

## 軸対称構造物による波の散乱と波力

SCATTERING OF WATER WAVES DUE TO VERTICAL AXISYMMETRIC  
BODIES AND INDUCED FORCES

清川 哲志\*・小林 浩\*\*・日野 幹雄\*\*\*

By Tetsushi KIYOKAWA, Hiroshi KOBAYASHI and Mikio HINO

## 1. 序 論

本論文は、一定水深中に置かれた軸対称構造物による微小振幅波の散乱と構造物に作用する流体力を、固有関数展開およびフーリエ展開などを用いて、厳密に求める方法について述べるものである。

従来、構造物に作用する波力の実用算定法として有名なものに Morison・O'Brien<sup>1)</sup> によるものがあり、通常の波力計算にはこれが用いられてきた。しかし、Garrison<sup>2)</sup> も指摘しているように、この適用範囲は構造物の径  $D$  と入射波の波長  $L$  との比  $D/L$  が  $1/5$  以下の場合であり、構造物の大型化による波自身の変形、すなわち回折・散乱などの影響が大きい場合には適用できない。

回折・散乱などの波の変形を考慮した理論には、大型円筒構造物を対象とした MacCamy・Fuchs<sup>3)</sup> によるもの、大型円筒構造物を対象とした合田ら<sup>4)</sup> によるものがあり、これらは、いずれも速度ポテンシャルに関する境界値問題として、純解析的に導かれている。

これに対して、構造物形状が複雑になると、グリーン関数を用いてこれを核関数とする積分方程式を導き、連立方程式に変換して数値的に解くという方法<sup>5)~9)</sup> が一般的である。また、最近は大電子計算機の普及と、これに伴う有限要素解析の流行から、波の回折・散乱の問題にこれを適用した例も見受けられる<sup>10)~13)</sup>。

しかし、これらはいずれも数値解析による近似解法であり、また、大行列演算を必要とする。特に、有限要素法は、一般に無限領域を扱うのに適した方法とはいえず、しかも、海洋構造物の波力の問題で必要とするのは構造物表面のポテンシャル値のみであるのに、構造物を囲む領域すべてについて有限要素メッシュを切る必要が

あり、3次元問題などでは、未知数の数は膨大なものとなる。この点を改良する試みも瀬戸<sup>14)~16)</sup> らによって行われているが、いずれにしても著者らは、有限要素法は、海洋構造物を解析する方法として、それほど適したものではないと考えている。

一方、本論文で取り扱う軸対称構造物を対象とした理論解析は、Black<sup>17)</sup>、Fenton<sup>18)</sup>、松井<sup>19)</sup> らにより行われているが、これらはいずれもグリーン関数をフーリエ展開して、フーリエ次数ごとに積分方程式を導くもので、積分方程式の解法にあたっては、離散化手法を用いている。したがって、これらの解析も、やはり数値解析の一種であるといえることができる。

これに対して、本論文で示す理論は厳密解を構成するものである。これは、固有関数展開およびフーリエ展開によって、軸対称問題の一般解を導き、この一般解を用いて表わした構造物表面の境界条件を、さらに固有関数で展開することによって、一般解中の未定係数が満たすべき関係式を導くもので、これによると個々の構造物の形状に応じて、未定係数が満たすべき複素係数連立1次方程式が得られ、これを解いて得られる係数を一般解に代入すると、基礎方程式とすべての境界条件を満足する厳密解が得られる。

以下、本論文ではこの理論の展開に重点を置いて述べる。そして、本理論を円筒構造物に適用すると、先に述べた MacCamy・Fuchs の解が得られる過程を示し、本理論が円筒の場合の MacCamy と Fuchs の理論を包含した、より一般的な理論であることを明らかにする。また、軸対称構造物の代表的な例として、円すい台 (conical island) による回折と波力、貯油タンク型構造物の波力などについて計算結果を示す。

\* 正会員 清水建設(株)研究所 海洋研究部

\*\* 正会員 Eng. Sc. D. 清水建設(株)研究所主席研究員

\*\*\* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

## 2. 軸対称構造物による波の回折・散乱に関する理論

### (1) 基礎方程式と一般解

水深が一定の水域に、海底面上に設置された頭出し軸対称構造物があり、これに角振動数  $\omega$  の微小振幅波が入射している。そして、入射波は、構造物によって散乱しているものとする。

図-1 に示すように、座標系を静水面上、構造物中心に原点  $O$ 、鉛直上方に  $z$  軸、水平面内に  $x, y$  軸をとって定義する。また、円筒座標を  $x$  軸から反時計まわりに  $\theta, z$  軸からの水平距離  $r$  をとって定義する。

軸対称構造物を対象としているので、入射波はどの方向から来ても同じである。便宜上、 $x$  軸の正の方向から負の方向に進行しているものとする。

流体は非粘性・非圧縮性とし、運動は非回転であるとす。このとき、速度ポテンシャルが存在し、流体運動はこれに支配される。ここでは、これを入射波のポテンシャル  $\phi_{in}$  と、散乱波のポテンシャル  $\phi_{sc}$  の和と考え、軸対称構造物を取り扱う便宜上、円筒座標で次のように表わす。

$$\phi(r, \theta, z, t) = \frac{gH_0}{2\omega} \{ \phi_{in}(r, \theta, z) + \phi_{sc}(r, \theta, z) \} e^{i\omega t} \dots\dots\dots(1)$$

上式で入射波のポテンシャル関数  $\phi_{in}$  は既知であり、次のように表わされる。

$$\phi_{in}(r, \theta, z) = \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} \cdot e^{ik_0 r \cos \theta} \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 $H_0$  : 入射波高、 $g$  : 重力加速度、 $h$  : 水深、 $i$  :

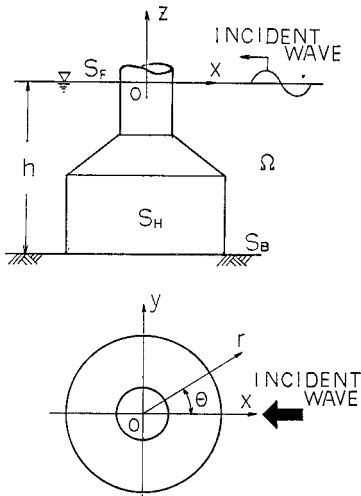


図-1 座標系の定義

虚数単位、 $k_0$  : 波数 ( $k_0 \tanh k_0 h = \omega^2/g$  の実正根) である。

散乱波のポテンシャル  $\phi_{sc}$  は、次の基礎方程式と境界条件を満たすものとして得られる。

$$\nabla^2 \phi_{sc} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \dots\dots\dots(3)$$

$$\partial \phi_{sc} / \partial z - (\omega^2/g) \phi_{sc} = 0 \quad (\text{on } S_F) \dots\dots\dots(4)$$

$$\partial \phi_{sc} / \partial z = 0 \quad (\text{on } S_B) \dots\dots\dots(5)$$

$$\partial \phi_{sc} / \partial n = -\partial \phi_{in} / \partial n \quad (\text{on } S_H) \dots\dots\dots(6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} (\partial \phi_{sc} / \partial r - ik_0 \phi_{sc}) = 0 \dots\dots\dots(7)$$

