

黒木幹男 共著 “開水路に発生する縦渦の構造の研究” への討議

(土木学会論文報告集 第 312 号・1981 年 8 月掲載)

▶ 討議者 (Discussion)

瀬 津 家 久 (京都大学)

By Iehisa Nezu

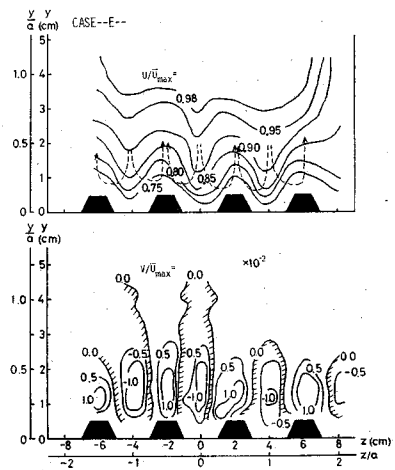
直線状開水路に発生する縦渦は実際河川で古くから観察され、流れの三次元流況や浮遊砂等の三次元輸送などを予測可能にする水工学上重要な研究課題であり、また最近では開水路流れにおける組織立った乱流の一事例として注目されているが、その内部構造は現在でも不明な点が多く、正に古くして新しい問題といえる。このような折に、本論文は、新たな考えに基づいて縦渦の内部構造に関する理論的・実験的研究を意欲的に行ったものであり、高く評価される。この分野の今後の研究を図るうえで、以下の二、三の疑問点に関して著者らのご見解を伺いたく、かつ最近筆者らが行った縦渦に関する実験結果を比較のため併示したい。

(1) 本論文の中心的な考え方は、平均流場が基本流と二次流に分離できるとし、式 (3) のように摂動法的な ϵ を導入して線形化を試みた点だが、この有効性および ϵ の意味は何か。特に、式 (4) で示すようなレイノルズ応力 $-\rho u_i' u_j'$ が基本流成分 \bar{T}_{ij} と二次流成分 $\bar{\tau}_{ij}$ に分離できるとした場合、乱れ変動成分 u_i' と二次流成分 \bar{u}_i との関連はどのように考えたらよいか。Mollo-Christensen¹²⁾ は瞬間流速を [平均流速] + [周期的な組織変動] + [微細乱れ] に区分し、各成分間の相互作用すなわち乱れエネルギーの発生・輸送が乱流構造を解くうえで重要な鍵と指摘したが、いま縦渦を [組織変動] とすれば、縦渦と通常の微細乱れとの相互作用が重要であると考えられる。著者らの実験結果を拝見すると、Table 2 および Fig. 6 から縦渦の速度は $\bar{V} \approx \bar{W} \approx 0.2 U_B \bar{U}_* \approx 0.2 \bar{U}_*$ 、一方、乱れ強度は Fig. 11 から $\sqrt{\bar{v}^2} \approx \sqrt{\bar{w}^2} \approx 0.5 \bar{U}_*$ となり、乱れの方がかえって縦渦より大きく、前者をなんらかの形で考慮する必要があると思われる。このためか、2. (2) の基礎方程式の検討で、式 (13-2) と (19) とを同一視した点に混乱が現われている。すなわち、式 (19) の渦度発生項である $(\bar{u}_2'^2 - \bar{u}_3'^2)$ が縦渦に起因するという著者らの見解は疑問であり、このレイノルズ応力が $\bar{u}_2'^2 \neq \bar{u}_3'^2$ となるのは河床が存在するためであって、縦渦の有無に関係なく成立する壁面乱流の基

本特性であることが知られている¹³⁾。

(2) 本論文のもう一つのキーポイントは式 (14) を適用して運動方程式 (17) と渦度方程式 (18) とを連立させた点にある。しかし、式 (14) は Perkins¹⁰⁾ や Townsend¹⁴⁾ が乱れ変動 u_i' に関して得た近似式であり、これを二次流成分まで拡張して用いても妥当であろうか。もしこれが妥当としても、式 (14) の根拠は $(\bar{u}_2'^2 - \bar{u}_3'^2) = U_*^2 f(z/H) \approx \alpha U_*^2 (1 - z/H)$ なる普遍関数で表示される点にあるが¹⁰⁾、筆者はこの点に疑問をもっている。Fig. 11 や後述する筆者らの実験¹⁵⁾ によれば、縦渦の上昇流部で乱れ強度は増加するが、摩擦速度 U_* は減少し、下降流部ではこの逆となることから、 $(\bar{u}_2'^2 - \bar{u}_3'^2)/U_*^2$ は同一の z/H でも上昇流部で大きく、下降流部で小さくなり、上述の普遍関数が適用できないと考えるからである。

