

土木学会論文報告集
第 320 号・1982 年 4 月

【論文】

離散化幾何学的非線形系での 静的応答に関する数値解析について*

ON NUMERICAL PROCEDURES COMPUTING STATICAL RESPONSE OF GEOMETRICALLY NONLINEAR DISCRETE SYSTEMS

阿井正博**・西野文雄***
By Masahiro AI and Fumio NISHINO

1. はじめに

有限変位問題においては、その基礎方程式やいわゆる離散化に関する展開は線形系のそれに比較してきわめて複雑で難しいものとなるが、離散化された系の(数値的)解析もまた重要な問題となる。幾何学的非線形問題は一般に離散化の後に代数方程式の系となり、それは与えられた外力経路に対するつり合いの経路を求める問題として扱われるが普通であるが、その問題は単に代数方程式の解を数値的に求めることにとどまらず、たとえば経路上にある特異点に関する数値的処理の手法が逆にその不安定現象に関する別の理解を与えることも考えられる。本報告では、以上の問題を静的非線形応答問題と称して取り扱っている。

離散化された保存系の幾何学的非線形問題におけるつり合い状態およびつり合い経路に関する安定理論は、Thompson⁴⁾によりその発展経緯とともに詳しく述べられている。そのなかでは、基準のつり合い状態・経路のまわりで外力と節点位置の増分パラメーターの非線形関係が摂動法により必要程度に近似表現され、その摂動方程式の特性により安定問題が一般的に類別され説明されている。

つり合い経路を実際に求める数値計算法を考えた場合、弱非線形問題に対しては Newton-Raphson 法が多用されるが、その収束に関する適用範囲は明らかではなく、強非線形問題での特異点を含むような領域への直接の適用には限界がある。つり合い経路上の特異点を通過する手法として、変位制御することにより系が安定（または、正則）となる変位の 1 自由度を独立パラメーター

として与えて処理する手法が従来よりあるが、扱う構造系の任意性という点で汎用性に乏しい。Hangai・Kawamata⁵⁾は、Thompson の理論をトラス構造に実際に適用して、振動法のもとに経路上の特異点を処理しながら安定・不安定領域での静的非線形応答を数値計算しており、さらに、Endou・Hangai・Kawamata⁶⁾は、シェルの座屈およびその前後に対して同様の解析を行っている。一般に特異点を処理するには増分パラメーターに関する 2 次以上の展開を行う必要があるが、細野^{9),10)}は、基準状態まわりでの増分パラメーターの関係を線形までにとどめて、独立増分パラメーターとしてつり合い経路の長さを考えるという弧長法により特異点を処理している。

本報告は、Thompson のいうところの安定理論のもとに、離散系幾何学的非線形問題での静的非線形応答の数値計算法について述べるものであり、つり合い経路上の正則区間（特異点を含まない区間）に任意に適用することのできる一改良 Newton-Raphson 法と経路上の特異点を確定するための繰返し計算手法を提案している。実際の数値計算は平面骨組について行っており、その離散化に関する理論展開は文献 11) に準じている。

2. 靜的非線形応答

幾何学的非線形問題における外力とつり合い状態の応答関係および系の安定・不安定問題を以下に示すモデルのものと想する。

(1) 系の設定

n 次元ベクトル変数 X の n 次元ベクトル値の 1 値関数 $F = F(X)$ を考える。 F と X の成分をそれぞれ $F = \{F_1, \dots, F_n\}$, $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ と表わすものとして、関数 $F(X)$ の定義域において対称条件

* 本報告は、東京大学工学系学位論文¹³⁾に基づいており、研究にあたっては文部省科学研究費の補助を受けている。

** 正会員 工博 法政大学講師 工学部土木工学科

正会員 上博 法政大学講師 工学部土木工学科
*** 正会員 Ph.D. 東京大学教授 工学部土木工学科

$$\begin{aligned} \Delta W = & \frac{1}{2!} \kappa_{\alpha\alpha} \Delta A_\alpha \Delta A_\alpha \\ & + \frac{1}{3!} \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \Delta A_\alpha \Delta A_\beta \Delta A_\gamma \\ & + \frac{1}{4!} \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} \Delta A_\alpha \Delta A_\beta \Delta A_\gamma \Delta A_\delta \\ & + \frac{1}{5!} \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} \Delta A_\alpha \Delta A_\beta \Delta A_\gamma \Delta A_\delta \Delta A_\epsilon \\ & + 0 (\Delta A^6) \quad \dots \dots \dots \quad (13) \end{aligned}$$

と表わすことができる。

つり合い状態 (P, X^E) を通る任意の変位経路は、 θ をパラメーターとして $\Delta A_\alpha(\theta)$, $\alpha=1, \dots, n$, ($\Delta A_\beta' \Delta A_\beta' \neq 0$) と表わすことができる。式 (13) の ΔA_α , $\alpha=1, \dots, n$ を θ の関数と考えて、 ΔW の θ に関する微分を行った後 $\Delta A_\alpha=0$, $\alpha=1, \dots, n$ とすれば、 ΔW のつり合い状態 (P, X^E) での θ に関する各階微係数は、

$$\begin{aligned} \Delta W^{E'} &= 0 \\ \Delta W^{E''} &= \kappa_{\alpha\alpha} \Delta A_\alpha' \Delta A_\alpha' \\ \Delta W^{E'''} &= \kappa_{\alpha\alpha} (3 \Delta A_\alpha' \Delta A_\alpha'') + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} (\Delta A_\alpha' \Delta A_\beta' \Delta A_\gamma') \\ \Delta W^{E^{(IV)}} &= \kappa_{\alpha\alpha} (3 \Delta A_\alpha'' \Delta A_\alpha'' + 4 \Delta A_\alpha' \Delta A_\alpha''') \\ &+ \Gamma_{\alpha\beta\gamma} (6 \Delta A_\alpha' \Delta A_\beta' \Delta A_\gamma'') \\ &+ \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} (4 \Delta A_\alpha' \Delta A_\beta' \Delta A_\gamma' \Delta A_\delta') \\ \Delta W^{E^{(V)}} &= \kappa_{\alpha\alpha} (10 \Delta A_\alpha''' \Delta A_\alpha''' + 5 \Delta A_\alpha' \Delta A_\alpha^{(IV)}) \\ &+ \Gamma_{\alpha\beta\gamma} (15 \Delta A_\alpha' \Delta A_\beta' \Delta A_\gamma'') \\ &+ 10 \Delta A_\alpha' \Delta A_\beta' \Delta A_\gamma''' \\ &+ \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} (10 \Delta A_\alpha' \Delta A_\beta' \Delta A_\gamma' \Delta A_\delta'') \\ &+ \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} (\Delta A_\alpha' \Delta A_\beta' \Delta A_\gamma' \Delta A_\delta' \Delta A_\epsilon') \\ & \dots \dots \dots \quad (14 \cdot a \sim e) \end{aligned}$$

と表わすことができる。

$A_\alpha(\theta)$, $\alpha=1, \dots, n$ の関数形の選択によりつり合い状態 (P, X^E) を通る任意の経路を表現することができ、(P, X^E) でのパラメーター θ に関する微係数によりつり合い状態の安定・不安定を以下のように判定することができる。

つり合い状態での接線剛性の固有値 $\kappa_{\alpha\alpha}$, $\alpha=1, \dots, n$ がすべて正であるとき、任意の経路 $\{\Delta A_\alpha(\theta)\}$, ($\Delta A_\beta' \Delta A_\beta' \neq 0$) に対して $\Delta W^{E''} > 0$ であり、(P, X^E) は安定である。少なくとも 1 つの負の固有値 $\kappa_{11}(< 0)$ を含むとき、 $\Delta A_1' \neq 0$, $\Delta A_s'=0$, $s=2, \dots, n$ の経路に対して θ の 3 次以上の高次項が無視できる X^E の近傍で不安定である。[κ] が正と零の固有値よりなるとき、つり合い状態の安定性はより高次の ΔW の変分量により判定される。

接線剛性の固有値の 1 つ κ_{11} のみが零でほかは正である場合を考える。このとき、 $\Delta A_s' \neq 0$, $s \neq 1$ の経路に対しては明らかに安定であり、 $\Delta A_s'=0$, $s=2, \dots, n$, ($\Delta A_1' \neq 0$) の経路を考える。このとき、パラメーター θ を $\theta=\Delta A_1$; $\Delta A_1'=1$, $\Delta A_1''=0$, \dots と定めて一般性

を失うことはなく、そうした場合の ΔW の θ に関する各階微係数は、

$$\begin{aligned} \Delta W^{E'} &= 0 \\ \Delta W^{E''}|_{\min} &= 0 \\ \Delta W^{E'''}|_{\min} &= \Gamma_{111} \\ \Delta W^{E^{(IV)}} &= \kappa_{ss} (3 \Delta A_s'' \Delta A_s'') + \Gamma_{s11} (6 \Delta A_s'') + \Gamma_{1111} \\ \Delta W^{E^{(V)}} &= \kappa_{ss} (10 \Delta A_s''' \Delta A_s''') \\ &+ \Gamma_{ss'1} (15 \Delta A_s'' \Delta A_s'') + \Gamma_{s11} (10 \Delta A_s''') \\ &+ \Gamma_{s111} (10 \Delta A_s''') + \Gamma_{11111} \quad \dots \dots \quad (15 \cdot a \sim e) \end{aligned}$$