ここに、 $\nabla^2$  : ラプラシアン、 $\Omega$  : 解析領域内部、 $S_F$  : 自由表面、 $S_B$  : 海底面、 $S_H$  : 構造物表面である。また、 $n$  による微分は構造物表面における法線方向微分を表わす。

入射波は  $\theta=0$  より入射し、構造物が軸対称形であることから、散乱波も  $\theta$  に関して対称、したがって  $\theta$  の偶関数でなければならない。さらに解は  $\theta$  に関して周期  $2\pi$  の周期関数であることも明らかである。 $\theta$  に関するこれらの性質から、 $\phi_{sc}$  を次のようにフーリエ余弦級数で表わす。

$$\phi_{sc}(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(r, z) \cdot \cos m\theta \dots\dots\dots(8)$$

ここに、 $\varphi^{(m)}(r, z)$  は、 $m$  次のフーリエ係数で、 $r$  と  $z$  の関数である。

これを、式 (3) に代入すると、 $\varphi^{(m)}(r, z)$  に関して次の偏微分方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \varphi^{(m)} + \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots(9)$$

また、同様に式 (4), (5), (7) より、 $\varphi^{(m)}(r, z)$  に関する次の境界条件および放射条件が得られる。

$$\partial \varphi^{(m)} / \partial z - (\omega^2/g) \varphi^{(m)} = 0 \quad (\text{on } S_F) \dots\dots\dots(10)$$

$$\partial \varphi^{(m)} / \partial z = 0 \quad (\text{on } S_B) \dots\dots\dots(11)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} (\partial \varphi^{(m)} / \partial r - ik_0 \varphi^{(m)}) = 0 \dots\dots\dots(12)$$

式 (9)~(12) を満たす解を、固有関数の重ね合わせによる無限級数の形で求めると次式となる。

$$\begin{aligned} \varphi^{(m)}(r, z) = & \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \cdot \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} \cdot K_m(k_n r) \\ & - i A_0^{(m)} \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} \cdot H_m^{(2)}(k_0 r) \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

ここに、 $A_n^{(m)}$  ( $n, m=0, 1, \dots$ ) : 複素未定係数、 $k_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) : 固有値 ( $k_n \tanh k_n h = -\omega^2/g$  の実正根)、 $K_m$  : 第2種変形ベッセル関数、 $H_m^{(2)}$  : 第2種ハンケル関数である。

散乱波のポテンシャル関数  $\phi_{sc}$  は、式 (13) を式 (8) に代入することにより、次式のごとく表わされる。

$$\phi_{sc}(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \cdot \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} \right.$$

$$\cdot K_m(k_n r) - i A_0^{(m)} \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} \cdot H_m^{(2)}(k_0 r) \Big\} \cdot \cos m\theta \dots\dots\dots (14)$$

これは、構造物表面の境界条件 (6) を除いた、基礎方程式 (3)、および、自由表面条件 (4)、海底の不透過条件 (5)、無限遠における放射条件 (7) を満たしており、任意の軸対称構造物による散乱波の一般解である。

(2) 構造物表面条件の固有関数による展開と未定係数の決定

一般解 (14) における未定係数  $A_n^{(m)}(n, m=0, 1, \dots)$  は、個々の構造物形状に応じて、式 (14) が構造物表面の不透過条件 (6) を満足するように決めればよい。ここでは、この方法について述べる。

散乱波のポテンシャル関数  $\phi_{sc}$  を式 (8) のごとくフーリエ余弦展開したのに対応して、入射波のポテンシャル関数 (2) もフーリエ余弦展開する。これには、式 (2) 中の指数関数の部分がベッセル関数を用いて、次のように展開できることを用いる<sup>2)</sup>。

$$e^{ik_r r \cos \theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m \cos m\theta \cdot J_m(k_0 r) \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $\epsilon_m$  : ノイマン数 ( $m=0$  のとき  $1, m \geq 1$  のとき  $2$ )、 $J_m$  : 第 1 種ベッセル関数である。

したがって、式 (15) を式 (2) に代入し、フーリエ係数として  $\varphi_{in}^{(m)}$  を次のように定義すると、入射波のポテンシャル関数  $\phi_{in}$  もフーリエ余弦展開できたことになる。

$$\begin{cases} \varphi_{in}^{(m)}(r, z) = \epsilon_m i^m \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} J_m(k_0 r) \dots\dots\dots (16) \\ \phi_{in}(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{in}^{(m)}(r, z) \cdot \cos m\theta \dots\dots\dots (17) \end{cases}$$

一方、構造物表面上の法線方向微分  $\partial/\partial n$  は、一般に単位法線ベクトルの  $r, \theta, z$  成分、 $n_r, n_\theta, n_z$  を用いて表わすことができるが、軸対称構造物の場合、表面上で常に  $n_\theta=0$  なので、

$$\partial/\partial n = n_r \cdot \partial/\partial r + n_z \cdot \partial/\partial z \text{ (on } S_H) \dots\dots\dots (18)$$

となる。

したがって、構造物表面の不透過条件 (6) は、各フーリエ成分に関して次のようになる。

$$\begin{aligned} n_r \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial r} + n_z \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial z} \\ = - \left( n_r \frac{\partial \varphi_{in}^{(m)}}{\partial r} + n_z \frac{\partial \varphi_{in}^{(m)}}{\partial z} \right) \\ (m=0, 1, \dots; \text{ on } S_H) \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

式 (13), (16) をそれぞれ  $r, z$  で偏微分してこれに代入し、未定係数  $A_n^{(m)}(n=0, 1, \dots)$  について整理すると、  
 $-i\{n_r \cdot \cosh k_0(h+z) \cdot H_m^{(2)}(k_0 r)$   
 $-n_z \cdot k_0 \cdot \sinh k_0(h+z) H_m^{(2)}(k_0 r)\} \cdot A_0^{(m)}$

$$\begin{aligned} + \sum_{n=1}^{\infty} [(\cosh k_0 h / \cos k_n h) \cdot \{n_r \cdot \cos k_n(h+z) \\ \cdot K_m'(k_n r) - n_z \cdot k_n \cdot \sin k_n(h+z) \cdot K_m(k_n r)\} \\ \cdot A_n^{(m)}] = -\epsilon_m \cdot i^m \cdot \{n_r \cdot \cosh k_0(h+z) \\ \cdot J_m'(k_0 r) + n_z \cdot k_0 \cdot \sinh k_0(h+z) \cdot J_m(k_0 r)\} \\ (m=0, 1, \dots; \text{ on } S_H) \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $K_m'(k_n r), H_m^{(2)}(k_0 r), J_m'(k_0 r)$  などは、それぞれ  $r$  に関する微分を表わす。

式 (20) は、構造物表面の不透過条件 (6) をフーリエ余弦展開したとき、各フーリエ次数ごとに満たすべき関係式で、構造物上における任意の  $r, z$  について成り立つ必要がある。

