C}_n$ 、 $\tilde{D}_n$  が非自明解をもつ条件として、以下の  $\tilde{\lambda}$  に関する 16 次代数方程式を得る。

$$\{(\alpha_1 - \alpha_4)^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2\} \{(\alpha_1 + \alpha_4)^2$$

$$+ (\alpha_2 + \alpha_3)^2\} = 0 \dots\dots\dots(40)$$

上記の式は  $\tilde{\lambda}$  に関して 16 次であるが、実際には 8 次の代数方程式を解けばよいことは明らかである。一般に式(40)の解は次のような形に書くことができる。

$$\tilde{\lambda}_{4j-3,4j-2,4j-1,4j} = \pm \zeta_j \pm i\vartheta_j \quad (j=1 \sim 4) \dots\dots\dots(41)$$

ここに、 $\zeta_j$  と  $\vartheta_j$  は実数である。このとき、 $w_{c,n}^{\text{III}}$ 、 $w_{s,n}^{\text{III}}$ 、 $\tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}}$ 、 $\tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}}$  はそれぞれ以下のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} w_{c,n}^{\text{III}} &= \sum_{j=1}^4 (\tilde{A}_{4j-3,n} \cos \vartheta_j x \cosh \zeta_j x \\ &+ \tilde{A}_{4j-2,n} \cos \vartheta_j x \sinh \zeta_j x \\ &+ \tilde{A}_{4j-1,n} \sin \vartheta_j x \cosh \zeta_j x \\ &+ \tilde{A}_{4j,n} \sin \vartheta_j x \sinh \zeta_j x) \\ w_{s,n}^{\text{III}} &= \sum_{j=1}^4 \{ \tilde{A}_{4j-3,n} (T_j^{**} \cos \vartheta_j x \cosh \zeta_j x \\ &- T_j^{**} \sin \vartheta_j x \sinh \zeta_j x) \\ &+ \tilde{A}_{4j-2,n} (T_j^{**} \cos \vartheta_j x \sinh \zeta_j x \\ &- T_j^{**} \sin \vartheta_j x \cosh \zeta_j x) \\ &+ \tilde{A}_{4j-1,n} (T_j^{**} \sin \vartheta_j x \cosh \zeta_j x \\ &+ T_j^{**} \cos \vartheta_j x \sinh \zeta_j x) \\ &+ \tilde{A}_{4j,n} (T_j^{**} \sin \vartheta_j x \sinh \zeta_j x \\ &+ T_j^{**} \cos \vartheta_j x \cosh \zeta_j x) \} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\phi}_{c,n}^{\text{III}} &= \sum_{j=1}^4 \{ \tilde{A}_{4j-3,n} (S_j^{**} \cos \vartheta_j x \sinh \zeta_j x \\ &- S_j^{**} \sin \vartheta_j x \cosh \zeta_j x) \\ &+ \tilde{A}_{4j-2,n} (S_j^{**} \cos \vartheta_j x \cosh \zeta_j x \\ &- S_j^{**} \sin \vartheta_j x \sinh \zeta_j x) \\ &+ \tilde{A}_{4j-1,n} (S_j^{**} \sin \vartheta_j x \sinh \zeta_j x \\ &+ S_j^{**} \cos \vartheta_j x \cosh \zeta_j x) \\ &+ \tilde{A}_{4j,n} (S_j^{**} \sin \vartheta_j x \cosh \zeta_j x \\ &+ S_j^{**} \cos \vartheta_j x \sinh \zeta_j x) \} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\phi}_{s,n}^{\text{III}} &= \sum_{j=1}^4 \{ \tilde{A}_{4j-3,n} (R_j^{**} \cos \vartheta_j x \sinh \zeta_j x \\ &- R_j^{**} \sin \vartheta_j x \cosh \zeta_j x) \\ &+ \tilde{A}_{4j-2,n} (R_j^{**} \cos \vartheta_j x \cosh \zeta_j x \\ &- R_j^{**} \sin \vartheta_j x \sinh \zeta_j x) \\ &+ \tilde{A}_{4j-1,n} (R_j^{**} \sin \vartheta_j x \sinh \zeta_j x \\ &+ R_j^{**} \cos \vartheta_j x \cosh \zeta_j x) \\ &+ \tilde{A}_{4j,n} (R_j^{**} \sin \vartheta_j x \cosh \zeta_j x \\ &+ R_j^{**} \cos \vartheta_j x \sinh \zeta_j x) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} T_j^{**} &= \frac{2(M_1N_1 + M_2N_2)}{(M_1)^2 + (M_2)^2} \\ T_j^{**} &= \frac{2(M_1N_2 - M_2N_1)}{(M_1)^2 + (M_2)^2} \\ S_j^{**} &= \frac{2(M_3N_3 + M_4N_4)}{(M_3)^2 + (M_4)^2} \\ S_j^{**} &= \frac{2(M_3N_4 - M_4N_3)}{(M_3)^2 + (M_4)^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 R_j^* &= \frac{-2(M_5 N_5 + M_6 N_6)}{(M_5)^2 + (M_6)^2} \\
 R_j^{**} &= \frac{-2(M_5 N_6 - M_6 N_5)}{(M_5)^2 + (M_6)^2} \\
 M_1 &= (z_1 z_2 - z_3^2)^2 - z_3^2 (z_1 + z_2)^2 \\
 &\quad - 16 b^2 \lambda_n^2 (z_1^2 - z_3^2) + K^2 a^2 (\zeta j^2 - \vartheta j^2) \\
 &\quad \cdot (1 - b^2 \lambda_n^2) \\
 M_2 &= 2 z_3 (z_1 + z_2) (z_1 z_2 - z_3^2) \\
 &\quad - 32 z_1 z_3 b^2 \lambda_n^2 + K^2 z_3 (1 - b^2 \lambda_n^2) \\
 N_1 &= -4 b \lambda_n z_1 (z_1 z_2 - z_3^2) + 4 (z_1 + z_2) z_3^2 b \lambda_n \\
 &\quad - K^2 a^2 b \lambda_n (\zeta j^2 - \vartheta j^2) \\
 N_2 &= -4 b \lambda_n z_3 (z_1 z_2 - z_3^2) \\
 &\quad - 4 z_1 z_3 b \lambda_n (z_1 + z_2) - K^2 z_3 b \lambda_n \\
 M_3 &= (z_1 z_2 - z_3^2)^2 - z_3^2 (z_1 + z_2)^2 \\
 &\quad + 16 b^2 \lambda_n^2 (z_1^2 - z_3^2) - K^2 a^2 (\zeta j^2 - \vartheta j^2) \\
 &\quad \cdot (1 + b^2 \lambda_n^2) \\
 M_4 &= 2 z_3 (z_1 + z_2) (z_1 z_2 - z_3^2) + 32 z_1 z_3 b^2 \lambda_n^2 \\
 &\quad - K^2 z_3 (1 + b^2 \lambda_n^2) \\
 N_3 &= 4 K a b^2 \lambda_n^2 (z_3 \vartheta j - z_1 \zeta j) \\
 &\quad - K a \zeta j (z_1 z_2 - z_3^2) + K z_3 a \vartheta j (z_1 + z_2) \\
 N_4 &= -4 K a b^2 \lambda_n^2 (z_1 \vartheta j + z_3 \zeta j) \\
 &\quad - K a \vartheta j (z_1 z_2 - z_3^2) - K z_3 a \zeta j (z_1 + z_2) \\
 M_5 &= (z_1 z_2 - z_3^2)^2 - z_3^2 (z_1 + z_2)^2 \\
 &\quad + 16 b^2 \lambda_n^2 (z_1^2 - z_3^2) + K^2 a^2 (\zeta \lambda^2 - \vartheta j^2) \\
 &\quad \cdot (1 + b^2 \lambda_n^2) \\
 M_6 &= 2 z_3 (z_1 + z_2) (z_1 z_2 - z_3^2) + 32 z_1 z_3 b^2 \lambda_n^2 \\
 &\quad + K^2 z_3 (1 + b^2 \lambda_n^2) \\
 N_5 &= K a \zeta j b \lambda_n (z_1 z_2 - z_3^2) \\
 &\quad - K (z_1 + z_2) z_3 a \vartheta j b \lambda_n \\
 &\quad - 4 K a b \lambda_n (z_1 \zeta j - z_3 \vartheta j) \\
 N_6 &= K a \vartheta j b \lambda_n (z_1 z_2 - z_3^2) + K (z_1 + z_2) \\
 &\quad \cdot z_3 a \zeta j b \lambda_n - 4 K a b \lambda_n (z_1 \vartheta j + z_3 \zeta j) \\
 z_1 &= a^2 \zeta j^2 - a^2 \vartheta j^2 - b^2 \lambda_n^2, \quad z_2 = z_1 + 4 \\
 z_3 &= 2 a^2 \zeta j \vartheta j
 \end{aligned}$$