で与えられる。以上における記号 $(\)|_{\min}$ は、前述したような経路 $\Delta A_\alpha(\theta)$ の関数形の選択により低次から高次の順に各階微係数を最小にする過程での値を表わす。また、添字 s および s' は 2~ n の総和を意味する。ここで、 $\Gamma_{111} \neq 0$ のとき、負であれば前述した経路の $\theta > 0$ の方向に、正であれば $\theta < 0$ の方向に ΔW の θ に関する 4 次以上の項が無視できる近傍でつり合い状態は不安定ということができる。すなわち、方向性のある不安定点となる。

$\Gamma_{111}=0$, ($\kappa_{11}=0$, $\kappa_{ss}>0$, $s=2, \dots, n$) の場合を考える。式 (15·d) の $\Delta W^{E^{(IV)}}$ は、

$$\Delta W^{E^{(IV)}} = 3 \kappa_{ss} \left(4 \Delta A_s'' + \frac{\Gamma_{s11}}{\Gamma_{ss}} \right)^2 + \Gamma_{1111} - 3 \frac{\Gamma_{s11}^2}{\Gamma_{ss}} \quad \dots \dots \quad (15 \cdot d)$$

と変形することができ、 $\Delta A_1' \neq 0$, $\Delta A_s'=0$, および

$$\Delta A_s'' = -\frac{\Gamma_{s11}}{\Gamma_{ss}} \quad \dots \dots \quad (16)$$

$s=2, \dots, n$ で規定される経路で最小値

$$\Delta W^{E^{(IV)}}|_{\min} = \Gamma_{1111} - 3 \frac{\Gamma_{s11}^2}{\Gamma_{ss}} \quad \dots \dots \quad (17)$$

となる。したがって、 $\Delta W^{E^{(IV)}}|_{\min}$ が正（負）であるとき、 ΔW の前述の経路における θ に関する 5 次以上の項が無視できる近傍で安定 (θ の正・負の両方向に不安定) ということができる。

さらに、 $\Delta W^{E^{(IV)}}|_{\min}=0$ のとき、式 (16) を式 (15·e) に代入して

$$\begin{aligned} \Delta W^{E^{(V)}}|_{\min} &= 15 \Gamma_{ss'1} \left(\frac{\Gamma_{s11}}{\Gamma_{ss}} \right) \left(\frac{\Gamma_{s'11}}{\Gamma_{s's'}} \right) \\ &- 10 \Gamma_{s111} \frac{\Gamma_{s11}}{\Gamma_{ss}} + \Gamma_{11111} \quad \dots \dots \quad (18) \end{aligned}$$

となり、 $\Delta W^{E^{(V)}}|_{\min} \neq 0$ のときつり合い状態は不安定、すなわち、前述した θ に関する 2 次までの微係数を規定した経路 $\Delta A_\alpha(\theta)$, $\alpha=1, \dots, n$ において $\Delta W^{E^{(V)}}|_{\min} < 0$ (> 0) のとき ΔW の θ に関する 6 次以上の項が無視できる近傍で $\theta > 0$ (< 0) の方向に不安定といいうことができる。 $\Delta W^{E^{(V)}}|_{\min}=0$ の場合はさらに高次の ΔW の変分量を考える必要がある。

以上の結果、つり合い状態での接線剛性の固有値の 1 つが零、 $\kappa_{11}=0$ 、であるとき、第 3 変分以降の ΔW の高

次の変分量の正、負または零の判定をすることによりその安定性を知ることができ、非零の最初の本文でいうところの ΔW の最小微係数の階位が奇数番目であれば方向性のある不安定状態であり、偶数番目であればその正または負の判定により θ の正・負の両方向に安定または不安定ということができる。

外力 \mathbf{P} に対して X がつり合い位置にあり、 X^E での接線剛性の固有値がすべて零でないとき (\mathbf{P}, X^E) を正則のつり合い状態、零の固有値を含む場合を特異つり合い状態とよぶものとする。

(3) 正則経路と特異点に関する繰返し計算

与えられた \mathbf{P} に対するつり合いの X^E を求めるには、一般に繰返し計算が必要とされ、Newton-Raphson 法が用いられる場合も多い。その修正式は、前節までに定義した物理量を用いて

$$\mathbf{X}_{[\alpha+1]} = \mathbf{X}_{[\alpha]} - [K]_{[\alpha]}^{-1} \mathbf{E}(\mathbf{P}, \mathbf{X})_{[\alpha]} \quad (19)$$

で与えられる。ここに、 $[\alpha]$ は繰返し回数を表わす。このとき、強非線形問題一般においては、 \mathbf{P} に対するつり合いの X^E は唯一とは限らず、式 (19) の任意の初期値に対する収束性は一般にはいえない。また、収束値が得られたとしても、それが目的とする収束値であることを判定する必要がある。

ここでは、 \mathbf{P}_0 に対する 1 つの安定なつり合い位置 X_0 が既知であるものとして、外力 \mathbf{P} の線形経路

$$\mathbf{P}_L(\rho) = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}^* \rho, \quad 0 < \rho < \rho_{\max} \quad (20)$$

に対して X_0 から連続する X のつり合い経路 $X(\rho)$ を求めることを考える。

a) 安定領域でのつり合い経路

最初に、 $X(\rho)$ が安定つり合い経路、すなわち経路 $X(\rho)$ 、 $0 < \rho < \rho_{\max}$ 上で接線剛性 $[K(X(\rho))]$ が正值である場合を考える。

つり合い経路上にない任意の X に対する節点力 $\mathbf{F}(X)$ において、 $\mathbf{F}(X)$ を含む線形経路 $\mathbf{P}_L(\rho)$ の法平面は、

$$\mathbf{P}^{*T}(\mathbf{P} - \mathbf{F}(X)) = 0 \quad (21)$$

を満足する点 \mathbf{P} として表わされる (Fig. 1)。この法平面と $\mathbf{P}_L(\rho)$ との交点における ρ の値を $\hat{\rho}$ と表わすものとすれば、 $\hat{\rho}$ は、

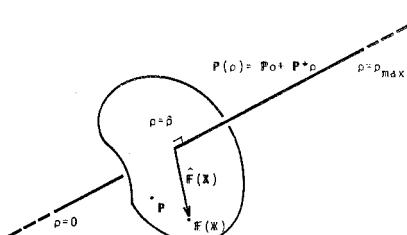


Fig. 1 P -Vector Field.

$$\hat{\rho} = \frac{\mathbf{P}^{*T}(\mathbf{F}(X) - \mathbf{P}_0)}{\mathbf{P}^{*T} \mathbf{P}^*} \quad (22)$$

で与えられ、 $\mathbf{P}_L(\hat{\rho})$ と $\mathbf{F}(X)$ を結ぶベクトルを $\hat{\mathbf{F}}(X)$ と表わすものとすれば、 $\hat{\mathbf{F}}(X)$ は、

$$\hat{\mathbf{F}}(X) = \mathbf{F}(X) - \mathbf{P}_0 + \frac{\mathbf{P}^{*T}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{F}(X))}{\mathbf{P}^{*T} \mathbf{P}^*} \mathbf{P}^*$$

$$\text{ただし, } 0 < \hat{\rho} < \rho_{\max} \quad (23)$$

と表わされる。ここで、式 (22) の $\hat{\rho}$ が区間 $[0, \rho_{\max}]$ にないときには、 $\hat{\mathbf{F}}(X)$ を

$$\hat{\mathbf{F}}(X) = \begin{cases} \mathbf{F}(X) - \mathbf{P}_0, & \hat{\rho} < 0 \\ \mathbf{F}(X) - (\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}^* \rho_{\max}), & \hat{\rho} > \rho_{\max} \end{cases} \quad (24)$$

で定義するものとし、 $\mathbf{F}(X)$ の経路 $\mathbf{P}_L(\rho)$ 、 $0 < \rho < \rho_{\max}$ からの距離 r_F を

$$r_F(X) = \sqrt{\mathbf{F}^T [K]_0^{-1} \mathbf{F}} \quad (25)$$

で定義するものとする。ただし、 $[K]_0$ は経路上の基準点 X_0 での接線剛性を表わす。このとき、与えられた r (> 0) に対して $r_F < r$ であるとき、 $\mathbf{F}(X)$ は経路 $\mathbf{P}_L(\rho)$ 、 $0 < \rho < \rho_{\max}$ の r -近傍内にあるというものとする。

$\mathbf{P}_L(\rho)$ に対するつり合い経路 $X(\rho)$ 、 $0 < \rho < \rho_{\max}$ が安定であれば、 $\mathbf{P}_L(\rho)$ の r_P -近傍内の任意の \mathbf{P} につり合う X での接線剛性 $[K(X)]$ が正值であるような正值 r_P が存在する。このとき、この r_P -近傍内の \mathbf{P} と X は 1 対 1 の対応にあり、 $\mathbf{P}_L(\rho)$ の r_P -近傍に対応する X のベクトル空間での $X(\rho)$ を含む開領域を考えることができ、その開領域もまた X -空間での r_P -近傍とよぶものとする (Fig. 2)。

$\mathbf{P}_L(\rho)$ 上の 1 点 $\mathbf{P}_I (= \mathbf{P}(\rho_I))$ に対するつり合い位置 X_I を求める問題を考える。式 (3) で定義される $W(\mathbf{P}, X)$ を考えると、接線剛性が正值である r_P -近傍内では $\mathbf{P} = \mathbf{P}_I$ での $W(\mathbf{P}_I, X)$ はつり合い位置 X_I で最小値となる。それにより、 r_P -近傍内の 2 点 X_1 と X_2 に対して、

$$W(\mathbf{P}_I, X_1) < W(\mathbf{P}_I, X_2) \quad (26)$$

であるとき、 X_1 は X_2 よりも \mathbf{P}_I のつり合い位置に近いと判定するものとする。

r_P -近傍内に $X_{[\alpha]}$ があるものとし、対応する $\mathbf{F}_{[\alpha]} (= \mathbf{F}(X_{[\alpha]}))$ 、 $[K]_{[\alpha]} (= [K(X_{[\alpha]})])$ に対して、 $X_{[\alpha+1]}$ を