(3) 壁面せん断応力やレイノルズ応力は縦渦の上昇流部、下降流部で増加するのかわりに減少するのかわりかこれまで定説はなかったように思う。著者らはこの点を明らかにするために、長方形断面ダクト (上底下底面の間隔 $2a$ は 8 cm である) を用いた風洞実験を行い、縦枝粗



図—12 平均流速 U および V の等流速線図

度を設置して縦渦を安定・固定化した¹⁵⁾。図-12は、主流方向および鉛直方向の平均流速 U および V の等流速線図であり、縦椋粗度の断面が黒くぬりつぶされている（以下の討議では、著者らの座標系と異なり、底面に鉛直方向を y 軸、横断方向を z 軸にとる）。図に破線で示したように縦渦の存在が認められ、この結果は著者らの Fig. 6 とよく一致する。いま、式 (1) を y に関して積分すると、

$$\begin{aligned}
 -\overline{u'v'} + \nu \frac{\partial U}{\partial y} &= U_*^2 (1 - y/H) \\
 + \underbrace{\left[\int_0^y V \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{y}{H} \int_0^H V \frac{\partial U}{\partial y} dy \right]}_{\textcircled{C}} \\
 - \underbrace{\left[\int_0^y \frac{\partial(-\overline{u'w'})}{\partial z} dy - \frac{y}{H} \int_0^H \frac{\partial(-\overline{u'w'})}{\partial z} dy \right]}_{\textcircled{T}} & \dots \dots \dots (49)
 \end{aligned}$$

$$U_*^2 \equiv \left(-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \right) H - \int_0^H \left(V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) dy \dots \dots \dots (50)$$

となる。式 (49) のすべての項を実測し、縦渦の下降流部 ($V < 0$) および上昇流部 ($V > 0$) でのレイノルズ応力 $-\overline{u'v'}$ を図示した結果がそれぞれ図-13 (a) および (b) である。実測のレイノルズ応力 $-\overline{u'v'}$ は壁面近傍では上昇流部と下降流部ではほぼ等しいが、壁面から離れると上昇流部では $U_*^2(1-y/H)$ の直線分布から増加するようにずれ、逆に下降流部では減少するようにずれる。このずれは、式 (49) の V による移流項 \textcircled{C} と横断方向のレイノルズ応力 $-\overline{u'w'}$ による項 \textcircled{T} の大小関係で決まり、図に示すように式 (49) の計算曲線は実測値とよく一致する。図中の一点鎖線で示されたこれらの付加項の和 $\textcircled{C} + \textcircled{T}$ は縦渦によって生じるから著者らの $\overline{\tau_{xz}}$ に相当し、Fig. 10 の T_0 の分布と比較できる。両者は y/H (Fig. 10 では Z のこと) が 0.2 以上の流れの主流部ではよく類似した分布形を示し、注目されるが、著者らの $|T_0|$ は壁面近傍で急増し、図-13 と異なった分布を示す。しかし、壁面せん断応力を壁法則 (Preston 管法と同じ) と式 (50) からそれぞれ別個に求めても両者はよく一致し、ともに下降流部の壁面せん断応力は増加し、一方上昇流部のそれは減少した。したがって、著者らの結論 (6) は壁面から十分離れた流れの主流部では妥当であるが、壁面近傍では上昇流部でせん断応力は減少するから著者らの理論はなんらかの修正が必要と考えられる。

(4) 本論文も含め、これまでの二次流に関する理論解析は x 方向の渦度方程式に基づいて展開されてきた。しかし、Gessner¹⁶⁾ は、 x 方向の渦度方程式は y 方向および z 方向の渦度方程式に比べて二次の微小項で構成さ

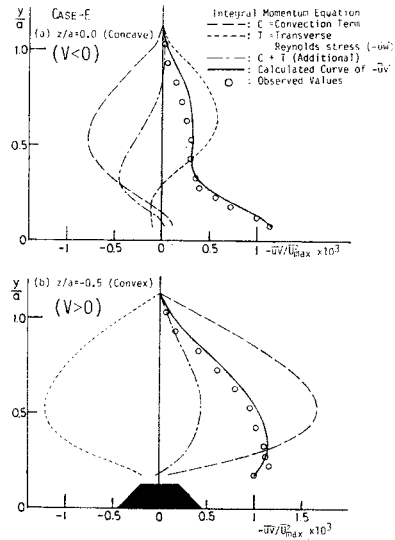


図-13 運動方程式によるレイノルズ応力 $-\overline{u'v'}$ の検討

れているから、本当にこれが二次流の内部構造を説明するのかと問いかけ、むしろ平均流エネルギーの収支式から説明されるべきだと指摘した。著者らは、主流方向の運動方程式 (13.1) を連立させることで、従来の理論の欠陥を改善したが、渦度の移流項を無視した