.....(43)

となり、定数  $\tilde{A}_{1,n} \sim \tilde{A}_{16,n}$  は殻の境界条件より決定される。

次に  $n=0$  の場合について考える。このとき、式(34)より

$$\left. \begin{aligned}
 w^{\text{III}} &= w_{c,0}^{\text{III}}(x) \\
 \tilde{\phi}^{\text{III}} &= \tilde{\phi}_{c,0}^{\text{III}}(x)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

となり、式(7)へ代入すると次の連立微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^4 w_{c,0}^{\text{III}}}{d\bar{x}^4} + 4 \frac{d^2 w_{c,0}^{\text{III}}}{d\bar{x}^2} - K \frac{d \tilde{\phi}_{c,0}^{\text{III}}}{d\bar{x}} &= 0 \\
 \frac{d^4 \tilde{\phi}_{c,0}^{\text{III}}}{d\bar{x}^4} + 4 \frac{d^2 \tilde{\phi}_{c,0}^{\text{III}}}{d\bar{x}^2} + K \frac{d w_{c,0}^{\text{III}}}{d\bar{x}} &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(45)$$

ここで、

$$w_{c,0}^{\text{III}} = A_0 \exp(\lambda_0 \bar{x}), \quad \tilde{\phi}_{c,0}^{\text{III}} = B_0 \exp(\lambda_0 \bar{x})$$

.....(46)

とおき式(45)へ代入すると、 $A_0, B_0$  がともに非自明解をもつ条件として以下の  $\lambda_0$  に関する 8 次代数方程式を得る。

$$\lambda_0^2 \{ (\lambda_0^3 + 4 \lambda_0)^2 + K^2 \} = 0 \dots\dots\dots(47)$$

この根は、(i) 2根が実数で 6 根が純虚数の場合と、(ii) 2根が実数、2根が純虚数、4根が複素数の場合とに分けられる。まず (i) の場合について考えると、式(47)の根は

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_{0,1} &= \lambda_{0,2} = 0 \\
 \lambda_{0,2j+1} &= \pm i \vartheta_{0,j} \quad (j=1 \sim 3)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(48)$$

と書け、ここに  $\vartheta_{0,j}$  は実数である。このとき、 $w_{c,0}^{\text{III}}$  と  $\tilde{\phi}_{c,0}^{\text{III}}$  は以下のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned}
 w_{c,0}^{\text{III}} &= A_{9,0} + \sum_{j=1}^3 (A_{2j+9,0} \cos \vartheta_{0,j} \bar{x} \\
 &\quad + A_{2j+10,0} \sin \vartheta_{0,j} \bar{x}) \\
 \tilde{\phi}_{c,0}^{\text{III}} &= A_{10,0} + \sum_{j=1}^3 \frac{(\vartheta_{0,j}^3 - 4 \vartheta_{0,j})}{K} \cdot \\
 &\quad \cdot (A_{2j+9,0} \sin \vartheta_{0,j} \bar{x} - A_{2j+10,0} \cos \vartheta_{0,j} \bar{x})
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(49)$$

ここに、 $A_{j,0} \sim A_{16,0}$  は殻の境界条件より決定される定数である。次に (ii) の場合について考えると、式(47)の根は

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_{0,1} &= \lambda_{0,2} = 0, \quad \lambda_{0,3} = -\lambda_{0,4} = i \vartheta_0^* \\
 \lambda_{0,5/6} &= \pm \zeta_0^{**} \pm i \vartheta_0^{**}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(50)$$

と書け、ここに、 $\vartheta_0^*, \zeta_0^{**}, \vartheta_0^{**}$  は実数である。このとき、 $w_{c,0}^{\text{III}}$  と  $\tilde{\phi}_{c,0}^{\text{III}}$  は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 w_{c,0}^{\text{III}} &= A_{9,0}^* + A_{11,0}^* \cos \vartheta_0^* \bar{x} + A_{12,0}^* \sin \vartheta_0^* \bar{x} \\
 &\quad + A_{13,0}^* \cos \vartheta_0^{**} \bar{x} \cosh \zeta_0^{**} \bar{x} \\
 &\quad + A_{14,0}^* \cos \vartheta_0^{**} \bar{x} \sinh \zeta_0^{**} \bar{x} \\
 &\quad + A_{15,0}^* \sin \vartheta_0^{**} \bar{x} \cosh \zeta_0^{**} \bar{x} \\
 &\quad + A_{16,0}^* \sin \vartheta_0^{**} \bar{x} \sinh \zeta_0^{**} \bar{x} \\
 \tilde{\phi}_{c,0}^{\text{III}} &= A_{10,0}^* + \frac{(\vartheta_0^{**3} - 4 \vartheta_0^{**})}{K} \cdot \\
 &\quad \cdot (A_{11,0}^* \sin \vartheta_0^{**} \bar{x} - A_{12,0}^* \cos \vartheta_0^{**} \bar{x}) \\
 &\quad + \frac{(\zeta_0^{**3} - 3 \zeta_0^{**} \vartheta_0^{**2} + 4 \zeta_0^{**})}{K} \cdot \\
 &\quad \cdot (A_{13,0}^* \cos \vartheta_0^{**} \bar{x} \sinh \zeta_0^{**} \bar{x} \\
 &\quad + A_{14,0}^* \cos \vartheta_0^{**} \bar{x} \cosh \zeta_0^{**} \bar{x} \\
 &\quad + A_{15,0}^* \sin \vartheta_0^{**} \bar{x} \sinh \zeta_0^{**} \bar{x} \\
 &\quad + A_{16,0}^* \sin \vartheta_0^{**} \bar{x} \cosh \zeta_0^{**} \bar{x}) \\
 &\quad + \frac{(3 \zeta_0^{**2} \vartheta_0^{**} - \vartheta_0^{**3} + 4 \vartheta_0^{**})}{K} \cdot \\
 &\quad \cdot (-A_{13,0}^* \sin \vartheta_0^{**} \bar{x} \cosh \zeta_0^{**} \bar{x} \\
 &\quad - A_{14,0}^* \sin \vartheta_0^{**} \bar{x} \sinh \zeta_0^{**} \bar{x} \\
 &\quad + A_{15,0}^* \cos \vartheta_0^{**} \bar{x} \cosh \zeta_0^{**} \bar{x} \\
 &\quad + A_{16,0}^* \cos \vartheta_0^{**} \bar{x} \sinh \zeta_0^{**} \bar{x})
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(51)$$