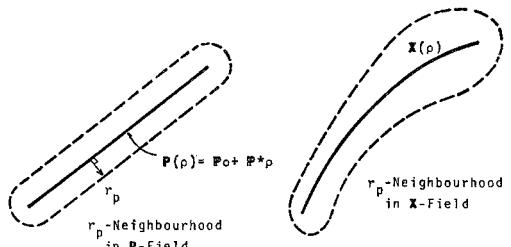


Fig. 2 r_P -Neighbourhood.

$$X_{[\alpha+1]} = X_{[\alpha]} - \omega_{[\alpha]} [K]_{[\alpha]}^{-1} E_{[\alpha]} \quad \dots \dots \dots \quad (27)$$

と修正する改良 Newton-Raphson 法を考える。ここに、
 $\omega_{[\alpha]}$, ($0 < \omega_{[\alpha]} \leq 1$) は未定係数であり, $[\alpha]$ は繰返
 し回数を表わす。またスカラー量 $R_{[\alpha]}$ を

$$R_{[\alpha]} = \sqrt{E_{[\alpha]}^T [K]_{[\alpha]}^{-1} E_{[\alpha]}} \quad \dots \dots \dots \quad (28)$$

で定義するものとして、 $X_{[\alpha+1]}$ の位置での各物理量を $X_{[\alpha]}$ の位置に関して Taylor 展開して表わせば、

$$W(\mathbf{P}_I, \mathbf{X}_{[\alpha+1]}) = W(\mathbf{P}_I, \mathbf{X}_{[\alpha]}) - \left(\omega - \frac{\omega^2}{2} \right) R_{[\alpha]}^2 + 0(\omega^3 R_{[\alpha]}^3)$$

$$r_{F[\alpha+1]} = (1 - \omega_{[\alpha]}) r_{F[\alpha]} + 0(\omega_{[\alpha]}^2 R_{[\alpha]}^2)$$

$$\hat{\rho}_{[\alpha+1]} = (1 - \omega_{[\alpha]})\hat{\rho}_{[\alpha]} + \omega_{[\alpha]}\rho_I + O(\omega_{[\alpha]}^2 R_{[\alpha]}^2)$$

$$\mathbf{F}_{[\alpha+1]} = (1 - \omega_{[\alpha]}) \mathbf{F}_{[\alpha]} + \omega_{[\alpha]} \mathbf{P}_I + \mathbf{0} (\omega_{[\alpha]}^2 R_{[\alpha]}^2)$$

$$\hat{F}_{[a+1]} = (1 - \omega_{[a]}) \hat{F}_{[a]} + 0 (\omega_{[a]}^2 R_{[a]}^2) \dots \dots \quad (29 \cdot a \sim e)$$

と表わすことができる。以上の結果より次のことがいえる。式 (29-a)において、未定係数 $\omega_{[a]}$ さえ十分小さく定めれば、右辺第3項は第1, 2項に比較して高次の微小項となり、 $0 < \omega_{[a]} < 1$ で $\left(\omega - \frac{\omega^2}{2}\right)_{[a]} > 0$ であることより $W(\mathbf{P}_I, X_{[a+1]})$ は $W(\mathbf{P}_I, X_{[a]})$ より小さくなる。また、式 (29-b)において、同様に $\omega_{[a]}$ さえ小さく定めれば、右辺第2項は第1項に比較して高次の微小項となり、 $X_{[a+1]}$ は $X_{[a]}$ よりも経路 $\mathbf{P}_L(\rho)$ に近い距離にある。すなわち、 r_P -近傍内の任意の $X_{[a]}$ に対して、

を満足する $\omega_{[\alpha]}$ を定めれば、

$$W(\mathbf{P}_I, X_{[\alpha+1]}) \leq W(\mathbf{P}_I, X_{[\alpha]})$$

が成立する有限値 $R_{\max} (> 0)$ の存在をいうことができ、 r_P -近傍内において下に有界な数列 $\{W(P_I, X_{[a]})\}$ の収束がいえる。

式(29-a)右辺に含まれる $(\omega - \omega^2/2)_{[\alpha]}$ は $\omega_{[\alpha]} = 1$ で最大値 $1/2$ となることより、最も早く収束する $\{\omega_{[\alpha]}\}$ においては収束が進み $R_{[\alpha]}$ が小さくなるにつれて $\omega_{[\alpha]}$ が 1 に収束することは明らかであり、式(30)の条件と考案合わせて、 $\omega_{[\alpha]}$ の値を

で与えるものとする。このとき、 ω を $\omega R_{[0]} < R_{\max}$ となるように定めれば、式(27)、(32)による繰返し計算は r_P -近傍内の任意の初期値に対して収束するといえる。また、初期値 $X_{[0]}$ をつり合い経路 $X(\rho)$ 上に選ぶことができる場合には、任意の正数の r_P に対して式(31-a, b)を満足する R_{\max} を考えることができ、式(32)の ω さえ十分小さく定めるものとすれば繰返し途中の $X_{[\alpha]}$ はつり合い経路 $X(\rho)$ にいくらでも近づきながら X_I に収束する。さらに、任意の初期値 $X_{[0]}$ に対して ω の値を十分小さくした場合の収束経路は、 $X_{[0]}$

での節点力 $F_{[a]}$ と外力 P_I を結ぶ線形経路に対するつり合い経路上に特異点がない限り、 $X_{[a]}$ はそのつり合い経路をたどって P_I につり合う X_I に収束するということができる。

b) 特異点に関する繰り返し計算

式(20)の外力の線形経路上の1点 $P_S = P_L(\rho_S)$, ($0 < \rho_S < \rho_{\max}$) でのつり合い状態 $X_S = X(\rho_S)$ において特異現象が生ずる, すなわち $\det[K(X_S)] = 0$ となる場合を考え, その特異つり合い状態を求めるこを考へる.

$\rho = \rho'$, ($0 < \rho' < \rho_{\max}$) でのつり合い位置 $X' = X(\rho')$ が既知であるものとし, その状態からの外力の微小増分 $\delta P = P^* \delta \rho$ によるつり合い位置の変化を $\delta X = X^* \delta \rho$ と表わすものとすれば, X^* は明らかに $X^* = [K(X')]^{-1} P^*$ と表わされる. そして, $\delta X = X^* \delta \rho$ による系の接線剛性 $[K(X')]$ の変化は $\delta [K] = [K^*] \delta \rho = [[\partial K / \partial X] X^*] \delta \rho$ と表わすことができ, 外力パラメーターの増分 $\delta \rho$ に対応するつり合い経路上の接線剛性的微小増分は,

$$\begin{aligned}\delta[K(\rho')] &= [K^*(\rho')] \delta \rho \\ [K^*(\rho')] &= [\epsilon \partial K / \partial X] [K(\rho')]^{-1} P^*\end{aligned}\quad \dots \quad (33.a, b)$$

と表わされることになる。ここに、記号 $[]$ は立体マトリックスを表わしており、 $[\partial K / \partial X]$ は接線剛性 $[K(X)]$ の X の成分に関する微係数マトリックスを表わす。以上の各物理量に付した上付きの記号 $()^*$ は外力パラメーター ρ に関する微係数を意味するものであり、式 (33-b) のような接線剛性の特定方向(モード)に関する微係数マトリックスを、以後、剛性微係数マトリックスとよぶものとする。

式 (33-a) の $\delta\rho$ に有限値 $4\rho_S$ を対応させて

$$([K(\rho')] + 4\rho_S [K^*(\rho')]) \Phi = 0 \dots \dots \dots \quad (34)$$

の固有値問題を考える。このとき、前式の解としての Δp_S と Φ は次のように考えることができる。すなわち、 $\rho = \rho'$ のつり合い状態で線形化された問題として、外力パラメーターの増分 Δp_S に対応する増分後のつり合い位置 $X_S = X' + \Delta p_S [K(X')]^{-1} P^*$ において Φ のモードで特異現象が生ずることを意味する。物理的に問題となるのは、零に最も近い正、負の固有値と対応する固有ベクトルである。これらの固有値、固有ベクトルは線形化された系での近似値であり実際の非線形系での厳密な値を与えるものではないが、 $\Delta p_{S[\beta]}$ が零に収束するような繰返し手法を考えることにより厳密な $P_S = P' + P^* \Delta p_S$ と特異モード Φ を得ることができるものと思われる。ただし、繰返しを表わす記号 ()_[β] の添字 β は特異つり合い位置を求める計算での繰返し回数を表わす。

$\mathbf{P}' = \mathbf{P}(\rho')$ のつり合い位置 $X(\rho')$ が既知であり、そ

の位置での式(34)の最小固有値 $\Delta\rho_S$ が比較的小さい値であるものとすれば、 X' を初期値 $X_{S[\beta]}$ として式(34)の固有値問題より得られる $\Delta\rho_{S[\beta]}$ に対して $X_{S[\beta]}$ を

$$X_{S[\beta+1]} = X_{S[\beta]} + \Delta\rho_{S[\beta]} [K]_{S[\beta]}^{-1} P^* \quad \dots \dots \dots (35)$$