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \overline{v'w'} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\overline{v'^2} - \overline{w'^2}) \dots (51)$$

を使う以上、Gessner の疑問に答えられない¹⁷⁾。また、Rotta¹³⁾ が、式 (51) は二次流が存在しない条件であるとさえ指摘した点を考えると、二次流の内部構造の説明に式 (51) がどこまで有効なのか再検討する必要がある。確かに、 $\overline{v'w'}$ は渦動粘性を導入すると V, W と結びつくから式 (51) は二次流のモデル化に魅力ある簡単な式であるが、著者らは縦渦に関する詳細な計測を行って、Gessner の平均流エネルギー平衡説の有効性を実証し¹⁵⁾、このとき図-13 で一部示したように $-\overline{u'w'}$ が縦渦の発生・維持機構に重要な役割を演じることを明らかにした。この結果は、中村ら¹⁸⁾ によって乱流境界層流でも得られている。

以上のように、縦渦の内部構造には不明な点が多いが、上述の (4) はこの分野の発展を図るうえで避けて通れない重要な基本的な疑問点であるから是非著者らのご見解をご教示願いたい。

参考文献

- 12) Mollo-Christensen, E. : Physics of turbulent flow, AIAA Journal, Vol. 9, pp. 1217~1228, 1971.
- 13) Rotta, J.C. (大路通雄訳) : 乱流, 岩波書店, 第4章, 1975.
- 14) Townsend, A.A. : The structure of turbulent shear flow (2-nd ed.), Cambridge Univ. Press, pp. 323~333, 1976.
- 15) 中川博次・柳津家久・富永晃宏 : 直線状ダクトに見られ

る二次流(並列らせん流)の乱流構造, 第13回乱流シンポジウム, 東大工学部, pp. 150~154, 1981.
 16) Gessner, F.B.: The origin of secondary flow in turbulent flow along a corner, J. Fluid Mech., Vol. 58, pp. 1~25, 1973.

17) Gerard, R.: Secondary flow in noncircular conduits, Proc. of ASCE, HY-5, pp. 755~773, 1978.
 18) 中村・宮田・中浜・古屋: 流れ方向突起群まわりの乱流境界層, 日本機械学会論文集, 第400号, pp. 1816~1824, 1979.

▶回答者 (Closure)

黒木 幹男・岸 力 (北海道大学)

By Mikio Kuroki and Tsutomu Kishi

はじめに, 著者らの論文に対し詳細な討議を寄せられたことに謝意を表します。以下, 番号の順に回答いたします。

(1) 著者らは, 時間平均流速と乱れ速度のそれぞれを基本流と縦渦に基因する成分に分けて次のように表わしました。

$$\bar{u}_i = \bar{U}_i + \varepsilon \bar{u}_i \dots\dots\dots (3 \cdot \text{再})$$

$$u_i' = u_{0i}' + \varepsilon u_{si}' \dots\dots\dots (52)$$

ここに, ε は縦渦に基因する成分が基本流のそれに比べて微小であること, および基礎方程式の線形化の過程を簡明に示すために付した指標です。

式 (52) のように, 乱れ速度も二つに区分している点が討議者の指摘とは異なっています。この場合, レイノルズ応力は二次の微小項を省略して次のように表わせます。

$$\begin{aligned} -\rho \overline{u_i' u_j'} &= -\rho (u_{0i}' + \varepsilon u_{si}') (\overline{u_{0j}'} + \varepsilon \overline{u_{sj}'}) \\ &\simeq -\rho \overline{u_{0i}' u_{0j}'} + \varepsilon \{ -\rho \overline{u_{0i}' u_{sj}'} - \rho \overline{u_{si}' u_{0j}'} \} \\ &= \bar{T}_{ij}^* + \varepsilon \bar{\tau}_{ij}^* \dots\dots\dots (53) \end{aligned}$$