ところで、軸対称構造物においては、構造物表面で  $n_r, n_z, r$  等は  $\theta$  に無関係であり、 $z$  のみによって決まる (図-2 参照)。すなわち、 $n_r, n_z, r$  等はすべて  $-h \leq z \leq 0$  なる  $z$  の関数と考えることができ、これを、

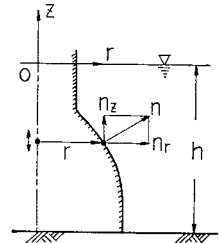


図-2 構造物表面における  $n_r, n_z, r$

$$\begin{cases} n_r = n_r(z) \\ n_z = n_z(z) \quad (-h \leq z \leq 0) \dots\dots\dots (21) \\ r = R(z) \end{cases}$$

と表わす。

したがって、式 (20) の両辺は見掛け上  $r$  と  $z$  の関数であるが、実際はともに  $z$  のみの関数であって、境界条件 (6) が、構造物上の任意の点で成り立つということと、式 (20) が  $m=0, 1, \dots$  に対して、 $-h \leq z \leq 0$  なる任意の  $z$  について成り立つということは同値である。ここで、

$$\begin{aligned} F_n^{(m)}(z) = & \begin{cases} -i\{n_r(z) \cdot \cosh k_0(h+z) \\ \cdot H_m^{(2)}(k_0 R(z)) + n_z(z) \cdot k_0 \cdot \sinh k_0(h+z) \\ \cdot H_m^{(2)}(k_0 R(z))\} \quad (n=0) \\ (\cosh k_0 h / \cos k_n h) \{n_r(z) \cdot \cos k_n(h+z) \\ \cdot K_m'(k_n R(z)) - n_z(z) \cdot k_n \cdot \sin k_n(h+z) \\ \cdot K_m(k_n R(z))\} \quad (n=1, 2, \dots) \end{cases} \\ & \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^{(m)}(z) = & -\epsilon_m i^m \{n_r(z) \\ & \cdot \cosh k_0(h+z) \cdot J_m'(k_0 R(z)) \\ & + n_z(z) \cdot k_0 \cdot \sinh k_0(h+z) \\ & \cdot J_m(k_0 R(z))\} \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

とおくと、式 (20) は次のように表わされる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(m)} \cdot F_n^{(m)}(z) = G^{(m)}(z) \quad (m=0, 1, \dots) \dots\dots\dots (24)$$

この両辺は、すでに述べたとおり  $-h \leq z \leq 0$  で定

義された  $z$  の関数である。任意の関数が固有関数で展開できる<sup>21)</sup>ことから、これらは、それぞれ、次のように表わすことができる。

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(m)} \cdot F_n^{(m)}(z) = b_0^{(m)} \cdot \cosh k_0(h+z) \\ \quad + \sum_{l=1}^{\infty} b_l^{(m)} \cdot \cos k_l(h+z) \dots\dots\dots(25) \\ G^{(m)}(z) = c_0^{(m)} \cdot \cosh k_0(h+z) \\ \quad + \sum_{l=1}^{\infty} c_l^{(m)} \cdot \cos k_l(h+z) \dots\dots\dots(26) \end{cases}$$

ただし、 $b_l^{(m)}$ 、 $c_l^{(m)}$  ( $l, m=0, 1, \dots$ ) は、フーリエ式係数で以下のようである。

$$b_l^{(m)} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(m)} \cdot \int_{-h}^0 F_n^{(m)}(z) \cdot \cosh k_0(h+z) dz \\ \quad \cdot \int_{-h}^0 \cosh^2 k_0(h+z) dz \quad (l=0) \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(m)} \cdot \int_{-h}^0 F_n^{(m)}(z) \cdot \cos k_l(h+z) dz \\ \quad \cdot \int_{-h}^0 \cos^2 k_l(h+z) dz \quad (l=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (m=0, 1, \dots) \dots\dots\dots(27)$$

$$c_l^{(m)} = \begin{cases} \int_{-h}^0 G^{(m)}(z) \cdot \cosh k_0(h+z) dz \\ \quad \cdot \int_{-h}^0 \cosh^2 k_0(h+z) dz \quad (l=0) \\ \int_{-h}^0 G^{(m)}(z) \cdot \cos k_l(h+z) dz \\ \quad \cdot \int_{-h}^0 \cos^2 k_l(h+z) dz \quad (l=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (m=0, 1, \dots) \dots\dots\dots(28)$$

式 (20) あるいは式 (24) が、 $-h \leq z \leq 0$  なる任意の  $z$  について成り立つためには、固有関数展開した各次数の係数が等しくなければならない。

したがって、式 (27)、(28) より次式を得る。

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(m)} \cdot \int_{-h}^0 F_n^{(m)}(z) \cdot \cosh k_0(h+z) dz \\ \quad = \int_{-h}^0 G^{(m)}(z) \cdot \cosh k_0(h+z) dz \dots\dots\dots(29) \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(m)} \cdot \int_{-h}^0 F_n^{(m)}(z) \cdot \cos k_l(h+z) dz \\ \quad = \int_{-h}^0 G^{(m)}(z) \cdot \cos k_l(h+z) dz \\ \quad \quad \quad (l=1, 2, \dots) \dots\dots\dots(30) \end{cases}$$

式 (29)、(30) を行列表示すると、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(m)} & a_{12}^{(m)} & \dots & a_{1l}^{(m)} & \dots \\ a_{21}^{(m)} & a_{22}^{(m)} & \dots & a_{2l}^{(m)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_{l1}^{(m)} & a_{l2}^{(m)} & \dots & a_{ll}^{(m)} & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0^{(m)} \\ A_1^{(m)} \\ \vdots \\ A_{l-1}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(m)} \\ \alpha_2^{(m)} \\ \vdots \\ \alpha_l^{(m)} \end{pmatrix} \quad (m=0, 1, \dots) \dots\dots\dots(31)$$

ただし、行列の要素  $a_{ls}^{(m)}$ 、および、ベクトルの要素  $\alpha_l^{(m)}$  は次式で表わされる。

$$a_{ls}^{(m)} = \begin{cases} \int_{-h}^0 F_{s-1}^{(m)}(z) \cdot \cosh k_0(h+z) dz & (l=1, s \geq 1) \\ \int_{-h}^0 F_{s-1}^{(m)}(z) \cdot \cos k_{l-1}(h+z) dz & (l \geq 2, s \geq 1) \end{cases} \quad (m=0, 1, \dots) \dots\dots\dots(32)$$

$$\alpha_l^{(m)} = \begin{cases} \int_{-h}^0 G^{(m)}(z) \cdot \cosh k_0(h+z) dz & (l=1) \\ \int_{-h}^0 G^{(m)}(z) \cdot \cos k_{l-1}(h+z) dz & (l \geq 2) \end{cases} \quad (m=0, 1, \dots) \dots\dots\dots(33)$$

式 (31) は、未定係数  $A_n^{(m)}$  ( $n=0, 1, \dots$ ) が満たすべき無限次元複素係数連立 1 次方程式である。一般解 (14) における固有関数列は、収束級数をなすので、フーリエ項の各次数ごとに、式 (31) を適当な  $n$  について解けば、未定係数が定まる。