と修正する繰返し計算により $\det [K]_S = 0$ となる X_S が得られる。しかし、このとき式(35)で定まる $X_{S[\beta]}$ に対する $F_{S[\beta]} = F(X_{S[\beta]})$ は $[\beta]$ に関する繰返しの結果、線形化による誤差の累積により式(20)の外力経路より外れるのが普通であり、外力経路上への修正のためにここでは $[\beta]$ に関する繰返し計算の内側で以下に述べるような繰返し計算を行っている。

$X_{S[\beta]}$ での系の接線剛性 $[K]_{S[\beta]}$ の対角化を式(10)のように表わすものとする。 $X_{S[\beta]}$ の節点位置で線形化された系において、 $X_{S[\beta]}$ の増分 $\Delta X_{S[\beta]}$ により対応する節点力が式(20)の外力経路上の点 $P' + \Delta P'_{S[\beta]} P^*$ にのるものとすると

$$P' + \Delta P'_{S[\beta]} P^* = F_{S[\beta]} + [K]_{S[\beta]} \Delta X_{S[\beta]} \dots \dots \dots (36)$$

と関係づけることができる。前式において右辺第1項を左辺に移した後 $[K]_{S[\beta]}$ を対角比して表わして展開すると

$$\begin{aligned} [\psi]_{S[\beta]}^T (P' + \Delta P'_{S[\beta]} P^* - F_{S[\beta]}) \\ = [\kappa]_{S[\beta]} [\psi]_{S[\beta]}^T \Delta X_{S[\beta]} \dots \dots \dots (37) \end{aligned}$$

が得られる。 $[K]$ の絶対値最小の固有値を $\hat{\kappa}$ 、対応する固有ベクトルを $\hat{\psi}$ と表わすものとすれば、 $\hat{\kappa}$ は $[\beta]$ に関する繰返し計算の結果零に収束する固有値であり、 $\hat{\kappa} = 0$ とみなして式(37)が満足される $\Delta P'_{S[\beta]}$ 、 $\Delta X_{S[\beta]}$ を定めるものとすれば、

$$\Delta P'_{S[\beta]} = \frac{\hat{\psi}_{S[\beta]}^T (F_{S[\beta]} - P')}{\hat{\psi}_{S[\beta]}^T P^*} \dots \dots \dots (38)$$

$$\Delta X_{S[\beta]} = [K]_{S[\beta]}^{\perp} \Delta F'_{S[\beta]} \dots \dots \dots (39)$$

と表わすことができる。ここに、 $\Delta F'_{S[\beta]}$ は、

$$\Delta F'_{S[\beta]} = P' + \Delta P'_{S[\beta]} P^* - F_{S[\beta]} \dots \dots \dots (40)$$

を表わしており、 $[K]^+$ は、

$$[K]^+ = [\psi][\mu][\psi]^T$$

$$[\mu] = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

$$\mu_a = \begin{cases} 1/\kappa_a, & \kappa_a \neq 0 \\ 0, & \kappa_a = 0 \end{cases} \dots \dots \dots (41 \cdot a, b, c)$$

で定義される $[K]$ の広義逆行列を表わす。このとき、前述したように $\hat{\kappa}$ は $[\beta]$ に関する繰返しの途中では $\neq 0$ であるが、零であるものとみなして対応する $\hat{\mu}$ は $\hat{\mu} = 0$ とするものとする。

以上より、 $X_{S[\beta]}$ を初期値 $X_{S[\beta,0]}$ として、 $X_{S[\beta,r]}$ に対して $X_{S[\beta,r+1]}$ を

$$X_{S[\beta,r+1]} = X_{S[\beta,r]} + [K]_{S[\beta,r]}^{\perp} \Delta F'_{S[\beta,r]} \dots \dots \dots (42)$$

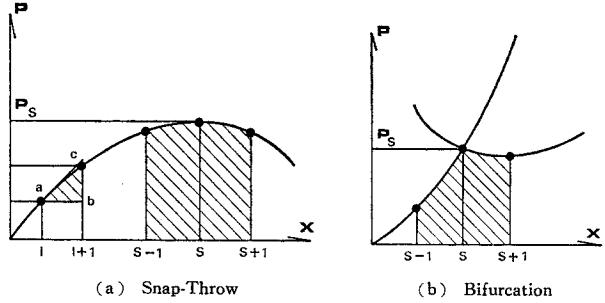


Fig. 3 Division of Equilibrium Path.

と修正する繰返し計算により、式(20)の外力経路上の点 $P' + \Delta P'_{S[\beta]} P^*$ につり合う位置 $X'_{S[\beta]}$ が得られる。

これらの繰返し計算は、 $[\beta]$ に関しては $[K]_{S[\beta]}$ の逆行列が演算不能となるまで、 $[\gamma]$ に関しては、 $R_{S[\beta,\gamma]} = (\Delta F'^T [K]^{\oplus} \Delta F')_{S[\beta,\gamma]}^{1/2} \neq 0$ となるまで行う。ここに、 $[K]^{\oplus}$ は、式(41・a, b, c)で定義される $[K]^+$ において、 μ_a を $|\mu_a|$ とすることにより定義されるマトリックスを表わす。収束時においては、 $[K]_{S[\beta]}$ の絶対値最小の固有値に対応する固有ベクトル $\hat{\psi}$ と式(34)の固有ベクトル ϕ は一致する。

つり合い経路上の特異点以降の最初のつり合い位置 X_{S+1} (Fig. 3) は、 P の増分 $P_{S+1} = P_s + P^* \Delta P_s$ に対するつり合い位置を式(27)のような繰返し計算で求めのではなく、 X_{S+1} 付近が特異状態に近いことを考えて、 X_S での特異モード $\hat{\psi}$ の方向への X の増分 $X_S + \hat{\psi} \Delta \hat{A}$ を最初に与えるものとして、それを初期値とした式(38), (39), (40), (42)の繰返し計算により初期増分 $\hat{\psi} \Delta \hat{A}$ に対して定まる経路上のつり合い位置として求めるものとする。得られた X_{S+1} に対する $P_{S+1} = F(X_{S+1})$ より、 P_{S+1} が定まることになる。

c) 正則領域でのつり合い経路

特異点以降の応答関係は安定領域にある場合も不安定領域にある場合もあるが、正則であり、前述した安定経路での応答計算手法を拡大解釈して、不安定経路も含めた正則経路に対して適用し得るように次のように変形することができる。

1つの正則なつり合い状態 (P_R, X_R) が既知であり、外力の線形経路 $P_L(\rho) = P_R + P^* \rho$, $0 < \rho < \rho_{\max}$ に対する X_R より連続したつり合い経路 $X(\rho)$ が正則であるものとする。経路 $X(\rho)$ 上にない任意の X での $F(X)$ に対して $P_L(\rho)$ からの距離 r_F を式(25)に対応して、

$$r_F = \sqrt{F^T [K]_R^{\oplus} F} \dots \dots \dots (43)$$

で定義するものとする。このとき、与えられた $r (> 0)$ に対して $r_F < r$ である X の開集合を経路、 $P_L(\rho) = P_R + P^* \rho$, $0 < \rho < \rho_{\max}$ の r -近傍とよぶものとすれば、 r_F -近傍内の任意点で $[K](X)$ が特異マトリックスとは

ならない $r_R(> 0)$ の大きさを考えることができる。すなわち X と $F(X)$ の間に 1 対 1 の対応がある r_R -近傍を考えることができる。線形経路 $P_L(\rho)$ 上の点 P_I に對して r_R -近傍内の任意の X を考え、 $\Delta W_R(P_I, X)$ を

$$4W_R(\mathbf{P}_I, X) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{P}_I, X)^T [K]_R^{\oplus} \mathbf{E}(\mathbf{P}_I, X) \quad \dots \dots \dots \quad (44)$$

で定義するものとすれば、 $\Delta W_R(P_I, X)$ は r_R -近傍内の P_I に対するつり合い位置での $W(P_I, F^{-1}(P_I))$ と $W(P_I, X)$ の差と同程度の量を表わす物理量と考えられ、 r_R -近傍内の X_1 と X_2 に対して、

$$\Delta W_R(\mathbf{P}_I, X_1) < \Delta W_R(\mathbf{P}_I, X_2) \dots \dots \dots \quad (45)$$

であるとき, X_1 は X_2 よりも P_I に対するつり合い位置に近いと判定するものとする.

r_R -近傍内に $X_{[\alpha]}$ があるものとし、 P_I に対して $E_{[\alpha]} = F(X_{[\alpha]}) - P_I$ と表わし、 $R_{[\alpha]}$ を式(28)に対応して、

$$R_{[\alpha]} = \sqrt{\mathbf{E}_{[\alpha]}^T [\mathbf{K}]_R^\oplus \mathbf{E}_{[\alpha]}} \quad \dots \dots \dots \quad (46)$$

で定義するものとして、式 (27), (32) による繰返し計算を考える。 $X_{[\alpha+1]}$ での物理量を $X_{[\alpha]}$ の位置に関して Taylor 展開すれば、

$$\Delta W_R(P_I, X_{[\alpha+1]}) = (1 - \omega_{[\alpha]}) \Delta W_R(P_I, X_{[\alpha]}) + 0(\omega_{[\alpha]}^2 R_{[\alpha]}^2) \dots \dots \dots (47)$$

および式 (29-b~e) と同様の結果がいえる。それにより、 r_R -近傍内の任意の $X_{[\alpha]}$ に対して式 (32) により $\omega_{[\alpha]}$ を定めるものとすれば、