ここに、 $A_{9,0}^* \sim A_{16,0}^*$  は殻の境界条件より決定される定数である。

#### 4. 扇形板の曲げ解について

従来扇形板の解析には、フーリエ級数や有限フーリエ変換等が用いられているが<sup>23-25)</sup>、いずれも境界条件の一部があらかじめ決まっており、任意の境界条件を扱い得る一般解の研究は少ない。

幾何学的には、らせん殻のピッチを零とおくと扇形板が得られるが、本文で求められたらせん殻の一般解  $w$  において、ピッチを零とおいても（ただし、本文においては  $K=0$  を意味する）、扇形板の曲げ問題に対する解は得られない。これは、 $K=0$  とおいたときに特性方程式に重根が含まれ、解が別の形になるためであり、以下においては扇形板の曲げ解について考える。

等分布荷重を受ける扇形板の基礎方程式は式 (7) より

$$L_1(w_s) = \tilde{P}_n e^S \dots \dots \dots (52)$$

と書け、ここに  $w_s$  は扇形板のたわみである。式 (52) の解は式 (9) と同様に特殊解と余関数の和として

$$w_s = w_s^I + w_s^{II} + w_s^{III} \dots \dots \dots (53)$$

と書ける。特殊解  $w_s^I$  は式 (12) において  $\delta_{2,m} = 0$  とおくことにより得られ

$$w_s^I = \sum_{m=1,3,5}^M \frac{\tilde{Q}_m}{\delta_{1,m}} e^S \cos \lambda_m x \dots \dots \dots (54)$$

となる。次に  $x$  方向にフーリエ展開した余関数  $w_s^{II}$  は、 $m > 1$  の場合について特性方程式が

$$f(X) = 0 \dots \dots \dots (55)$$

となり、これに対する根は

$$\pm (1 \pm a\lambda_m)$$

と求まり、 $w_s^{II}$  は次式のように書ける。

$$\begin{aligned} w_s^{II} = & \sum_{m=1,3,5}^M (A_{1,m}^S \cosh a\lambda_m \bar{y} + A_{2,m}^S \sinh a\lambda_m \bar{y} \\ & + A_{3,m}^S e^{2\bar{y}} \cosh a\lambda_m \bar{y} \\ & + A_{4,m}^S e^{2\bar{y}} \sinh a\lambda_m \bar{y}) \cos \lambda_m x \\ & + \sum_{m=1,3,5}^M (A_{5,m}^S \cosh a\lambda_m \bar{y} \\ & + A_{6,m}^S \sinh a\lambda_m \bar{y} + A_{7,m}^S e^{2\bar{y}} \cosh a\lambda_m \bar{y} \\ & + A_{8,m}^S e^{2\bar{y}} \sinh a\lambda_m \bar{y}) \sin \lambda_m x \dots \dots \dots (56) \end{aligned}$$

ここに、 $A_{1,m}^S \sim A_{8,m}^S$  は境界条件より決定される定数である。一方、 $m=0$  のときは式(33)と同じ形になり

$$w_s^{II} = A_{1,0}^S + A_{2,0}^S \bar{y} + A_{3,0}^S e^{2\bar{y}} + A_{4,0}^S \bar{y} e^{2\bar{y}} \dots \dots \dots (57)$$

と求まり、ここに、 $A_{1,0}^S \sim A_{4,0}^S$  は定数で境界条件より決定される。

次に  $y$  方向にフーリエ展開した余関数  $w_s^{III}$  を考えると、 $n > 1$  の場合について特性方程式は

$$(b\lambda_n - a\tilde{\lambda})^2 (b\lambda_n + a\tilde{\lambda})^2 \{a^2 \tilde{\lambda}^2 - (b\lambda_n + 2i)^2\} \{a^2 \tilde{\lambda}^2$$

$$- (b\lambda_n - 2i)^2\} = 0 \dots \dots \dots (58)$$

と書け、ここで  $\tilde{\lambda}$  は重根を有していることから  $w_s^{III}$  は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} w_s^{III} = & \sum_{n=1,3,5}^N \{A_{9,n}^S \cosh b\lambda_n \bar{x} + A_{10,n}^S \sinh b\lambda_n \bar{x} \\ & + A_{11,n}^S x \cosh b\lambda_n \bar{x} + A_{12,n}^S x \sinh b\lambda_n \bar{x} \\ & + A_{13,n}^S \cos 2\bar{x} \cosh b\lambda_n \bar{x} \\ & + A_{14,n}^S \cos 2\bar{x} \sinh b\lambda_n \bar{x} \\ & + A_{15,n}^S \sin 2\bar{x} \cosh b\lambda_n \bar{x} \\ & + A_{16,n}^S \sin 2\bar{x} \sinh b\lambda_n \bar{x}\} \cos \lambda_n y \\ & + \sum_{n=1,3,5}^N \left\{ \frac{A_{9,n}^S}{b\lambda_n} \cosh b\lambda_n \bar{x} + \frac{A_{10,n}^S}{b\lambda_n} \sinh b\lambda_n \bar{x} \right. \\ & + \frac{A_{11,n}^S}{b\lambda_n} x \cosh b\lambda_n \bar{x} + \frac{A_{12,n}^S}{b\lambda_n} x \sinh b\lambda_n \bar{x} \\ & - A_{13,n}^S \cos 2\bar{x} \sinh b\lambda_n \bar{x} \\ & - A_{14,n}^S \sin 2\bar{x} \cosh b\lambda_n \bar{x} \\ & + A_{15,n}^S \cos 2\bar{x} \sinh b\lambda_n \bar{x} \\ & \left. + A_{16,n}^S \cos 2\bar{x} \cosh b\lambda_n \bar{x} \right\} \sin \lambda_n y \\ & \dots \dots \dots (59) \end{aligned}$$

ここに、 $A_{9,n}^S \sim A_{16,n}^S$  は境界条件より決定される定数である。 $n=0$  のときは、容易に  $w_s^{III}$  は求まり

$$w_s^{III} = A_{5,0}^S + A_{6,0}^S \bar{x} + A_{7,0}^S \cos 2\bar{x} + A_{8,0}^S \sin 2\bar{x} \dots \dots \dots (60)$$