そして、以上の展開の過程から明らかのように、得られた  $A_n^{(m)}$  を用いた式 (14) は、基礎方程式と、構造物表面の不透過条件 (6) を含む、すべての境界条件を満足する解である。

流体運動を支配する場全体の速度ポテンシャルは、式 (1) に、式 (14)、(16)、(17) など代入することによって得られ、次式となる。

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, z, t) = & \frac{gH_0}{2\omega} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \{ \epsilon_m^{im} J_m(k_0 r) \right. \\ & \left. - i A_0^{(m)} \cdot H_m^{(2)}(k_0 r) \} \cdot \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \cdot \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} \cdot K_m(k_n r) \right] \\ & \cdot e^{i\omega t} \cdot \cos m\theta \dots\dots\dots(34) \end{aligned}$$

### (3) 波圧、波力および波高

波圧  $p$  は、ベルヌーイの定理において、2 次の微小項を無視し、変動成分のみを取り出すと、式 (34) の速度ポテンシャルを用いて、

$$p = -i\rho\omega\phi(r, \theta, z, t) \dots\dots\dots(35)$$

と表わすことができる。ここに、 $\rho$ ：流体密度である。

水深  $z$  における、構造物の単位長さ当たりに働く流体力を  $f$  とすると、軸対称構造物であるから、この  $y$  成分は明らかに 0 である。他の成分については次式によって求められる。

$$f_x = - \int_{-\pi}^{\pi} p \cdot n_r \cdot \cos \theta \cdot r d\theta \dots\dots\dots(36)$$

$$f_z = - \int_{-\pi}^{\pi} p \cdot n_z \cdot r d\theta \dots\dots\dots(37)$$

このうち、 $f_x$  については、式 (34)、(35) を式 (36) に代入して、 $\theta$  に関する積分を実行すると、余弦関数の直交性から、 $m$  に関する級数項は  $m=1$  の場合を除いてすべて 0 となり、結局、

$$f_x = -\frac{\rho g \pi H_0}{2} n_r \cdot r \cdot e^{i\omega t} \cdot \left[ \{2 J_1(k_0 r) - A_0^{(1)} \cdot H_1^{(2)}(k_0 r)\} \cdot \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \cdot K_1(k_n r) \cdot \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} \right] \dots \dots \dots (38)$$

となる。全波力  $F_x$  はこれを海底から水面まで積分することによって得られる。

次に、構造物下端まわりのモーメントを  $M$  とすると構造物の対称性から、 $x, z$  成分は 0 である。 $y$  成分は次式によって求められる。

$$M_y = -\frac{\rho g \pi H_0}{2} e^{i\omega t} \int_{-h}^0 \left[ \{2 J_1(k_0 r) - A_0^{(1)} \cdot H_1^{(2)}(k_0 r)\} \cdot \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \cdot K_1(k_n r) \cdot \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} \right] \cdot r [n_z \cdot r - n_r \cdot (z+h)] dz \dots \dots \dots (39)$$

これらからわかるように、水平波力あるいは転倒モーメントを求める際には、フーリエ項の第 2 項に対応する  $m=1$  の場合についてのみ、未定係数を定めればよいので計算は著しく簡単となる。なお、ここで示した波力はポテンシャル圧力による、いわゆる慣性力のみであるので、 $D/L$  が小さいときには、これ以外に抗力の影響を考慮する必要がある。

構造物によって散乱された後の波高を  $H$  とするとき、 $H$  と入射波高  $H_0$  との比  $K_d (=H/H_0)$  は、

$$K_d = \left| \sum_{m=0}^{\infty} \{\epsilon_m i^m J_m(k_0 r) - i A_0^{(m)} \cdot H_m^{(2)}(k_0 r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \cdot K_m(k_n r)\} \cdot \cos m\theta \right| \dots \dots (40)$$

によって求められる。

(4) 円筒の場合 — MacCamy・Fuchs の理論解との関連

円筒構造物による波の回折・散乱を理論的に取り扱ったものに MacCamy と Fuchs による研究があり<sup>22)</sup>、その解は円筒の半径を  $r_0$  として次のように表わされる。

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \frac{g H_0}{2 \omega} \cdot \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \epsilon_m i^m \left\{ J_m(k_0 r) - \frac{J_m'(k_0 r_0)}{H_m^{(2)}(k_0 r_0)} \cdot H_m^{(2)}(k_0 r) \right\} \cdot e^{i\omega t} \cdot \cos m\theta \right] \dots \dots \dots (41)$$

一方、本理論で対象としているのは、軸対称構造物であり、円筒はこの一例である。ここでは本理論を円筒構造物に適用し、上記の MacCamy・Fuchs の解が数学的に導かれることを示す。そして、これにより、本理論が

MacCamy・Fuchs の理論を特別な場合として含む、拡張された理論となっていることを明らかにする。

半径  $r_0$  の円筒構造物を考えると、式 (21) に示した  $n_r, n_z, r$  は、構造物表面で次のようになる。

$$\begin{cases} n_r(z) = 1 \\ n_z(z) = 0 & (-h \leq z \leq 0) \dots \dots \dots (42) \\ R(z) = r_0 \end{cases}$$

したがって、式 (22), (23) に示した  $F_n^{(m)}(z), G^{(m)}(z)$  は、円筒に対して次式となる。

$$F_n^{(m)}(z) = \begin{cases} -i \cosh k_0(h+z) \cdot H_m'^{(2)}(k_0 r_0) & (n=0) \\ \frac{\cosh k_0 h}{\cos k_n h} \cdot \cos k_n(h+z) \cdot K_m'(k_n r_0) & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \dots \dots \dots (43)$$

$$G^{(m)}(z) = -\epsilon_m i^m \cosh k_0(h+z) \cdot J_m'(k_0 r_0) \dots \dots \dots (44)$$

これらを連立方程式 (31) の係数行列の要素、および、ベクトルの要素の計算式 (32), (33) に代入し、積分に関係のない定数を積分の外に出すと、次式が得られる。

$$a_{ls}^{(m)} = \begin{cases} -i H_m'^{(2)}(k_0 r_0) \int_{-h}^0 \cosh^2 k_0(h+z) dz & (l=s=1) \\ K_m'(k_{s-1} r_0) \frac{\cosh k_0 h}{\cos k_{s-1} h} \int_{-h}^0 \cos k_{s-1}(h+z) \cdot \cosh k_0(h+z) dz & (l=1, s \geq 2) \\ -i H_m'^{(2)}(k_0 r_0) \int_{-h}^0 \cosh k_0(h+z) \cdot \cos k_{l-1}(h+z) dz & (l \geq 2, s=1) \\ K_m'(k_{s-1} r_0) \frac{\cosh k_0 h}{\cos k_{s-1} h} \int_{-h}^0 \cos k_{l-1}(h+z) \cdot \cos k_{s-1}(h+z) dz & (l, s \geq 2) \end{cases} \dots \dots \dots (45)$$

$$\alpha_l^{(m)} = \begin{cases} -\epsilon_m i^m J_m'(k_0 r_0) \int_{-h}^0 \cosh^2 k_0(h+z) dz & (l=1) \\ -\epsilon_m i^m J_m'(k_0 r_0) \int_{-h}^0 \cosh k_0(h+z) \cdot \cos k_{l-1}(h+z) dz & (l \geq 2) \end{cases} \dots \dots \dots (46)$$