が成立する $\omega (> 0)$ の存在をいうことができ、安定経路での応答計算とまったく同様の収束性がいえる。

以上のもとに、式(20)の外力経路に特異点が含まれる安定・不安定領域での応答計算を次のように行うことができる。式(20)の線形経路上での厳密なつり合い位置は、経路上の特異点を含めた有限個の点、 $\rho_0 (=0)$, ρ_1 , ρ_2 , ..., $\rho_L (= \rho_{\max})$ で求めるものとし、正則領域でのその間隔 $4\rho_l = \rho_{l+1} - \rho_l$, $l=0, 1, 2, \dots$ は、

で定めるものとする. ここに, R_I^* は,

で定義した量である。また、 $d\rho_0$ は最初に定める量であり、式(49)によって定まる $d\rho_l$ は、 $dP_l (= P^* d\rho_l)$ によるつり合い位置の変化において $W(P, X)$ の増分の第2近似 (Fig. 3 の $\triangle abc$ の面積) が l に関して等しい $P(\rho)$ の間隔を与えることになる。

$\rho = \rho_1$ でのつり合い位置 X_1 において、式(49)より $A\rho_1$ を、式(34)の固有値問題より零に最も近い正、負の固有値 $A\rho_1^+$ 、 $A\rho_1^-$ を求めるものとする。ここで

$$A\rho s^- \leq (1+w) A\rho i \leq A\rho s^+$$

の不等式を考え、これらの不等式が成立するとき区間 $[\rho_l, \rho_{l+1}]$ 上に特異点はないものと考えて、 P_{l+1} に対するつり合い位置 X_{l+1} を式 (27), (32) の繰返し計算 (初期値は X_l) により求めるものとする。式 (51-a) に含まれる $w (> 0)$ は、 $4\rho_S^+$, $4\rho_S^-$ が X_l のつり合い位置で線形化された系での近似値であることにより導入した安全係数である。 w の最適な値は $\{P_1, P_2, \dots, P_L\}$ の間隔を決定する $4\rho_0$ に相関するものと考えられる。

不等式 (51-a) を満たさない場合には、 P_t と P_{t+1} の間の線形区間で特異状態が生ずるものと判定して、前述の式 (34), (35), および式 (38), (39), (40), (42) の繰返し計算 (初期値は X_t) により外力経路上の特異つり合い状態 (P_S, X_S) および特異モード $\hat{\psi}$ を求めるものとする。

(P_S, X_S) の安定性は前節に述べたようにして判定されるが、実際の数値計算においては、式(15-c)の Γ_{111} 、すなわち、 (P_S, X_S) での特異モード $\hat{\psi}$ の方向への W の第3変分

$$\Delta W^{S'''}|_{\min} = \frac{1}{6} \hat{\psi}^T [(\partial K / \partial X) \hat{\psi}] \hat{\psi} \quad \dots \dots \dots (52)$$

までを計算し、 $\Delta W^{S'''}|_{\min} \neq 0$ のときには $\hat{\psi}$ に関して方向性のある特異点、 $\Delta W^{S'''}|_{\min} = 0$ のときには方向性のない特異点とみなして、最も安定性の小さい方向に X の増分 $X_{S+1} + \hat{\psi} \Delta \hat{A}$ を与えて式(38), (39), (40), (42)の繰返し計算により特異点後の最初のつり合い位置(P_{S+1} , X_{S+1})を求める。

(P_{S+1}, X_{S+1}) 以降のつり合い経路は不安定領域に入る場合もあるが正則であり、その場合も含めて式(46)を用いた式(27), (32)の繰返し計算によりつり合い経路上の点を順に求めてゆくことができる.

3. 平面骨組への適用

前章で述べた静的非線形応答の計算手法を平面骨組の幾何学的非線形問題に適用することを考える。

(1) 平面骨組の離散化^{注)}

平面骨組の離散化に関する展開は文献 11) に準ずるものとし、その結果を以下に列挙する。

はり要素の無応力時における重心線の長さ, 断面積, 断面 2 次モーメントおよび弾性定数をそれぞれ l , A , I および E と表わすものとし, 円弧部材である場合の初期曲率を κ_0 とする。代表要素 (e) の両端 A, B の空間座標を用いて要素位置を $\{X\}_{(e)} = \{(x, y, \theta)_A, (x,$

注) 本節で明記していない平面骨組の離散化に関する物理量の具体的な表示は文献 11) を参照されたい。

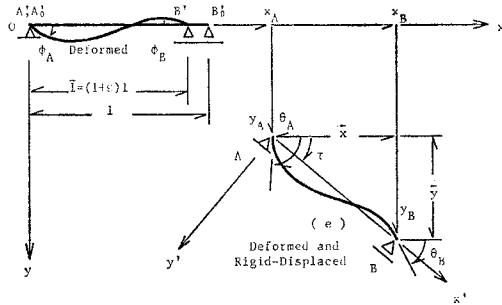


Fig. 4 Beam Element in Space.

$y, \theta_B\}_{(e)}$ で定義するものとし、要素位置に対して以下の量を定義する (Fig. 4).

$$\bar{x} = x_B - x_A, \bar{y} = y_B - y_A$$

$$\bar{l} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\tau = \arctan((y_B - y_A)/(x_B - x_A)) \dots (53 \cdot a \sim d)$$

変位後の要素両端間の距離変化 ϵ および両端を結ぶ方向からの A, B 点の回転角 φ_A, φ_B を要素の変形 $e_{(e)} = \{\epsilon, \varphi_A, \varphi_B\}$ として定義するものとすれば、各成分は要素位置に関して、

$$\epsilon = \bar{l}/l - 1, \varphi_A = \theta_A - \tau, \varphi_B = \theta_B - \tau \dots (54 \cdot a \sim c)$$

と表わされることになり、要素の剛体変位を規定するパラメータは $V_{(e)} = \{x_A, y_A, \tau\}_{(e)}$ となる。

要素の変形 $e_{(e)}$ に対応する変形力 $f_{(e)}$ は、両端を結ぶ方向に作用する引張力 H , A, B 点での曲げモーメント M_A, M_B を用いて $f_{(e)} = \{Hl, M_A, M_B\}$ で与えられる。変形力-変形関係は、はりの変形に関する基礎方程式を解いて得られるが、振動法による 3 次までの近似解は、

$$Hl = \frac{\epsilon + \frac{1}{30}(2\varphi_A^2 + 2\varphi_B^2 - \varphi_A\varphi_B)}{\frac{1}{EA\bar{l}} + \frac{l}{6300EI}(11\varphi_A^2 + 11\varphi_B^2 - 13\varphi_A\varphi_B)}$$

$$M_A = EI\kappa_0 + \frac{EI}{l}(4\varphi_A + 2\varphi_B) + \frac{Hl}{30}(4\varphi_A - \varphi_B) - \frac{EI}{35l}(8\varphi_A^3 + \varphi_B^3 + 3\varphi_A^2\varphi_B - 4\varphi_A\varphi_B^2) - \frac{l(Hl)^2}{12600EI}(22\varphi_A - 13\varphi_B)$$

$$M_B = -EI\kappa_0 + \frac{EI}{l}(2\varphi_A + 4\varphi_B) + \frac{Hl}{30}(-\varphi_A + 4\varphi_B) - \frac{EI}{35l}(\varphi_A^3 + 8\varphi_B^3 - 4\varphi_A^2\varphi_B + 3\varphi_A\varphi_B^2) - \frac{l(Hl)^2}{12600EI}(-13\varphi_A + 22\varphi_B) \dots (55 \cdot a \sim c)$$

で与えられる。前式の関係の変形 $e_{(e)}$ に関する微係数マトリックスが要素の変形力-変形間の接線剛性 $[K_{(e)}(e)]$ であり、要素のひずみエネルギー関数 $U_{(e)}(e)$ は $\delta U_{(e)} = Hl\delta\epsilon + M_A\delta\varphi_A + M_B\delta\varphi_B$ を積分して得られる。

要素位置 $\{X\}_{(e)}$ に対して要素力は $\{F\}_{(e)} = \{F_x,$

$F_y, M\}_{(e)}, (F_x, F_y, M)_{(e)}$ で与えられ、変形力 $f_{(e)}$ と要素の剛体的つり合い条件および要素の回転 τ を用いて

$$\{F\}_{(e)} = [Q_{F(e)}(\{X\})]f_{(e)} \dots (56)$$

$$[Q_{F(e)}] = [T_{F(e)}][Q_{F(e)}'] \dots (57)$$

$$[T_{F(e)}] = [[\bar{T}]^T, \mathbf{0}]$$

$$[[\bar{T}]^T, \mathbf{0}], [\bar{T}]^T], [\bar{T}]^T, [\bar{T}]^T] \dots (58 \cdot a, b)$$

$$[Q_{F(e)}'] = \begin{bmatrix} -1/\bar{l}, 0, 0 \\ 0, 1/\bar{l}, 1/\bar{l} \\ 0, 1, 0 \\ 1/\bar{l}, 0, 0 \\ 0, -1/\bar{l}, -1/\bar{l} \\ 0, 0, 1 \end{bmatrix} \dots (59)$$