となり、ここに、 $A_{5,0}^S \sim A_{8,0}^S$  は定数で境界条件より決定される。

ここで従来の研究と比較すると、Yonezawa<sup>23)</sup> は式 (56) の  $\cos \lambda_m x$  に関する項のみを用いており、Carrier<sup>24)</sup> はそれに式 (59) の  $\sin \lambda_n y$  に関する項の一部を加えることにより、周辺固定の扇形板を解析しているが、従来の解はいずれも本報告の一般解の中に含まれていることがわかる。

#### 5. 境界条件

らせん殻の境界条件を考える際に、一般解の中に  $\sin$  関数、 $\cos$  関数以外の関数が含まれており、これらの関数をフーリエ展開する必要がある。その際に偶関数および奇関数はそれぞれ  $\cos$  関数、 $\sin$  関数で展開することとし、以下に必要な関数のフーリエ展開を示す。

$$\begin{aligned} e^{\rho y} = & \sum_{n=1,3,5}^N \left\{ \frac{(e^\rho + e^{-\rho})}{\rho^2 + \lambda_n^2} \lambda_n \sin \lambda_n \cos \lambda_n y \right. \\ & \left. + \frac{(e^\rho - e^{-\rho})}{\rho^2 + \lambda_n^2} \rho \sin \lambda_n \sin \lambda_n y \right\} \dots \dots \dots (61) \\ e^{\rho y} \cosh \rho y = & \sum_{n=1,3,5}^N \left[ \frac{\cosh(\varphi + \rho)}{(\varphi + \rho)^2 + \lambda_n^2} \right. \\ & \left. + \frac{\cosh(\varphi - \rho)}{(\varphi - \rho)^2 + \lambda_n^2} \right] \lambda_n \sin \lambda_n \cos \lambda_n y \end{aligned}$$





$$+ \frac{(\varphi+r)\sin \rho \sinh(\varphi+r) - (\rho-\lambda_n)\cos \rho \cosh(\varphi+r)}{(\varphi+r)^2 + (\rho-\lambda_n)^2} + \frac{(\varphi-r)\sin \rho \sinh(\varphi-r) - (\rho-\lambda_n)\cos \rho \cosh(\varphi-r)}{(\varphi-r)^2 + (\rho-\lambda_n)^2} \left. \right\} \frac{\sin \lambda_n}{2} \sin \lambda_n y \quad (71)$$

$$e^{\varphi y} \cos \rho y \sinh r y = \sum_{n=1,3,5}^N \left[ \left\{ \frac{-(\varphi+r)\sin \rho \sinh(\varphi+r) + (\rho+\lambda_n)\cos \rho \cosh(\varphi+r)}{(\varphi+r)^2 + (\rho+\lambda_n)^2} - \frac{-(\varphi-r)\sin \rho \sinh(\varphi-r) + (\rho+\lambda_n)\cos \rho \cosh(\varphi-r)}{(\varphi-r)^2 + (\rho+\lambda_n)^2} + \frac{(\varphi+r)\sin \rho \sinh(\varphi+r) - (\rho-\lambda_n)\cos \rho \cosh(\varphi+r)}{(\varphi+r)^2 + (\rho-\lambda_n)^2} - \frac{(\varphi-r)\sin \rho \sinh(\varphi-r) - (\rho-\lambda_n)\cos \rho \cosh(\varphi-r)}{(\varphi-r)^2 + (\rho-\lambda_n)^2} \right\} \frac{\sin \lambda_n}{2} \cos \lambda_n y + \left\{ \frac{(\varphi+r)\cos \rho \cosh(\varphi+r) + (\rho+\lambda_n)\sin \rho \sinh(\varphi+r)}{(\varphi+r)^2 + (\rho+\lambda_n)^2} - \frac{(\varphi-r)\cos \rho \cosh(\varphi-r) + (\rho+\lambda_n)\sin \rho \sinh(\varphi-r)}{(\varphi-r)^2 + (\rho+\lambda_n)^2} + \frac{(\varphi+r)\cos \rho \cosh(\varphi+r) + (\rho-\lambda_n)\sin \rho \sinh(\varphi+r)}{(\varphi+r)^2 + (\rho-\lambda_n)^2} - \frac{(\varphi-r)\cos \rho \cosh(\varphi-r) + (\rho-\lambda_n)\sin \rho \sinh(\varphi-r)}{(\varphi-r)^2 + (\rho-\lambda_n)^2} \right\} \frac{\sin \lambda_n}{2} \sin \lambda_n y \right] \quad (72)$$

$$e^{\varphi y} \sin \rho y \sinh r y = \sum_{n=1,3,5}^N \left[ \left\{ \frac{(\varphi+r)\cos \rho \cosh(\varphi+r) + (\rho+\lambda_n)\sin \rho \sinh(\varphi+r)}{(\varphi+r)^2 + (\rho+\lambda_n)^2} - \frac{(\varphi-r)\cos \rho \cosh(\varphi-r) + (\rho+\lambda_n)\sin \rho \sinh(\varphi-r)}{(\varphi-r)^2 + (\rho+\lambda_n)^2} + \frac{(\varphi-r)\cos \rho \cosh(\varphi-r) + (\rho-\lambda_n)\sin \rho \sinh(\varphi-r)}{(\varphi-r)^2 + (\rho-\lambda_n)^2} \right\} \frac{\sin \lambda_n}{2} \cos \lambda_n y + \left\{ \frac{(\varphi+r)\sin \rho \sinh(\varphi+r) - (\rho+\lambda_n)\cos \rho \cosh(\varphi+r)}{(\varphi+r)^2 + (\rho+\lambda_n)^2} - \frac{(\varphi-r)\sin \rho \sinh(\varphi-r) - (\rho+\lambda_n)\cos \rho \cosh(\varphi-r)}{(\varphi-r)^2 + (\rho+\lambda_n)^2} + \frac{(\varphi+r)\sin \rho \sinh(\varphi+r) - (\rho-\lambda_n)\cos \rho \cosh(\varphi+r)}{(\varphi+r)^2 + (\rho-\lambda_n)^2} - \frac{(\varphi-r)\sin \rho \sinh(\varphi-r) - (\rho-\lambda_n)\cos \rho \cosh(\varphi-r)}{(\varphi-r)^2 + (\rho-\lambda_n)^2} \right\} \frac{\sin \lambda_n}{2} \sin \lambda_n y \right] \quad (73)$$

$$\cosh \rho y = \sum_{n=1,3,5}^N \frac{2 \lambda_n \cosh \rho}{\rho^2 + \lambda_n^2} \sin \lambda_n \cos \lambda_n y \quad (74)$$

$$\sinh \rho y = \sum_{n=1,3,5}^N \frac{2 \rho \cosh \rho}{\rho^2 + \lambda_n^2} \sin \lambda_n \sin \lambda_n y \quad (75)$$