さらに積分を実行すると、固有関数の直交性から、

$$a_{ls}^{(m)} = \begin{cases} -\frac{i}{4 k_0} (\sinh 2 k_0 h + 2 k_0 h) \cdot H_m'^{(2)}(k_0 r_0) & (l=s=1) \\ \frac{\cosh k_0 h}{4 k_{l-1} \cos k_{l-1} h} \cdot (\sin 2 k_{l-1} h + 2 k_{l-1} h) \cdot K_m'(k_{l-1} r_0) & (l=s=2, 3, \dots) \\ 0 & (l \neq s) \end{cases} \dots \dots \dots (47)$$

$$\alpha_l^{(m)} =$$

$$\begin{cases} -\frac{\epsilon_m i^m}{4k_0} (\sinh 2k_0 h + 2k_0 h) J_m'(k_0 r_0) & (l=1) \\ 0 & (l=2, 3, \dots) \end{cases} \quad (m=0, 1, \dots) \dots\dots(48)$$

となる。

したがって、未定係数  $A_n^{(m)}$  ( $n, m=0, 1, \dots$ ) に関する連立方程式 (31) は、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(m)} & & & \\ & a_{22}^{(m)} & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & \dots & a_{ll}^{(m)} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0^{(m)} \\ A_1^{(m)} \\ \vdots \\ A_{l-1}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(m)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (m=0, 1, \dots) \dots\dots(49)$$

これは簡単に解けて、次のような解を得る。

$$A_n^{(m)} = \begin{cases} -i\epsilon_m i^m \frac{J_m'(k_0 r_0)}{H_m^{(2)}(k_0 r_0)} & (n=0) \\ 0 & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (m=0, 1, \dots) \dots\dots(50)$$

これを、速度ポテンシャルの表示式 (34) に代入して整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, z, t) = & \frac{gH_0}{2\omega} \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} \\ & \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \epsilon_m i^m \left\{ J_m(k_0 r) - \frac{J_m'(k_0 r_0)}{H_m^{(2)}(k_0 r_0)} \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot H_m^{(2)}(k_0 r) \right\} e^{i\omega t} \cdot \cos m\theta \right] \dots\dots(51) \end{aligned}$$

これは先に示した MacCamy・Fuchs の解 (41) にほかならない。したがって、本理論が MacCamy・Fuchs の理論を包含した、より一般的な回折理論となっていることが示された。

### 3. 数値計算例と考察

#### (1) 不連続点の処理および級数の収束

本理論の特徴は、構造物表面上の法線ベクトルの成分  $n_r, n_z$ , および、構造物の中心軸から表面までの距離  $r$  を、 $z$  の関数としてとらえ、構造物表面における境界条件を  $z$  に関する固有関数で展開したところにある。 $n_r, n_z, r$  などは、構造物形状に対応して決まり、たとえば 図-3(a) に示すような境界が滑らかな構造物では、 $z$  の連続関数となる。しかし、図-3(b) に示すような構造物の場合は不連続な関数となり、展開項数を増やしても精度が上がらず、逆に不連続点で級数値が飛び出す Gibbs 現象<sup>23)</sup> が現われるおそれがある。これを避けるために、実際の計算では 図-4 に破線で示したように、不連続点を適当な勾配の直線で結んだ関数形を用いることにし、後に示す貯油タンク型構造物の計算の場合、図中の  $\Delta$  を 0.002 とした。これは構造物の角をわずかに丸めたことに

相当する。不連続点を有するその他の構造物形状に対しては元の形状を損なわない程度の範囲で  $\Delta$  を変化させ、波力値の収束をみて  $\Delta$  の値を決定すればよいであろう。

表-1 は、円すい台構造物について、構造物の代表径  $D$  と入射波長  $L$  との比  $D/L$  を変えて、各  $D/L$  に対する

$$\epsilon = \left| \frac{\varphi^{(M)} \cdot \cos M\theta}{\sum_{m=0}^M \varphi^{(m)} \cdot \cos m\theta} \right| \dots\dots(52)$$

すなわち、式 (14) におけるフーリエ級数の第  $M$  項の相対寄与率を示したものである。

この表より、相対寄与率  $\epsilon$  は、 $M$  の増加に伴って桁が 1 オーダーずつ小さくなっているのがわかる。

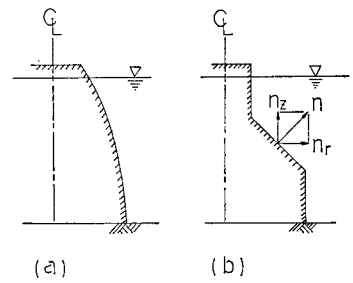


図-3 説明図

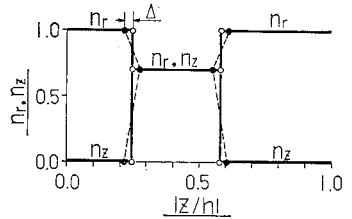


図-4  $n_r, n_z$  のグラフの例

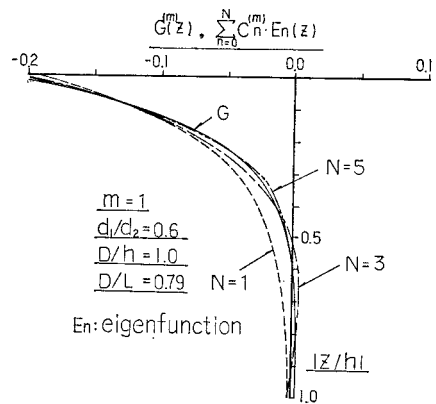


図-5 固有関数の展開項数と収束の例

表-1 フーリエ展開における第  $M$  項の相対寄与率の例

$M \setminus D/L$	1.070	0.790	0.602	0.390	0.222	$D/h=1.0$ $d_1/d_2=0.5$ 
1	$3.7 \times 10^0$	$1.2 \times 10^0$	$2.2 \times 10^0$	$1.6 \times 10^0$	$5.3 \times 10^0$	
2	$1.5 \times 10^{-1}$	$9.5 \times 10^{-2}$	$1.5 \times 10^{-1}$	$2.7 \times 10^{-1}$	$7.9 \times 10^{-1}$	
3	$2.6 \times 10^{-2}$	$2.2 \times 10^{-2}$	$6.7 \times 10^{-2}$	$7.6 \times 10^{-2}$	$2.2 \times 10^{-1}$	
4	$2.6 \times 10^{-3}$	$3.1 \times 10^{-3}$	$3.7 \times 10^{-3}$	$3.0 \times 10^{-3}$	$7.2 \times 10^{-2}$	
5	$5.5 \times 10^{-4}$	$4.8 \times 10^{-4}$	$8.8 \times 10^{-4}$	$1.6 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-3}$	
6	$9.1 \times 10^{-5}$	$1.0 \times 10^{-4}$	$7.0 \times 10^{-4}$	$3.2 \times 10^{-3}$	$2.5 \times 10^{-4}$	
7	$1.3 \times 10^{-5}$	$1.6 \times 10^{-5}$	$1.1 \times 10^{-3}$	$1.8 \times 10^{-4}$	$8.1 \times 10^{-6}$	
8	$1.9 \times 10^{-6}$	$2.2 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-4}$	$1.8 \times 10^{-5}$	$4.6 \times 10^{-7}$	
9	$3.4 \times 10^{-7}$	$3.5 \times 10^{-7}$	$9.0 \times 10^{-6}$	$1.1 \times 10^{-6}$	$1.6 \times 10^{-8}$	
10	$4.7 \times 10^{-8}$	$4.2 \times 10^{-8}$	$2.3 \times 10^{-7}$	$6.2 \times 10^{-8}$	$5.0 \times 10^{-10}$	