とマトリックス表示することができる。式 (56) の $\{X\}_{(e)}$ に関する微分を考えることにより要素力-要素位置間の接線剛性マトリックス $[K_{(e)}(\{X\})]$ が得られ

$$[K_{(e)}(\{X\})] = [Q_{F(e)}(\{X\})][\kappa_{(e)}(\{X\})]$$

$$\cdot [Q_{X(e)}(\{X\})] + [K_{G(e)}(\mathbf{f}, \{X\})] \dots (60)$$

の形に表わすことができる。すなわち、第 1 項は式 (56) 右辺の $\mathbf{f}_{(e)}$ の変化による項、第 2 項は同式の $[Q_{F(e)}]$ の変化による項を表わす。ここに、 $[Q_{X(e)}]$ は、式 (54) の変形-要素位置関係の微係数マトリックスを表わすが、 $[Q_{F(e)}]$ と $[Q_{X(e)}] = [Q_{F(e)}]^T$ の反傾関係にある。

前述したはり要素を構造に組み合わせた平面骨組を考へる。系の節点座標 $X_j, j=1, \dots, N$, をまとめて $\{X\}_j$ と表わし、各要素の要素位置 $\{X\}_{(e)}, e=1, \dots, M$, をまとめて $\{X\}_{(E)}$ と表わすものとすれば、本文での平面骨組の場合では 0 と 1 を成分とする接続マトリックスを $[S_X]$ として、

$$\{X\}_{(E)} = [S_X]\{X\}_j + \{\text{const.}\} \dots (61)$$

と関係づけることができる。 $\{X\}_{(E)}$ の各成分を式 (53), (54), (55) および式 (56) の順に適用することにより、要素力 $\{F\}_{(e)}, e=1, \dots, M$, が定まり、 $\{F\}_{(e)}$ をまとめて $\{F\}_{(E)}$, 節点力 $\mathbf{F}_j, j=1, \dots, N$, をまとめて $\{\mathbf{F}_j\}$ と表わすものとすれば、 $\{\mathbf{F}_j\}$ は $\{F\}_{(E)}$ を用いて、

$$\{\mathbf{F}_j\} = [S_F]\{F\}_{(E)} \dots (62)$$

とマトリックス表示される。ここに、 $[S_F]$ は、接続マトリックスであり、式 (61) の $[S_X]$ と $[S_F] = [S_X]^T$ の反傾関係にある。

系の節点自由度のうちの力学的条件下の自由度を $\{X\}_j^F = [C^F]\{X\}_j$ として、対応する節点力 $\{F\}_j^F = [C^F]\{F\}_{(E)}$ と $\{X\}_j^F$ の間の接線剛性マトリックス $\delta\{F\}_j^F = [K_F^F(\{X\}_j)]\delta\{X\}_j^F$ は、前述の関数関係を順に微分してマトリックス表示することにより得られ、

$$[K_F^F(\{X\}_j)] = [C^F][S_F][K_{(E)}(\{X\}_j)]$$

$$\cdot [S_X][C^F]^T \dots \dots \dots \quad (63)$$

と表わされる。ここに、 $[K_{(E)}]$ は式 (60) の $[K_{(e)}]$, $e = 1, \dots, M$, を対角成分とする対角マトリックスを表わす。

系に作用する外力 $\{\bar{P}_f^e\}$ が保存力であり、 $\delta V_f^e = \{\bar{P}_f^e\}^T \delta \{X_f^e\}$ で定義される外力ポテンシャル $V_f^e(\{X_f^e\})$ が存在すれば、全ポテンシャル・エネルギー $W(\{X_f^e\})$ は、要素のひずみエネルギー $U_{(e)}$ 、 $e=1, \dots, M$ 、と V_f^e により、

$$W(\{X_j^F\}) = \sum_{e=1}^M U_{(e)} - V_j^F(\{X_j^F\}) \dots \dots \dots (64)$$

と表わされる.

(2) 剛性微係数マトリックス

前述した離散化された平面骨組において、節点位置の微小変化 $\delta\{X_J\} = \{X_J^*\}\delta\rho$ に対して変形状態を記述する任意の物理量 F の対応する微小増分 $\delta F = F^* \delta\rho$ 、すなわち ρ に関する微係数 F^* を考えることができる。

ここでは、力学的条件下にある節点自由度の微小増分 $\delta\{X_j^F\} = \{X_j^{F*}\}\delta\rho$ に対する同自由度間の接線剛性の微係数マトリックス $[K_j^{F*}]$ を誘導することを考える。

$\delta\{X_j^F\}$ に対して $\delta\{X_j\} = [C^F]^T \delta\{X_j^F\}$ であることと式(61)を考えて、 $\{X_{(E)}^*\}$ は、

$$\{X_{(E)}^*\} = [S_X][C^F]^T \{X_F^*\} \quad \dots \dots \dots \quad (65)$$

で与えられる。 $\{X_{(E)}^*\}$ の各成分に関して各要素の $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{l}, \tau\}_{(e)}$ の微係数は、式 (53-a~d) の ρ に関する微分より、

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{l} \\ \tau \end{array} \right\}_{(e)}^* = \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\bar{x}/\bar{l}, & -\bar{y}/\bar{l}, & 0, & \bar{x}/\bar{l}, & \bar{y}/\bar{l}, & 0 \\ \bar{y}/\bar{l}^2, & -\bar{x}/\bar{l}^2, & 0, & -\bar{y}/\bar{l}^2, & \bar{x}/\bar{l}^2, & 0 \end{array} \right] \\ \cdot \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}_A \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}_B \end{array} \right\}_{(e)}^* \dots \dots \dots \quad (66)$$

と表わされ、各要素の変形 $e_{(e)}$ よび変形力 $f_{(e)}$ の X に関する微係数は、 $\delta e_{(e)} = [Q_X(e) \{X\}] \delta \{X\}_{(e)}$ 、 $\delta f_{(e)} = [r_{(e)}(e)] \delta e_{(e)}$ の関係となり

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{(e)}^* &= [Q_{X(e)}(\{X\})] \{X\}_{(e)}^*, \\ \mathbf{f}_{(e)}^* &= [\kappa_{(e)}(\mathbf{e})] [Q_{X(e)}(\{X\})] \{X\}_{(e)}^* \end{aligned} \quad \dots \quad (67-a, b)$$

で与えられる。

式(60)の要素力-要素位置間の剛性微係数マトリックスは、そのまま微分して

$$[K_{(e)}^*] = [Q_{F(e)}^*][\kappa_{(e)}][Q_{X(e)}] \\ + [Q_{F(e)}][\kappa_{(e)}^*][Q_{X(e)}] \\ + [Q_{F(e)}][\kappa_{(e)}][Q_{X(e)}^*] + [K_{G(e)}^*] \dots \dots \dots (68)$$

と表わすことができ各 $[Q_{F(e)}^*]^* (= [Q_{X(e)}^*]^T)$, $[\kappa_{(e)}^*]$ および $[K_{G(e)}^*]$ は、各 ρ に関する微分を考えることにより次のように与えられる。

$$+ Q_{F(e)}^* \Big] = \begin{bmatrix} Q_{11}^*, & Q_{12}^*, & Q_{12}^* \\ Q_{21}^*, & Q_{22}^*, & Q_{22}^* \\ 0, & 0, & 0 \\ -Q_{11}^*, & -Q_{12}^*, & -Q_{12}^* \\ -Q_{21}^*, & -Q_{22}^*, & -Q_{22}^* \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix} \dots\dots(69)$$

ただし、

$$Q_{11}^* = -\frac{\bar{x}^*}{\bar{l}^l} + \frac{\bar{x}}{\bar{l}^2} \bar{l}^*, \quad Q_{12}^* = -\frac{\bar{y}^*}{\bar{l}^2} + \frac{2}{\bar{l}^3} \bar{y} \bar{l}^*$$

$$Q_{21}^* = -\frac{\bar{y}^*}{\bar{l}^l} + \frac{\bar{y}}{\bar{l}^2} \bar{l}^*, \quad Q_{22}^* = \frac{\bar{x}^*}{\bar{l}^2} - \frac{2}{\bar{l}^3} \bar{x} \bar{l}^*$$

.....(70-a~d)

$$[\kappa_{(e)}^*] = \begin{bmatrix} \kappa_{Hl}^{\epsilon} * & \kappa_{Hl}^{\varphi A} * & \kappa_{Hl}^{\varphi B} * \\ & \kappa_{MA}^{\varphi A} * & \kappa_{MA}^{\varphi B} * \\ & \text{sym.} & \kappa_{MB}^{\varphi B} * \end{bmatrix} \dots \quad (71)$$

ただし

$$\kappa_{Ht}^{\epsilon}* = \frac{-1}{(\gamma_t^{HI})^2} \gamma_t^{H*}$$

$$\kappa_{Ht}^{\varphi A*} = \kappa_{MA}^{\epsilon*} = -\frac{\gamma_t^{\varphi A}}{(\gamma_t^{HI})^2} \gamma_t^{H*} + \frac{\gamma_t^{\varphi A*}}{\gamma_t^{HI}}$$

$$\kappa_{Ht}^{\varphi B*} = \kappa_{MB}^{\epsilon*} = -\frac{\gamma_t^{\varphi B}}{(\gamma_t^{HI})^2} \gamma_t^{H*} + \frac{\gamma_t^{\varphi B*}}{\gamma_t^{HI}}$$

$$\kappa_{MA}^{\varphi A*} = \gamma_{MA}^{\varphi A} - \frac{\gamma_{MA}^{Ht} \gamma_{\epsilon}^{A*}}{(\gamma_t^{HI})^2} \gamma_t^{H*} + \frac{\gamma_{MA}^{Ht} \gamma_{\epsilon}^{\varphi A*} + \gamma_{\epsilon}^{\varphi A} \gamma_{MA}^{Ht}}{\gamma_t^{HI}} *$$

$$\kappa_{MA}^{\varphi B*} = \kappa_{MB}^{\varphi B*} = \gamma_{MA}^{\varphi B} - \frac{\gamma_{MA}^{Ht} \gamma_{\epsilon}^{\varphi B}}{(\gamma_t^{HI})^2} \gamma_t^{H*}$$

$$+ \frac{\gamma_{MA}^{Ht} \gamma_{\epsilon}^{\varphi B*} + \gamma_{\epsilon}^{\varphi B} \gamma_{MA}^{Ht}}{\gamma_t^{HI}} *$$

$$\kappa_{MB}^{\varphi B*} = \gamma_{MB}^{\varphi B} - \frac{\gamma_{MB}^{Ht} \gamma_{\epsilon}^{\varphi B}}{(\gamma_t^{HI})^2} \gamma_t^{H*} + \frac{\gamma_{MB}^{Ht} \gamma_{\epsilon}^{\varphi B*} + \gamma_{\epsilon}^{\varphi B} \gamma_{MB}^{Ht}}{\gamma_t^{HI}} *$$