なお以上の式において、 $x$ に関するフーリエ展開を求めたい場合には、 $y \rightarrow x$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda_m$ とすればよい。また扇形板の解析においては、さらに以下の関数をフーリエ展開する必要がある。

$$\left. \begin{aligned} x \cosh \rho x &= \sum_{m=1,3,5}^M \frac{2 \rho^2 \sin \lambda_m}{(\rho^2 + \lambda_m^2)} \left\{ \frac{\sinh \rho}{\rho} - \left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\rho^2}\right) \frac{\cosh \rho}{\rho^2 + \lambda_m^2} \right\} \sin \lambda_m x \\ x \sinh \rho x &= \sum_{m=1,3,5}^M \frac{2 \rho^2 \sin \lambda_m}{(\rho^2 + \lambda_m^2)} \left\{ \frac{\lambda_m \sinh \rho}{\rho^2} - \frac{2 \lambda_m \cosh \rho}{\rho(\rho^2 + \lambda_m^2)} \right\} \cos \lambda_m x \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

ここでは例として、変位  $w$  が殻の周辺において零となる境界条件式を求めるが、その際に  $w^{\text{II}}$ ,  $\tilde{\varphi}^{\text{II}}$  については式(29), (30)の解を用いる。また、他の境界条件についても同様の方法にて条件式が求まる。まず  $x = \pm 1$  において  $w = 0$  という条件式は、 $w$  を  $y$  方向にフーリ

エ展開した際の  $\cos \lambda_n y$  および  $\sin \lambda_n y$  の係数が、 $x = \pm 1$  においてそれぞれ零となることより以下のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{m=1,3,5}^M A_{9,m} B_{m,n^1} \sin \lambda_m x \\ &+ \sum_{m=1,3,5}^M A_{10,m} B_{m,n^3} \sin \lambda_m x \\ &+ \sum_{m=1,3,5}^M A_{11,m} B_{m,n^5} \sin \lambda_m x \\ &+ \sum_{m=1,3,5}^M A_{12,m} B_{m,n^7} \sin \lambda_m x \\ &+ \sum_{m=1,3,5}^M A_{13,m} C_{m,n^1} \sin \lambda_m x \\ &+ \sum_{m=1,3,5}^M A_{14,m} C_{m,n^3} \sin \lambda_m x \\ &+ \sum_{m=1,3,5}^M A_{15,m} C_{m,n^5} \sin \lambda_m x \\ &+ \sum_{m=1,3,5}^M A_{16,m} C_{m,n^7} \sin \lambda_m x \\ &+ \sum_{j=1}^4 (\tilde{A}_{4j-3,n} \cos \vartheta_{jx} \cosh \zeta_{jx} \\ &+ \tilde{A}_{4j-2,n} \cos \vartheta_{jx} \sinh \zeta_{jx} + \tilde{A}_{4j-1,n} \sin \vartheta_{jx} \\ &\cdot \cosh \zeta_{jx} + \tilde{A}_{4j,n} \sin \vartheta_{jx} \sinh \zeta_{jx}) \\ &= 0 \quad (n=1, 3, 5, \dots, N) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1,3,5}^M A_{9,m} B_{m,n}{}^2 \sin \lambda_m x \\
 & + \sum_{m=1,3,5}^M A_{10,m} B_{m,n}{}^4 \sin \lambda_m x \\
 & + \sum_{m=1,3,5}^M A_{11,m} B_{m,n}{}^6 \sin \lambda_m x \\
 & + \sum_{m=1,3,5}^M A_{12,m} B_{m,n}{}^8 \sin \lambda_m x \\
 & + \sum_{m=1,3,5}^M A_{13,m} C_{m,n}{}^2 \sin \lambda_m x \\
 & + \sum_{m=1,3,5}^M A_{14,m} C_{m,n}{}^4 \sin \lambda_m x \\
 & + \sum_{m=1,3,5}^M A_{15,m} C_{m,n}{}^6 \sin \lambda_m x \\
 & + \sum_{m=1,3,5}^M A_{16,m} C_{m,n}{}^8 \sin \lambda_m x \\
 & + \sum_{j=1}^4 \left\{ \tilde{A}_{4j-3,n} (T_j^* \cos \vartheta_j x \cosh \zeta_j x) \right. \\
 & - T_j^{**} \sin \vartheta_j x \sinh \zeta_j x \\
 & + \tilde{A}_{4j-2,n} (T_j^* \cos \vartheta_j x \sinh \zeta_j x) \\
 & - T_j^{**} \sin \vartheta_j x \cosh \zeta_j x \\
 & + \tilde{A}_{4j-1,n} (T_j^* \sin \vartheta_j x \cosh \zeta_j x) \\
 & + T_j^{**} \cos \vartheta_j x \sinh \zeta_j x \\
 & + \tilde{A}_{4j,n} (T_j^* \sin \vartheta_j x \sinh \zeta_j x) \\
 & \left. + T_j^{**} \cos \vartheta_j x \cosh \zeta_j x \right\} \\
 & = 0 \quad (n=1, 3, 5, \dots, N)
 \end{aligned}$$

.....(77)

ここに、 $B_{m,n}{}^1(B_{m,n}{}^5)$ 、 $B_{m,n}{}^2(B_{m,n}{}^6)$  はそれぞれ式(62)において  $\varphi=1/b(1/b)$ 、 $\rho=\eta_1/b(\eta_2/b)$  とおいた場合の  $\cos$  関数、 $\sin$  関数のフーリエ係数であり、 $B_{m,n}{}^3(B_{m,n}{}^7)$ 、 $B_{m,n}{}^4(B_{m,n}{}^8)$  は式(63)において  $\varphi=1/b(1/b)$ 、 $\rho=\eta_1/b(\eta_2/b)$  とおいた場合の  $\cos$  関数、 $\sin$  関数のフーリエ係数であり、 $C_{m,n}{}^{2j-1}$ 、 $C_{m,n}{}^{2j}$  ( $j=1\sim 4$ ) は(69+ $j$ )式において  $\varphi=1/b$ 、 $\rho=\mu/b$ 、 $\tau=\kappa/b$  とおいた場合の  $\cos$  関数、 $\sin$  関数のフーリエ係数である。式(77)は  $x=\pm 1$  で成立することから、求まる方程式の数は  $2*(N+1)$  となる。同様にして、 $y=\pm 1$  において  $w=0$  という条件式は、 $w$  を  $x$  方向にフーリエ展開した際に  $\cos \lambda_m x$  および  $\sin \lambda_m x$  の係数がそれぞれ  $y=\pm 1$  において零となることより、 $2*(M+1)$  個の方程式が以下のように入る。