第一項が基本流に固有のレイノルズ応力であり, 第二項が縦渦に基因する項です。式 (53) に粘性応力も加えて表現したのが式 (4) です。

このような取扱いが成立するためには, 縦渦に基因する変動量は小さくなければなりません。時間平均流速については, 縦渦の形成に伴って最も大きな変化を示した \bar{u}_i についてみても, Fig. 6 に示すように \bar{u}_* 程度の大きさです。また, 乱れ速度についてみても変動量は Fig. 11 に示すように $0.05 \bar{u}_* \sim 0.1 \bar{u}_*$ 程度の大きさです。これらの測定結果から, 上述のような取扱いがひとまず可能であろうと推定いたしました。

次に, 式 (13.2) と式 (19) を同一視するのはおかしいというご指摘ですが, 以下に述べますような理由で問題はないものと考えます。著者らは, 縦渦流れの乱れ速度を式 (52) のように二つの成分に分離しましたが, Einstein らはこのような分離は行っていません。したがって, 式 (19) の中のレイノルズ応力に式 (53) の表現を代入して整理すると,

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\bar{T}_{22}^* - \bar{T}_{33}^*) \right.$$

$$\begin{aligned} &+ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \bar{T}_{23}^* \left. \right\} \\ &- \frac{\varepsilon}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\bar{\tau}_{22}^* - \bar{\tau}_{33}^*) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \bar{\tau}_{23}^* \right\} \dots\dots\dots (54) \end{aligned}$$

ところで, 式 (15) の成立を仮定したことで基本流に固有なレイノルズ応力 \bar{T}_{ij}^* についても類似な関係

$$\bar{T}_{ij}^* = \rho \varepsilon_m \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \dots\dots\dots (55)$$

の成立を仮定していることとなります。したがって, 理論的取扱いのうえでは $\bar{T}_{22}^* = \bar{T}_{33}^* = \bar{T}_{23}^* = 0$ となり, 式 (54) の右辺第一・二項は消失します。結局, 式 (13.2) との違いは粘性応力の変動項を含んでいるかないかだけであり本質的な違いはないこととなります。

(2) 式 (14) のもとになっている関係

$$\overline{u_2'^2} - \overline{u_3'^2} = u_*^2 \left(1 - \frac{x_3}{H} \right) \simeq -\overline{u_1' u_3'} \dots\dots\dots (56)$$

は二次流の存在する流れの場で見出された実験式です。ただし, Perkins の実験式を局所摩擦速度 u_* による普遍関数表示という考え方をしますと, ご指摘のとおり混乱が生じますので, Townsend の解析と同様にレイノルズ応力の間の関係式として拡張して用いています。適用にあたって慎重を期すため, それぞれの値を測定しましたが実験値のばらつきが大きく確かめるまでには至りませんでした。討議者も共著者の一人になっている最近の実験の報告^{19), 20)}を拝見しますと, $\overline{u_2'^2} - \overline{u_3'^2}$ (文献 19) の図-4) と $-\overline{u_1' u_3'}$ (文献 20) の図-13) の分布形状は非常によく似ており縦渦流れでも式 (56) の関係は成立すると考えて差し支えないと思われまます。

式 (56) に式 (53) の関係を代入して整理すると

$$\bar{\tau}_{33}^* - \bar{\tau}_{22}^* = \alpha (\bar{T}_{13}^* + \bar{\tau}_{13}^*) \dots\dots\dots (14)'$$

となります。本文中の式 (14) では \bar{T}_{13}^* が抜けていましたので訂正します。ただし, 式 (8) の第一式を積分すれば明らかのように

$$\bar{T}_{13}^* = \rho \bar{u}_*^2 \left(1 - \frac{x_3}{H} \right)$$

となり, x_3 のみの関数ですから式 (13.2) に代入して後の展開には無関係であることを申し添えます。

(3) 縦渦の回転方向とレイノルズ応力 $-\overline{u_1' u_3'}$ の関係については、これまで検証する資料もありませんでした。このため、本文に書いたような実験を試みたわけですが、水流中の微小な二次流やそれに付随したレイノルズ応力の変化を測定することは容易でなく、ややばらつきが多い不本意な実験結果を提示することになってしまいました。その後、討議者を中心に空気流中で測定されたばらつきの少ないデータを拝見し、著者らの解析および実験が少なくとも流れの主流部では妥当であることが確認できまして喜んでおります。

ところで、河床近くの理論と実験値の違いについて、本解析は渦動粘性係数を一定としておりますので基本的には河床の近くで若干の違いが生じてもやむを得ないと考えます。ただし、討議者が縦渦上昇部で $u_* < \bar{u}_*$ と結論される理由の一つである壁法則の良好な成立と、著者らの導きました \bar{u}_1 の振幅の分布 (Fig. 7) とは整合しませんので、この点について若干考察をいたしてみました。