したがって、級数を第  $M$  項で打ち切ったために生じる誤差は、第  $M$  項の値のオーダー程度であり、10 項もとれば実用上十分な精度で収束すると考えられる。ただし、ここでは  $d_2$  を代表径  $D$  としている。

図-5 は、やはり円すい台構造物の場合について、式 (20) の右辺、すなわち式 (23) で表わされる  $G^{(m)}(z)$  と、これを固有関数で展開した場合の式 (26) を、展開項数を変えて比較した一例である。ただし、それぞれの実数部について示したもので、縦軸は無次元化水深、横軸は関数値である。

この図にみられるように、この例の場合、 $N=5$  程度で十分に元の関数を近似できることがわかる。この固有関数の展開項数については、貯油タンク型構造物などについても検討したが、先に述べた不連続点の処理を行うことによって、十数項をとれば十分であることがわかった。

これら以外の種々の形状、特に不連続点を多く有する複雑な形状に対しては、展開項数も多くとる必要があると考えられるので、それぞれ、展開項数と収束の関係を検討する必要がある。また、固有関数展開における第 2 項以下の影響は、構造物から離れるほど急速に小さくなるので、波高分布計算の場合には、構造物表面における  $G^m(z)$  を近似するのに必要な項数をとれば、構造物近傍も含めて十分な精度で計算することができる。

(2) 円すい台による回折と波力

軸対称構造物の例には、海中展望塔、水中タワー、人工島などが考えられるが、このような構造物の一般的形状は円すい台と考えることができよう。

このような円すい台構造物に働く波力の特性を示したのが図-6、7 である。これらは、全波力  $F_x$ 、および、

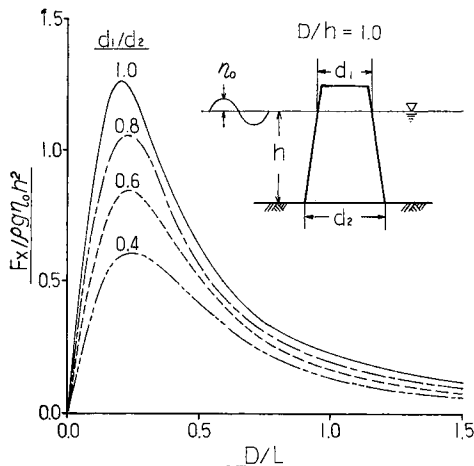


図-6 タワー構造物の全波力特性 ( $d_1/d_2$  による比較)

転倒モーメント  $M_y$  の無次元値と、構造物の代表径  $D$  と入射波長  $L$  の比  $D/L$  の関係を、上面と下面の径の比  $d_1/d_2$  をパラメーターとして示したものである。ここで、 $d_1/d_2=1.0$  は円筒の場合である。また、代表径として  $d_2$  をとっている。

これらの図にみられるように、円すい台構造物の波力特性は、全波力、転倒モーメントともに、円筒の場合に類似していることがわかる。そして、これらは  $d_1/d_2$  が小さくなるに従って、 $D/L$  のすべての値に対して小さくなっている。

図-8、9 は、円すい台構造物周辺の波高分布の一例を、 $d_1/d_2=0.5$ 、 $D/h=1.14$  の場合について、式 (40) より求められる入射波高比  $K_d (= H/H_0)$  で示したもの

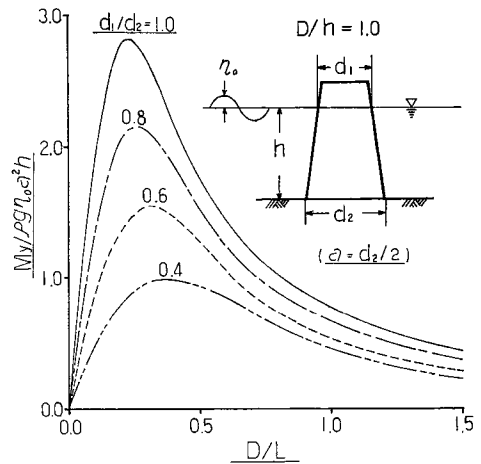


図-7 タワー構造物の転倒モーメント特性 ( $d_1/d_2$  による比較)

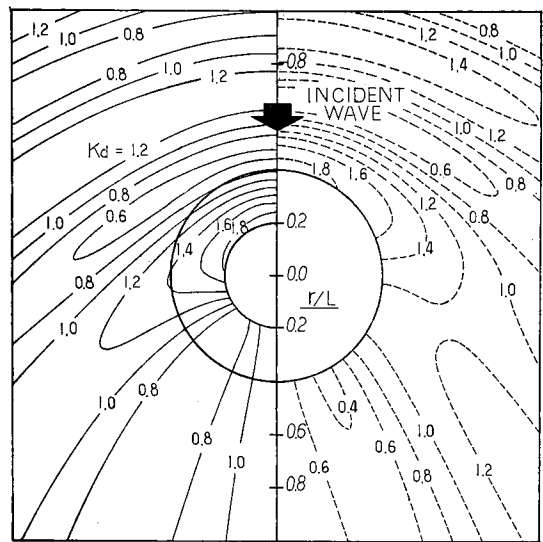


図-8 波高分布の例 ( $D/L=0.80$ 、 $D/h=1.14$ 、 $d_1/d_2=0.5$ )

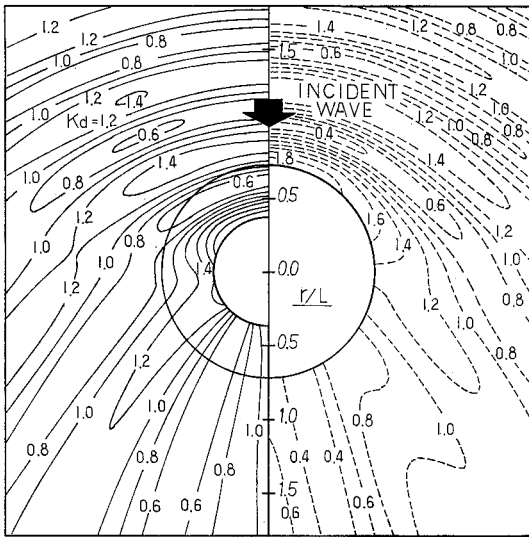


図-9 波高分布の例 ( $D/L=1.42$ ,  $D/h=1.14$ ,  $d_1/d_2=0.5$ )