$$\begin{aligned}
 & A_{1,m} e^{\bar{y}} \cosh \eta_1 \bar{y} + A_{2,m} e^{\bar{y}} \sinh \eta_1 \bar{y} \\
 & + A_{3,m} e^{\bar{y}} \cosh \eta_2 \bar{y} + A_{4,m} e^{\bar{y}} \sinh \eta_2 \bar{y} \\
 & + A_{5,m} e^{\bar{y}} \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} \\
 & + A_{6,m} e^{\bar{y}} \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} \\
 & + A_{7,m} e^{\bar{y}} \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} \\
 & + A_{8,m} e^{\bar{y}} \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} \\
 & + \sum_{n=1,3,5}^N \sum_{j=1}^4 \tilde{A}_{4j-3,n} (T_j^* D_{n,m}{}^{1,j})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - T_j^{**} D_{n,m}{}^{4,j} \sin \lambda_n y \\
 & + \sum_{n=1,3,5}^N \sum_{j=1}^4 \tilde{A}_{4j,n} (T_j^* D_{n,m}{}^{4,j}) \\
 & + T_j^{**} D_{n,m}{}^{1,j} \sin \lambda_n y \\
 & + \frac{\delta_{1,m}}{(\delta_{1,m}{}^2 - \delta_{2,m}{}^2)} \bar{Q}_m e^S = 0 \quad (m=1, 3, 5, \dots, M) \\
 & A_{9,m} e^{\bar{y}} \cosh \eta_1 \bar{y} + A_{10,m} e^{\bar{y}} \sinh \eta_1 \bar{y} \\
 & + A_{11,m} e^{\bar{y}} \cosh \eta_2 \bar{y} + A_{12,m} e^{\bar{y}} \sinh \eta_2 \bar{y} \\
 & + A_{13,m} e^{\bar{y}} \cos \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} \\
 & + A_{14,m} e^{\bar{y}} \sin \mu \bar{y} \cosh \kappa \bar{y} \\
 & + A_{15,m} e^{\bar{y}} \cos \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} \\
 & + A_{16,m} e^{\bar{y}} \sin \mu \bar{y} \sinh \kappa \bar{y} \\
 & + \sum_{n=1,3,5}^N \sum_{j=1}^4 \tilde{A}_{4j-2,n} (T_j^* D_{n,m}{}^{2,j}) \\
 & - T_j^{**} D_{n,m}{}^{3,j} \sin \lambda_n y \\
 & + \sum_{n=1,3,5}^N \sum_{j=1}^4 \tilde{A}_{4j-1,n} (T_j^* D_{n,m}{}^{3,j}) \\
 & + T_j^{**} D_{n,m}{}^{2,j} \sin \lambda_n y = 0 \quad (m=1, 3, 5, \dots, M) \\
 & \dots \dots \dots (78)
 \end{aligned}$$

ここに、 $D_{n,m}{}^{k,j}$  ( $k=1\sim 4$ ) は、(65+ $k$ )式において  $y=x$ 、 $n=m$ 、 $\rho=\vartheta_j$ 、 $\varphi=\zeta_j$  とおいたときのフーリエ係数である。

### 6. 数値計算例

本文の数値計算においては、らせん殻および扇形板の境界条件として、周辺固定支持と直線辺固定・円弧辺単純支持との二通りを考える。すなわち、らせん殻については、

$$\begin{aligned}
 \text{A-1)} & : \begin{cases} w = \partial w / r \partial \theta = u = v = 0 & (x = \pm 1) \\ w = \partial w / \partial r = u = v = 0 & (y = \pm 1) \end{cases} \\
 \text{A-2)} & : \begin{cases} w = \partial w / r \partial \theta = u = v = 0 & (x = \pm 1) \\ w = M, u = v = 0 & (y = \pm 1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

と書け、扇形板の境界条件式は、上記の式で  $u, v$  を消去することにより得られる。殻のピッチおよび半径  $r_0, r_1$  は一定として、開角  $\alpha$  については以下の二通りを考える。

- (1) ピッチ=5 m,  $r_0=5$  m,  $r_1=10$  m,  $\alpha=2/3$  rad
- (2) ピッチ=5 m,  $r_0=5$  m,  $r_1=10$  m,  $\alpha=2\pi/3$  rad

材料定数は曲げ剛性が一定となるように、Young 係数と殻厚を変化させ以下の三通りを考える。なお、以後の計算においては Poisson 比は零と仮定している。

- B-1) :  $E=1.68 \times 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>[164.64 GPa],  $t=5$  cm,  $K=110$
- B-2) :  $E=2.1 \times 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>[20.58 GPa],  $t=10$  cm,  $K=55$
- B-3) :  $E=2.625 \times 10^4$  kgf/cm<sup>2</sup>[2.573 GPa],  $t=20$  cm,  $K=22.5$

表-1 扇形板のたわみ, モーメント ( $\alpha=2/3$  rad)

変位・モーメント 解析方法	$\alpha^* [w_s = \alpha^* \frac{q l^4}{D}]$	$\beta^* [M_r = \beta^* q l^2]$
本 報 告	0.001242	0.01774
階差法普通 8 分割	0.001408	0.01814
階差法普通 16 分割	0.001292	0.01781
階差法高精度 8 分割	0.001272	0.01768

ただし,  $q$  は等分布荷重,  $l$  は直線辺長

フーリエ級数の項数については, 有効数字 5 桁まで求めた結果, 変位・応力ともに  $M=N=21$  項とれば十分であることが確かめられた. また, 等分布荷重  $P_n$  は  $0.1 \text{ kgf/cm}^2 [9.8 \text{ kPa}]$  として計算を行った.

周辺固定支持の扇形板については, 変位および応力に関して, 解析解と近似解との比較は今までにあまり行われていないため, ここでは開角  $\alpha$  が  $2/3$  rad の場合について, 本報告による結果と階差法<sup>2b)</sup>による結果との比較を表-1 に示した. たわみおよび曲げモーメントは,

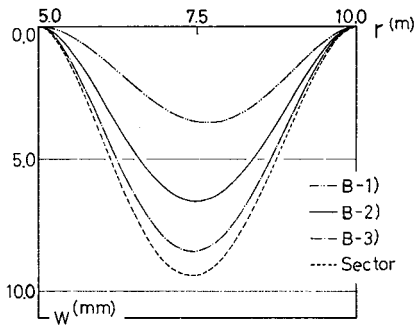


図-3 たわみ ( $\alpha=2\pi/3$  rad)

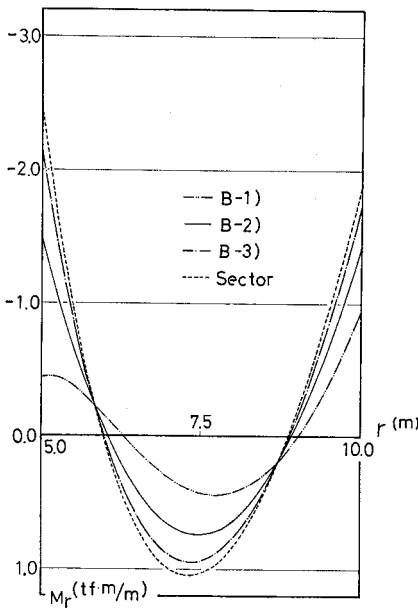


図-4 曲げモーメント ( $\alpha=2\pi/3$  rad,  $1 \text{ tf}\cdot\text{m/m} = 9.8 \text{ kN}\cdot\text{m/m}$ )

ともに扇形板中央点における値である. 両者を比較すると, 階差法の分割数が少ない場合には, 変位に差がみられるものの, 分割数を増すにつれて差は小さくなり, 実用的には階差法でも十分と考えられる.