討議者ら²⁰⁾の記述によれば、縦渦の上昇部・下降部をとわずに、 $x_3^+ < 250$ ($x_3/H < 0.4 \sim 0.5$) という広い領域で壁法則が成立するということから、 $\partial(\bar{u}_1/u_*)/\partial x_3$ はこの範囲では x_3 のみの普遍関数表示が可能です。これに対して、本解析の結果では \bar{u}_1 は Fig. 7のように分布しますから、基本流を加えた速度勾配 $\partial\bar{u}_1/\partial x_3 = \partial(\bar{U}_1 + \bar{u}_1)/\partial x_3$ は次に示すように上昇部で大、下降部で小となります。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_*} \right)_{\text{DOWN}} &> \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\bar{U}_1}{\bar{u}_*} \right)_{\text{MEAN}} \\ &> \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_*} \right)_{\text{UP}} \end{aligned}$$

いま、討議者と同じように局所摩擦速度で整理しなおして、さらに $\partial(\bar{u}_1/u_*)/\partial x_3$ が x_3 のみの普遍関数表示が可能であるとすると、

$$\left(\frac{u_*}{\bar{u}_*} \right)_{\text{DOWN}} > 1 > \left(\frac{u_*}{\bar{u}_*} \right)_{\text{UP}}$$

となり、討議者らの結論と逆になります。

したがって、局所摩擦速度や流速分布を独立に論ずることはできませんし、現段階では資料の整理形式が異なることもあって上記の矛盾を合理的に説明できそうもありません。しかし、比較的測定が容易な \bar{u}_1 の分布形状で大まかな判定はできそうですから、結論はこれからの資料の集積を待ちたいと思います。

(4) これまでの二次流に関する解析の多くが x_1 方向の渦度式に基づいて展開されてきたことは事実です。著者らは、その事実にこそ疑問を感じ三軸方向の運動方

程式を連立して解く方法を提案したわけですが、 $x_2 \cdot x_3$ 方向の2本の運動方程式を変形して x_1 方向の渦度式に置き換えたのは単に解析の便宜上の問題と理解していただきたいと思ひます。

解析にあたり、渦度の移流項を無視して式(51)の形式で用いている点について、近似的な表現ではありますが特に問題はないと考えます。(1)で式(54)の変形にあたって渦度式を二つの意味に使われをして、二次元等流の場合には、

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\bar{T}_{22}^* - \bar{T}_{33}^*) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \bar{T}_{22}^* = 0$$

また、二次流成分に対しては定常流れでは、

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\bar{\varepsilon}_{22}^* - \bar{\varepsilon}_{33}^*) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \bar{\varepsilon}_{22}^* = 0$$

としています。前者がRottaの指摘した場合にあたります。流れが二次元等流であれば本式の成立に問題はありませんから、Rottaの指摘はGessnerと同様に二次流の存在する流れ場での渦度の移流項の重要性を述べたものと理解しています。しかし、境界層型のオーダー比較を行って残った項を式(51)の差の形で表わすと省略をした移流項と同オーダーとなるというGessnerの主張は納得できません。討議者らの実験結果(文献19)の図8・9を拝見しましても、式(51)の左右両辺は同じオーダーですが、渦度の移流項はそれよりも1オーダー小さな項になっています。したがって、本解析のような線形化した取扱ひでは、渦度の移流項を無視した式(51)の近似的な表現でも特に問題はないと考えます。

討議者の推薦する平均流エネルギー方程式についてですが、流れ全体のエネルギーバランスの説明には結構だと思ひます。ただ、この平均流エネルギー方程式で現象がうまく説明できる理由は、式中に x_1 方向の運動方程式が取り入れられているためであると考えられます。流れのエネルギー状態の説明と、流れのベクトル場の決定のために、用いる方程式が違うことは特に異としませんが、要は本項の冒頭に記しましたように三方向の運動を正しく評価することにつきますと考えます。本解析自体は流れの複雑さに比較すれば、きわめて大胆な近似をしているわけで、実験的検討とあいまって今後改良を図っていくべき点が多いのはご指摘のとおりだと思ひます。

参考文献

- 19) 柁津家久・中川博次：渦度方程式による並列せん流の実験的研究，第26回水理講演会論文集，pp. 641~646，1982。
- 20) 中川博次・柁津家久・富永晃宏：2次流を伴う流れの乱流構造について，第26回水理講演会論文集，pp. 469~474，1982。