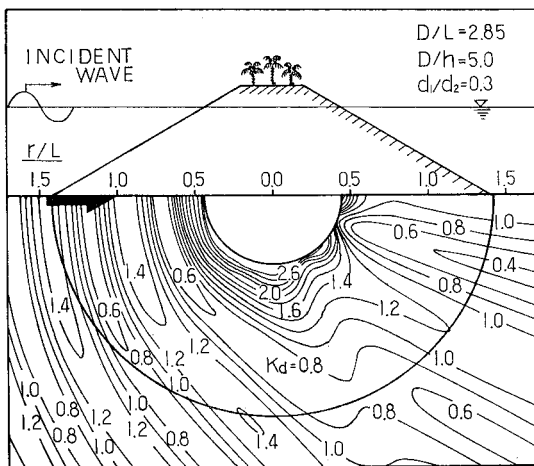


図-10 島周辺の波高分布例

であり、それぞれ、 $D/L=0.80$ ,  $1.42$  の場合である。また、それぞれの図中、右側に破線で示したのは、円すい台の底面と同じ直径を有する円筒構造物による回折図である。

それぞれの場合について構造物前面に部分重複波が形成されており、円すい台前面ののり面における重複波の節は、円筒の場合に比較して、わずかに短い位置に生じることがわかる。そしてこれは、 $D/L$  が大きい 図-9 の場合、より顕著である。すなわち、円すい台前面では、 $D/L$  が大きくなると、円筒などの直立構造物に比較して波形勾配が大きくなることわかる。

図-10 は、やはり円すい台周辺の波高分布の一例で、人工島、あるいは小さな火山島を想定したものである。この場合、 $D/L=2.85$ 、および、 $D/h=5.0$  である。

計算結果をみると、波高は島の近傍で入射波高の 2.6 倍となっており、しかも、島の側面から後面にかけても増大しているのがわかる。したがって、この場合、島の周辺全域で碎波が助長される。実際、ハワイのオアフ島の例にみるように、火山島の周辺で波高が増大し、碎波を起こすことはよく知られており、ここで示した計算例からも、このことが理解されよう。

これらの波力特性および波高分布から、円すい台のような構造物の場合、円筒構造物に比較して、全波力、転倒モーメントなどは小さいが、斜面の効果により、周辺で波形勾配が大きくなるため、碎波が生じる可能性が大となるといえる。

### (3) 貯油タンク型構造物の波力

図-11 は軸対称型貯油タンクの例である。ここでは、この波力特性について、図中に示したタンク天端の没水深比  $q$  を固定して、タワー部とタンク部の径の比  $d_1/d_2$  を変えた場合、および、 $d_1/d_2$  を固定して  $q$  を変えた場合について検討する。

図-12, 13 は、 $q$  を 0.5 に固定して、 $d_1/d_2=1, 1/2, 1/3, 1/6$  の場合について、全波力  $F_x$  および転倒モーメント  $M_y$  を  $D/L$  との関係でとらえたものである。た

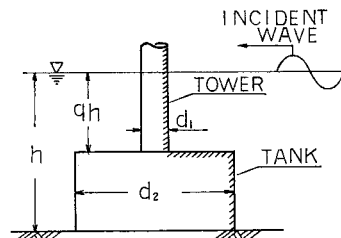


図-11 軸対称貯油タンクの例

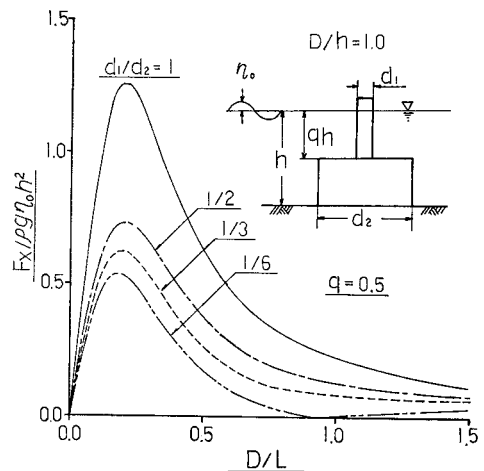
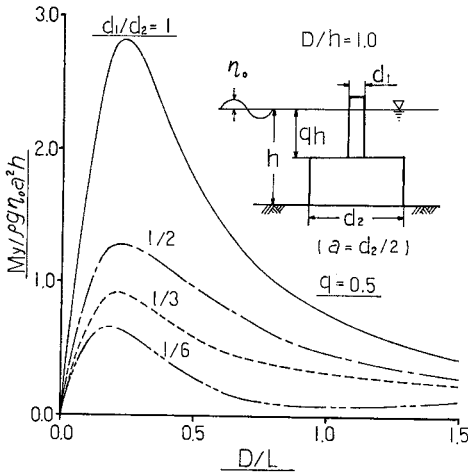
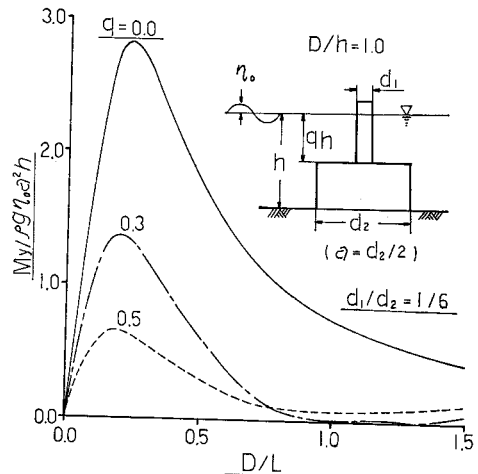


図-12 貯油タンク型構造物の全波力特性 ( $d_1/d_2$  による比較)





図一13 貯油タンク型構造物の転倒モーメント特性 ( $d_1/d_2$  による比較)

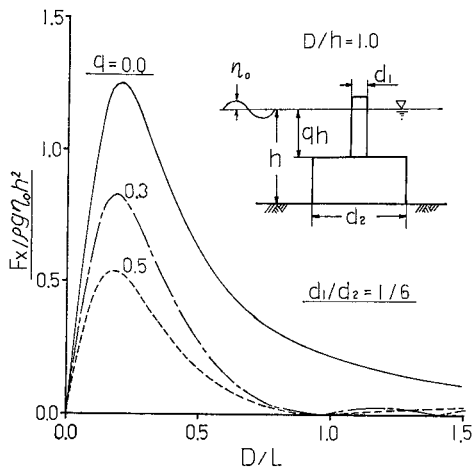


図一15 貯油タンク型構造物の転倒モーメント特性 ( $q$  による比較)

だし、 $D$  はタンクの代表径で  $L$  は入射波長である。ここでは  $D=d_2$  としている。

これらの図から、全波力、転倒モーメントともに、 $d_1/d_2=1/6$  の場合を除いて、 $D/L$  の増加に伴って急激に大きくなり、 $D/L=0.2$  付近でピークに達した後に一様に減少するのがわかる。しかし、 $d_1/d_2=1/6$  の場合は、 $D/L=0.95$  付近に極小値があり、この後、わずかではあるが、また上昇している。これは、タワー部とタンク部の径の比が小さくなると、両者に作用する波力の位相差が拡大され、その結果、タワー部とタンク部で波力の作用する方向が逆向きとなり、これらの波力が互いに打ち消し合うためである。