表-2 では, 開角  $\alpha$  が  $2/3$  rad の場合について, 境界条件を (A-1) として,  $x=0$  におけるらせん殻のたわみおよび曲げモーメントの値を示した. 図-3~5 においては, 開角  $\alpha$  が  $2\pi/3$  rad で境界条件式として A-1) の場合について, また, 図-6~8 においては, 開角  $\alpha$  が  $2\pi/3$  rad で境界条件式として A-2) の場合について, それぞれ  $x=0$  におけるらせん殻のたわみ・曲げモー

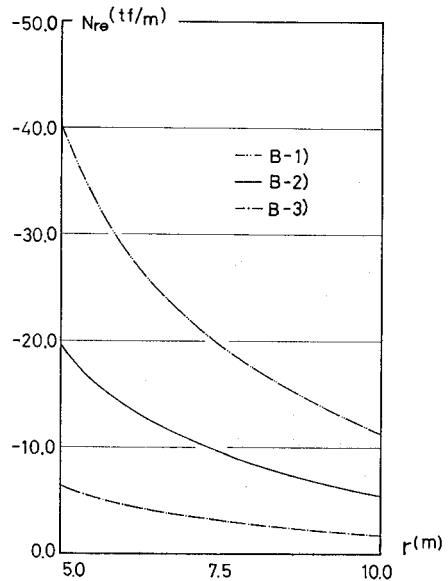


図-5 面内せん断力 ( $\alpha=2\pi/3$  rad,  $1 \text{ tf/m} = 9.8 \text{ kN/m}$ )

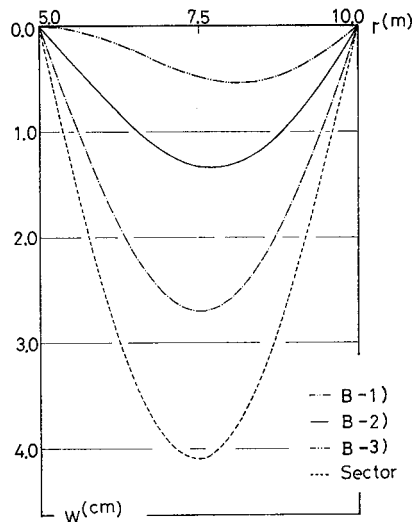


図-6 たわみ ( $\alpha=2\pi/3$  rad)

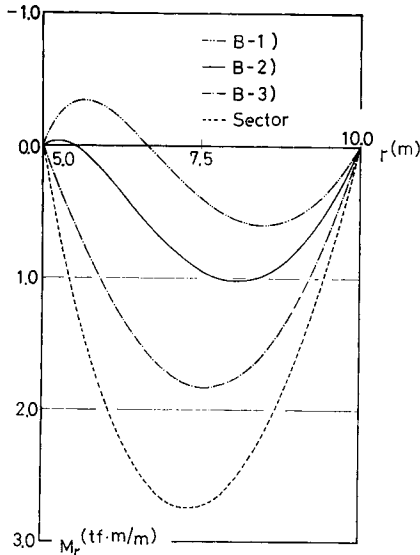


図-7 曲げモーメント ( $\alpha=2\pi/3$  rad,  $1\text{ tf}\cdot\text{m}/\text{m}=9.8\text{ kN}\cdot\text{m}/\text{m}$ )

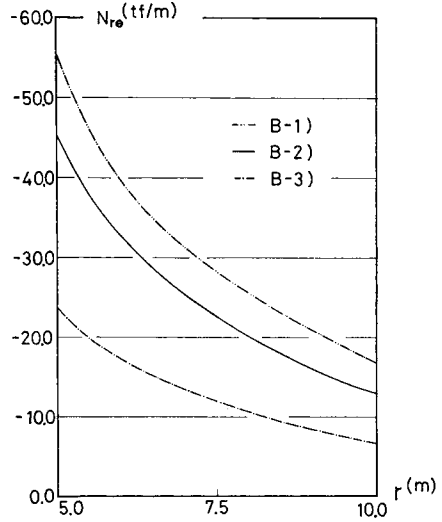


図-8 面内せん断力 ( $\alpha=2\pi/3$  rad,  $1\text{ tf}/\text{m}=9.8\text{ kN}/\text{m}$ )

表-2 らせん殻のたわみ，モーメント ( $\alpha=2/3$  rad)

$r = \frac{r_0(1-r^*)}{r_0(1+r^*) + r_1(1+r^*)/2}$	$\alpha^* \left[ w = \alpha^* \frac{P_n l^2}{D} \right]$			$\beta^* [M_r = \beta^* P_n l^2]$		
	B-1)	B-2)	B-3)	B-1)	B-2)	B-3)
-1.0	0.0	0.0	0.0	-0.026 882	-0.042 872	-0.049 381
-0.9	0.000 029	0.000 045	0.000 052	-0.015 874	-0.024 397	-0.027 829
-0.8	0.000 098	0.000 152	0.000 175	-0.008 811	-0.012 705	-0.014 234
-0.7	0.000 189	0.000 292	0.000 334	-0.004 157	-0.005 052	-0.005 356
-0.6	0.000 291	0.000 445	0.000 507	-0.000 899	0.000 229	0.000 742
-0.5	0.000 396	0.000 598	0.000 679	0.001 600	0.004 130	0.005 199
-0.4	0.000 497	0.000 741	0.000 839	0.003 724	0.007 227	0.008 670
-0.3	0.000 588	0.000 866	0.000 976	0.005 675	0.009 825	0.011 505
-0.2	0.000 665	0.000 966	0.001 085	0.007 522	0.012 047	0.013 854
-0.1	0.000 724	0.001 036	0.001 159	0.009 235	0.013 893	0.015 731
0.0	0.000 759	0.001 072	0.001 194	0.010 706	0.015 271	0.017 052
0.1	0.000 768	0.001 069	0.001 187	0.011 771	0.016 026	0.017 668
0.2	0.000 747	0.001 027	0.001 136	0.012 225	0.015 954	0.017 378
0.3	0.000 697	0.000 945	0.001 041	0.011 833	0.014 820	0.015 947
0.4	0.000 616	0.000 826	0.000 907	0.010 342	0.012 368	0.013 118
0.5	0.000 510	0.000 676	0.000 741	0.007 498	0.008 332	0.008 620
0.6	0.000 386	0.000 506	0.000 553	0.003 049	0.002 446	0.002 182
0.7	0.000 255	0.000 331	0.000 360	-0.003 233	-0.005 544	-0.006 461
0.8	0.000 132	0.000 170	0.000 184	-0.011 551	-0.015 871	-0.017 556
0.9	0.000 038	0.000 049	0.000 053	-0.022 064	-0.028 737	-0.031 319
1.0	0.0	0.0	0.0	-0.034 870	-0.044 286	-0.047 915

ント・面内せん断力の分布を図示した。なお、図-3, 4, 6, 7 には、らせん殻と同じ曲げ剛性を有する扇形板の結果もあわせて図示した。以上の数値結果より、らせん殻の力学的特徴をまとめると次のとおりとなる。

(1) たわみと曲げモーメントは、パラメーター  $K$  が大きくなるにつれその最大値（絶対値）は小さくなり、一方、面内せん断力は、パラメーター  $K$  が大きくなるにつれその最大値（絶対値）は大きくなる傾向がある。