.....(7.2.2.2.2)

$$r_e^{Hl*} = \frac{l}{6300EI} \{ (22\varphi_A - 13\varphi_B)\varphi_A^* + (-13\varphi_A + 22\varphi_B)\varphi_B^* \}$$

$$\gamma_{\epsilon}^{\varphi A*} = \gamma_{M_A}^{Hl*} = \frac{1}{30}(4\varphi_A^* - \varphi_B^*)$$

$$-\frac{l(Hl)}{6300EI}(22\varphi_A^*-13\varphi_B^*)$$

$$-\frac{\ell}{6 \cdot 300 \cdot EI} (22 \varphi_A - 13 \varphi_B) (Hl)^*$$

$$= \frac{l(Hl)}{\sin \theta \cos \frac{Hl}{R}} (-13 \varphi_A^* + 22 \varphi_B^*)$$

$$-\frac{l}{6300EI}(-13\varphi_A + 22\varphi_B)(Hl)^*$$

$$\tau_{MA}^{\varphi_A} = \frac{2}{15}(Hl)^* - \frac{EI}{35l}\{6(8\varphi_A + \varphi_B)\varphi_A^* + 2(3\varphi_A - 4\varphi_B)\varphi_B^*\}$$

ただし、

$$[k_{G(e)}^*]_1 = \begin{bmatrix} \frac{1-\cos 2\tau}{2\bar{l}\bar{l}}(Hl)^* - \frac{\sin 2\tau}{\bar{l}^2}(M_A^* + M_B^*), & \frac{-\sin 2\tau}{2\bar{l}\bar{l}}(Hl)^* + \frac{\cos 2\tau}{\bar{l}^2}(M_A^* + M_B^*), & 0 \\ \frac{1+\cos 2\tau}{2\bar{l}\bar{l}}(Hl)^* + \frac{\sin 2\tau}{\bar{l}^2}(M_A^* + M_B^*), & 0 & \dots(76\text{-a}) \\ \text{sym.} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{G(e)}]_{\mathbb{II}} = \begin{cases} \left\{ \frac{\sin 2\tau}{l\bar{l}}(Hl) - \frac{2\cos 2\tau}{\bar{l}^2}(M_A + M_B) \right\} \tau^*, & \left\{ -\frac{\cos 2\tau}{l\bar{l}}(Hl) - \frac{2\sin 2\tau}{\bar{l}^2}(M_A + M_B) \right\} \tau^*, \\ + \left\{ -\frac{1-\cos 2\tau}{2l\bar{l}^2}(Hl) + \frac{2\sin 2\tau}{\bar{l}^3}(M_A + M_B) \right\} l^*, & + \left\{ \frac{\sin 2\tau}{2l\bar{l}^2}(Hl) - \frac{2\cos 2\tau}{\bar{l}^3}(M_A + M_B) \right\} l^*, \\ & 0 \\ \text{sym.} & \left\{ -\frac{\sin 2\tau}{l\bar{l}}(Hl) + \frac{2\cos 2\tau}{\bar{l}^2}(M_A + M_B) \right\} \tau^*, \\ & + \left\{ -\frac{1+\cos 2\tau}{2l\bar{l}^2}(Hl) - \frac{2\sin 2\tau}{\bar{l}^3}(M_A + M_B) \right\} l^*, 0 \\ & 0 \end{cases} \quad (76.b)$$

要素力-要素位置間の接線剛性の ρ に関する微係数マトリックス $[K_{(e)*}]$ が前述のようにして求まれば、構造全体の力学的条件下にある節点自由度間の剛性微係数マトリックス $[K^{**}]$ は、式 (63) の誘導と同様にして、

$$[K_I^{F*}] = [C^F] [S_E] [K_{(E)}*] [S_X] [C^F]^T \dots \dots (77)$$

と表わされることになる。ただし、 $[K_{(E)}^*]$ は、 $[K_{(e)}^*]$ 、 $e=1, \dots, M$ 、を対角成分とする対角マトリックスを表わす。

(3) 解析例

a) 数値計算 1

Fig. 5 に示す両端ヒンジ支持の円弧アーチの応答計算を行った。断面は 200×200 の H 形鋼（断面積 = 63.53 cm^2 , 断面 2 次モーメント = 4720 cm^4 ）とし、弾性定数は $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ とした。アーチの初期長さに沿って 10 等分割し、中央点の垂直下方向の外力に対する応答を求めた。外力とその作用点の垂直下方向の変位の関係は **Fig. 6** の (A) のように得られた。 $P_y = 228.18 \text{ t}$ で不安定対称座屈が生じ、そのつり合い状態と座屈モードを **Fig. 7** に示す。**Fig. 6** の (B) は、中央点での水平方向の変位を拘束したときの同外力-変位曲線を示す。この場合、 $P_y = 258.15 \text{ t}$ で極限点となる。

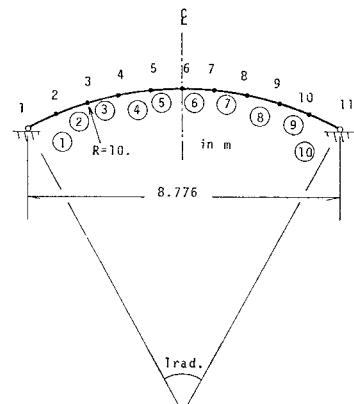


Fig. 5 Two-Hinged Arch

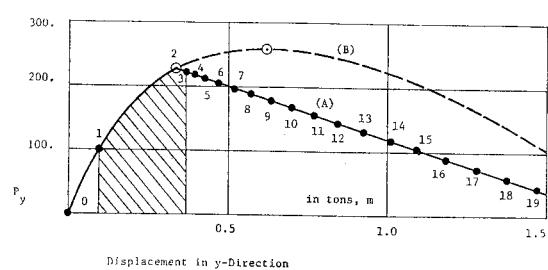


Fig. 6 P_y-v Curve at Joint 6.

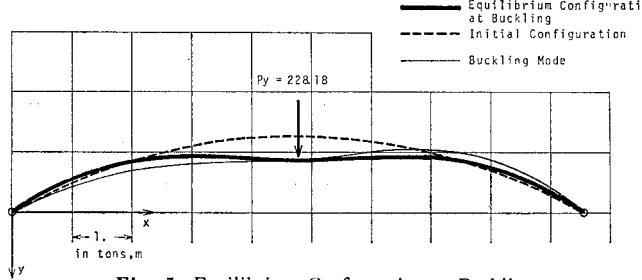


Fig. 7 Equilibrium Configuration at Buckling.

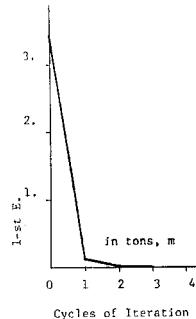


Fig. 8 Step $0 \rightarrow 1$: N.R.
Method.

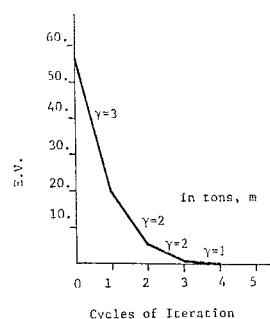


Fig. 9 Step 1 → 2 : Determination of Singular Point.

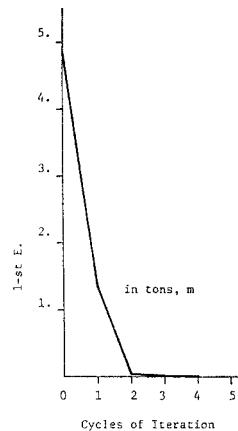


Fig. 10 Step 2 → 3 :
Desertion from
Singular Point.

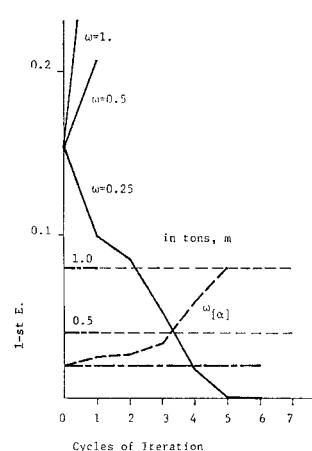


Fig. 11 Step 3 → 4 : Improved N.R. Method.