図一14、15 は、 $d_1/d_2$  を  $1/6$  に固定し、 $q=0.0, 0.3, 0.5$  の場合について、波力特性を示したもので、図中で用いた記号の意味は前例と同じである。



図一14 貯油タンク型構造物の全波力特性 ( $q$  による比較)

図一14 に示した全波力特性をみると、波力が 0 となる節が、 $q=0.3$  の場合には  $D/L=1.0, 1.4$  付近の 2 か所であり、 $q=0.5$  の場合には、 $D/L=0.95$  付近の 1 か所のみであるのがわかる。波力が 0 となるのは、上にも述べたとおり、タワー部とタンク部に作用する波力に位相差が生じ、これらが互いに相殺するためで、このようにタワー部とタンク部で波力の位相が逆になることは  $D/L$  の増加に伴っていくらでもあり得る。しかし、 $D/L$  が大きく、したがって、波長が構造物に比較して短くなると、 $h/L$  も大きくなり、波は深海波となるため、波による水粒子運動は平均水面に近い浅い部分のみとなって深部では波力が働かなくなる。このためここで示した貯油タンクの例では、ある波長以下になると、タンク部の波力は小さくなり、仮に逆位相としても、タワー部の波力と相殺することができなくなる。そして、これは  $d_1/d_2$  が同じ場合にはタンク部が深部にあるほどいえることであり、ここで示した計算例で、波力が 0 となる節が、 $q=0.3$  の場合 2 点であるのに対し、 $q=0.5$  の場合には 1 点であるのはこのためである。

また、 $q=0$  で示される円筒の場合、全波力、転倒モーメントともに、ピークに達した後、緩やかに減少しているのに対し、 $q=0.3, 0.5$  の場合は、 $D/L=0.5$  付近から急激に減少しているのがわかる。これは波長が短くなり、したがって  $h/L$  が大きくなると、深部に比べ、水面付近の波力の影響が顕著になって、その部分の径が全体波力に大きく影響するためである。したがって、波力の面だけからみると、円筒のように一様断面のタンクよりも、水深の深い部分に径の大きなタンク部を有し、水面付近ではタワー部のみであるような形状が有利であるといえよう。

#### 4. 結 語

以上、著者らは本論文において、任意形状軸対称構造物による微小振幅波の散乱と波力を、固有関数展開およびフーリエ展開によって厳密に取り扱い、これらの厳密解を得る方法を示した。そして、本理論を円筒構造物に適用することによって、本理論が、円筒による回折・散乱を扱った MacCamy・Fuchs の理論を包含した、より一般的な理論であることを数学的に厳密に示した。また、一般的な軸対称構造物に本理論を適用した例として、円すい台 (conical island) による波の回折と波力、および貯油タンク型構造物の波力などについて、計算結果を示し、若干の考察を行った。これによって、円すい台形をした火山島・人工島などに波が進入すると、波長が短くなり波高は増大するなどのいくつかの興味深い結果を示すことができた。

なお、本論文で示した解析法は、構造物表面における境界条件を固有関数で展開するところに特徴があり、境界上で展開するところから“境界展開法”といえることができよう。この“境界展開法”は、他の境界値問題にも応用できると考えられ、現在、種々の適用例について検討中である。

おわりに、本論文中の数値計算とそのとりまとめについて、清水建設(株)研究所、大山 巧研究員の協力を得たことを記して、謝意を表する次第である。

#### 参 考 文 献

- 1) Morison, J.R., M.P. O'Brien, J.W. Johnson and S.A. Schaaf : The force exerted by surface waves on piles, Petroleum Transactions, A.I.M.E., Vol. 189, 1950.
- 2) Garrison, C.J. : Hydrodynamic loading of large offshore structures; Three-dimensional source distribution methods, Numerical Methods in Offshore Engineering, John Wiley & Sons, pp. 91~92, 1978.
- 3) MacCamy, R.C. and R.A. Fuchs : Wave forces on Piles; a diffraction theory, Tech. Memo., No. 69, Beach Erosion Board, pp. 1~17, 1954.
- 4) 合田良美・吉村知司：島堤および大型楕円柱体による波の散乱と波力について，土木学会論文報告集，No. 205，1972.
- 5) Garrison, C.J. and Y.C. Philip : Wave forces on submerged bodies, Jour. of the waterways, Harbors and Coastal Eng. Div., Aug., 1972.
- 6) 日野幹雄・藤崎治男：固定された海上構造物による波の反射と透過—Green 関数による理論解，第 20 回海岸工学講演会論文集，pp. 101~106，1973.
- 7) 日野幹雄・宮永洋一：グリーン関数および仮想法による波力と波の回折計算，土木学会論文報告集，No. 237，pp. 51~62，1975.
- 8) 井島武士・周 宗仁・湯村やす：任意形状の透過および不透防波堤による波の散乱と流体力，土木学会論文報告集，No. 225，1974.
- 9) 小林 浩・清川哲志：グリーン関数を用いた任意形状構造物に作用する波圧解析，第 32 回土木学会年次講演会，1977.
- 10) 坂井藤一・河合三四郎：波動解析への有限要素法の適用，第 20 回海岸工学講演会論文集，pp. 393~396，1973.
- 11) 瀬戸秀幸・山本善之：有限要素法による定常波動の基礎的研究，日本造船学会論文集，No. 136，1974.
- 12) 山本善之・中野孝昭・光田哲久：有限要素法による定常波動問題の基礎的研究，日本造船学会論文集，No. 140，1976.
- 13) 倉田克彦・井島武士：波動問題への有限要素法の適用，第 26 回海岸工学講演会論文集，pp. 95~99，1979.
- 14) 瀬戸秀幸：有限要素法による定常波動問題の基礎的研究 (第 3 報)，日本造船学会論文集，No. 141，1977.
- 15) 瀬戸秀幸：有限要素法による定常波動問題の基礎的研究 (第 4 報)，日本造船学会論文集，No. 144，1978.
- 16) 瀬戸秀幸：New Hybrid Element Method による海洋構造物に働く波力解析，第 2 回流れの有限要素解析 シンポジウム報文集，pp. 59~66，1980.
- 17) Black, J.L. : Wave forces on vertical axisymmetric bodies, J.F.M., Vol. 67, Part 2, pp. 369~376, 1975.
- 18) Fenton, J.D. : Wave forces on vertical bodies of revolution, J.F.M., Vol. 85, Part 2, pp. 241~255, 1978.
- 19) 松井徹哉：軸対称構造物に作用する波力 および 散乱波の解析，建築学会学術講演会梗概集，1978.
- 20) 寺沢寛一編：自然科学者のための数学概論 (応用編)，岩波書店，pp. 528~530.
- 21) 井島武士：最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用，1971 年度水工学に関する夏期研修会講義集，B-1-3，1971.
- 22) 前掲 3)
- 23) 日野幹雄：スペクトル解析，朝倉書店，pp. 10~13，1977.

(1981.7.25・受付)