(2) 円弧辺固定支持のモーメント分布図より、 $K$  が大きくなるにつれ、円弧辺内側より外側の曲げモーメント値が大きくなっていることがわかる。また、円弧辺単純支持のモーメント分布図より、 $K$  が大きくなるにつれ、円弧辺内側に負の曲げモーメントが生じており、扇形板の挙動とはかなり異なっていることがわかる。

(3) 負の Gauss 曲率を有する H.P. 殻の特徴は、鉛直荷重に対し面内せん断力で抵抗することである。らせん殻についても同様に、面内変位が拘束される場合には、曲げモーメントとともに面内せん断力で抵抗していることがわかる。

本報告においては、ピッチを一定として計算しているが、殻の一般解からわかるように、たとえピッチが変化しても、以下に示すような材料定数の場合には、たわみと面外断面力はすべて同一の値になることがわかる。

- C-1) : ピッチ=2.5 m,  $E=1.68 \times 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>[164.64 GPa],  $t=5$  cm,  $\nu=0.2$
- C-2) : ピッチ=5 m,  $E=2.1 \times 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>[20.58 GPa],  $t=10$  cm,  $\nu=0.2$
- C-3) : ピッチ=7.5 m,  $E=6.2 \times 10^4$  kgf/cm<sup>2</sup>[6.1 GPa],  $t=15$  cm,  $\nu=0.2$

すなわち、パラメーター  $K$  と曲げ剛性  $D$  とが同じ値であれば、たわみが等しく、さらに Poisson 比が同じであれば、面外断面力も等しくなる。従来、パラメータ

ーとしてピッチを用いた研究が多く、ピッチが変化すると、殻の挙動もすべて変わるものと考えられていたが、以上のことより、無次元量  $K$  をパラメーターとして用いた方がより有効であることがわかる。

## 7. おわりに

本報告では、まず偏平らせん殻の基礎微分方程式において、変数変換を施すことにより定数係数の微分方程式を導き、フーリエ級数の手法を用いて、周辺において任意の境界条件を扱得る解析解を求めた。さらに、殻の一般解においてピッチに関する項を零とおいても扇形板の一般解は得られないことを示し、別に扇形板の曲げ解を求めており、これも周辺において任意の境界条件を扱うことができる。

従来、らせん殻の解析には、殻のピッチがパラメーターとして多く用いられていたが、殻のピッチが異なっても曲げ剛性および無次元量  $K$  の値が同じであれば面外変位が等しく、さらに、Poisson 比が同じであれば面外断面力も等しくなることを示し、本報告で用いたパラメーター  $K$  が有効であることを明らかにした。そして、 $K$  の値が大きくなるにつれ、らせん殻の挙動は扇形板の挙動から離れていくことがわかった。

最後に、本論文作成にあたり、有益なご助言をいただきました、東京大学名誉教授・東京電機大学教授 奥村敏恵先生および早稲田大学講師 依田照彦先生に深く感謝致します。なお、本研究は昭和56年度科学研究費補助金(奨励研究(A))の補助を受けた。また、数値計算には東京電機大学計算機センター FACOM M-160を使用したことを付記する。

## 参考文献

- 1) Reissner, E.: On Finite Twisting and Bending of Circular Ring Sector Plates and Shallow Helicoidal Shells, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 11, pp. 473~483, 1953.
- 2) Wan, F.Y.M.: A Class of Unsymmetric Stress Distributions in Helicoidal Shells, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 24, pp. 374~379, 1967.
- 3) Knowles, J. and E. Reissner: Torsion and Extension of Helicoidal Shells, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 17, pp. 409~422, 1959.
- 4) Reissner, E.: On Twisting and Stretching of Helicoidal Shells, Proc. I.U.T.A.M. Symposium on Shell Theory, 1959, pp. 434~466, Amsterdam 1960.
- 5) O'Mathuna, D.: Rotationally Symmetric Deformations in Helicoidal Shells, J. Math. Phys., 42 (1963), pp.

- 85~111.
- 6) Cohen, J.W.: The Inadequacy of the Classical Stress-Strain Relations for the Right Helicoidal Shell, Proc. I.U.T.A.M. Symposium on Shell Theory, 1959, pp. 415~433, Amsterdam 1960.
- 7) Reissner, E.: Small Rotationally Symmetric Deformations of Shallow Helicoidal Shells, J. Appl. Mech., 22, pp. 31~34, 1955.
- 8) Wan, F.Y.M.: Pure Bending of Shallow Helicoidal Shells, J. Appl. Mech., Vol. 35 (1968), pp. 387~392.
- 9) Hirashima, M. and M. Iura: Analysis of Shallow Right Helicoidal Shells by the Stress Function Method, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 29.
- 10) 西村敏雄: テンソルとシェル理論, 彰国社, 1977.
- 11) 神園勝彦・西村敏雄: スパイラルシェルの解析(その2), 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1976.
- 12) 内山武司・土橋由造: 折版階段及び螺旋階段の構造設計, 日本建築学会論文報告集, 第265号, 1978.
- 13) 平嶋政治・井浦雅司: 混合型の有限要素による Right Helicoidal Shell の解析, 日本鋼構造協会マトリックス解析法研究論文集, 1979.
- 14) Cusens, A.R.: Test on Helical Stairs, Concrete and Constructional Engineering, Oct., 1964.
- 15) 土生修二・平嶋政治・井浦雅司: 集中荷重をうけるらせん板の実験的研究, 第7回土木学会関東支部年次研究発表会, 1980.
- 16) Young, Y.F. and A.C. Scordelis: An Analytical and Experimental Study of Helicoidal Girders, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 84, No. ST 5, pp. 1~29, Sept., 1958.
- 17) Scordelis, A.C.: Internal Forces in Uniformly Loaded Helicoidal Girders, ACI, April, 1960.
- 18) Abdul-Baki, A. and A. Shukair: Continuous Helicoidal Girders, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST 10, pp. 2183~2203, Oct., 1973.
- 19) 角野晃二: 偏平ハイパボリックパラボロイドシェルのフーリエ解析, 日本建築学会論文報告集, 第98号, 1964.
- 20) 坪井善勝: 曲面構造, 丸善, 1965.
- 21) Flügge, W.: Stresses in Shells, Springer-Verlag, 1973.
- 22) 坪井善勝・氏家浩司: 非閉鎖円錐殻曲り応力の近似解, 日本建築学会論文報告集, 第117号, 1965.
- 23) Yonezawa, H.: Moments and Free Vibrations in Curved Girder Bridges, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 88, No. EM 1, pp. 1~21, February, 1962.
- 24) Carrier, G.F.: The Bending of the Clamped Sectorial Plate, J. Appl. Mech., 11 (1944), A-134~A-139.
- 25) 芳村 仁: 曲線直交異方性扇形平板の曲げについて, 土木学会論文集, 第82号, 1962年6月.
- 26) 奥村 勇: 曲線直交異方性扇形平板の階差法による解法, 土木学会論文集, 第140号, 1967年4月.

(1981.2.19・受付)