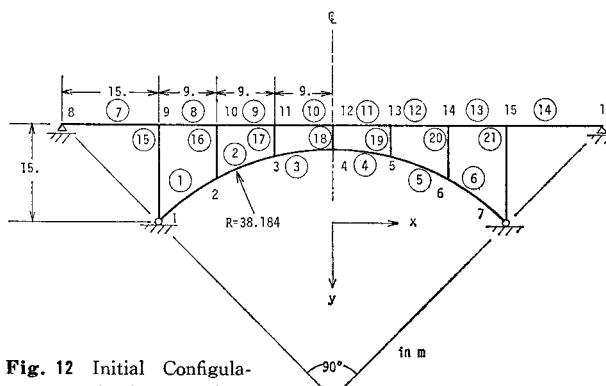


Fig. 12 Initial Configuration in Example 2.

Fig. 6 の実線 (A) 上の番号は応答段階を表わすものであり、各段階での繰返し計算の収束状況は次のようにあった。STEP 0 → 1 は式 (32) で $\omega=1$ とした Newton-Raphson 法で収束値が得られ、収束過程を **Fig. 8** に示す。図中の 1-st E. は、式 (28) (または、式 (46)) の $R_{[a]}$ を用いて $R_{[a]}^2/2$ で表わされる繰返し途中とつり合い状態での全ポテンシャル・エネルギーの差の第 1 近似を表わすである¹²⁾。STEP 1 → 2 は式 (35), (42) を用いる特異点の決定に関する繰返し計算であり、接剛性の絶対値最小固有値 (E.V.) に関する収束状況を **Fig. 9** に示す。図中の γ は式 (35) による繰返しの内側での式 (42) による繰返し計算の束回数を表わす。**Fig. 10** は式 (42) による特異点からの離脱に関する繰返し状況を表わすものであり、図中の 1-st E. は $1/2 \cdot 4F_S[T_{[\beta,r]}][K_S]^{\oplus} F_S[T_{[\beta,r]}}$ で表わされる $R_{[a]}^2/2$ と同様の量である。**Fig. 11** は STEP 3 → 4 の正則区間での繰返し状況を表わすものであり、式 (32) で $\omega=1/4$ とした本文での改良 Newton-Raphson 法で収束を得ることができた。その後、STEP 8 まで正則区間で収束値を得るために改良 Newton-Raphson 法が必要であった。

b) 數值計算 2

Fig. 12 に示すアーチ骨組構造の数値計算を行った。断面は、上弦材、下弦材を 500×300 の H 形鋼（断面積 = 163.5 cm^2 、断面 2 次モーメント = $71\,000 \text{ cm}^4$ ）とし、垂直材を 500×200 の H 形鋼（断面積 = 114.2 cm^2 、断面 2 次モーメント = $47\,800 \text{ cm}^4$ ）とした。また、弾性定数は、 $E = 2\,100\,000 \text{ kg/cm}^2$ としている。

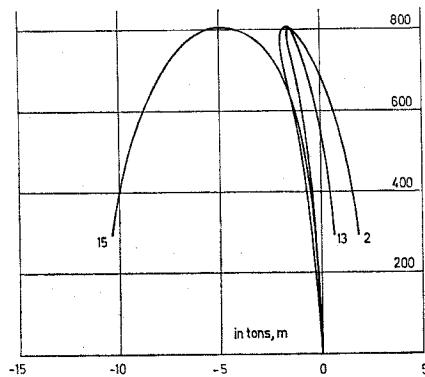
No. 13 節点に作用させた y -方向集中外力 P_y に対する応答計算を行った。 P_y と No. 2, 13, 15 節点の x , y -方向変位および回転変位の関係を、それぞれ、Fig. 13~15 に示す。 $P_y = 806.23 \text{ t}$ のつり合い状態で極限点となり、その節点座標を Table 1 に、部材の変形形状を Table 2 に示す。このとき無次元化した弦方向力の最大値は No. 21 部材で生じ。

$$\left. \frac{Hl}{\pi^2 EI} \right|_{No. 21} = -1.13$$

であり、回転変形の最大値は No. 1 部材で、

$$\varphi_B|_{\text{No. } 1} = 0.6115$$

のように生じた。また、座屈モードを Table 3 に示す。Fig. 16 は Table 1 の節点座標を図示したものであり、Fig. 17 は極限点後の $P_r =$

Fig. 13 Displacements in x -Direction.Table 1 Joint Coordinates for $P_y=806.23$ t.

No.	Coordinates in m, rad.		
	x	y	θ
1	-27.000	0.000	-0.293 71
2	-19.730	-7.867	0.277 61
3	-10.186	-7.582	0.449 43
4	-1.967	-3.787	0.379 78
5	6.210	0.211	0.106 82
6	15.795	-0.008	-0.391 83
7	27.000	0.000	-0.608 56
8	-40.821	-15.000	0.042 91
9	-25.828	-14.869	-0.059 66
10	-16.902	-15.661	0.193 89
11	-8.615	-12.207	0.449 45
12	-0.992	-7.473	0.390 75
13	7.414	-4.500	0.109 24
14	15.348	-8.186	-0.539 68
15	22.128	-14.054	-0.499 70
16	36.812	-15.000	0.152 62

Table 2 Deformations and Deformation Forces of Elements for $P_y=806.23$ t.

No.	Deformations			Deformation Forces in tm		
	ϵ	φ_A	φ_B	Hl	M_A	M_B
1	-0.047 44	-0.254 32	0.611 51	-12 068	1 414	894
2	-0.011 46	-0.243 16	0.181 61	-8 272	-203	-311
3	-0.003 58	-0.221 01	-0.052 71	-1 447	-1 188	-1 462
4	0.001 80	-0.075 05	-0.110 07	8 218	-515	-1 454
5	-0.007 35	0.367 58	0.121 87	2 810	3 141	1 508
6	-0.003 57	0.098 37	0.176 16	-5 036	1 343	697
7	-0.000 47	0.034 18	-0.068 39	2	0	-204
8	-0.004 32	0.028 81	0.282 37	1 966	1 115	2 029
9	-0.002 43	-0.201 06	0.054 50	2 158	-1 210	-275
10	-0.002 99	-0.106 25	-0.164 95	-2 957	-1 225	-1 388
11	-0.009 27	0.050 83	-0.230 69	-12 984	-647	-888
12	-0.028 00	0.544 14	-0.104 78	-7 840	2 568	1 374
13	-0.003 69	0.173 73	0.213 71	349	1 863	1 996
14	-0.018 99	-0.435 35	0.216 97	-84	-1 281	0
15	-0.005 65	-0.372 35	-0.138 30	5 938	-1 414	-912
16	-0.004 11	-0.070 39	-0.154 10	-4 885	-691	-819
17	-0.001 61	0.121 98	0.122 00	-137	1 499	1 499
18	-0.001 08	0.121 32	0.132 29	488	1 977	2 035
19	-0.006 01	-0.143 45	-0.141 03	-4 604	-1 687	-1 679
20	-0.016 19	-0.337 25	-0.485 09	2 240	-2 851	-3 237
21	-0.008 38	-0.274 83	-0.165 97	-7 448	-697	-714

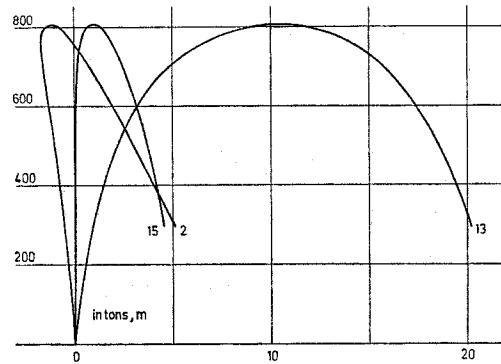
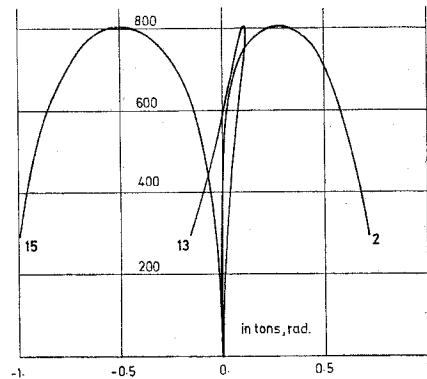
Fig. 14 Displacements in y -Direction.

Fig. 15 Joint Rotations

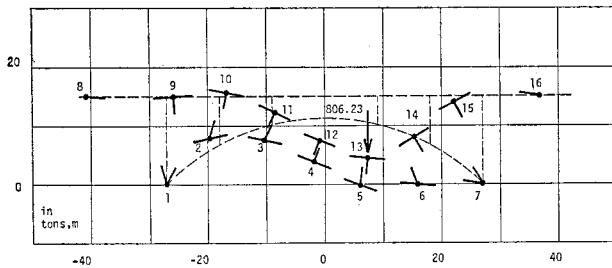
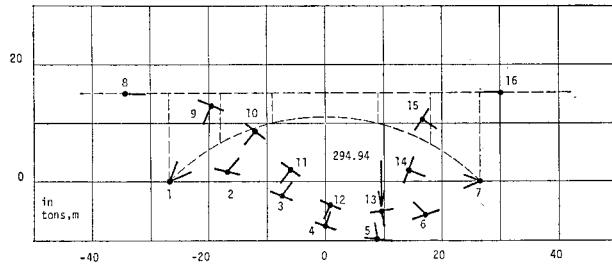
Table 3 Singular Mode at $P_y=806.23$ t.

No.	Buckling Mode		
	x	y	θ
1	0.000 0	0.000 0	0.005 9
2	0.067 5	0.080 6	0.016 6
3	0.064 3	0.246 4	0.012 2
4	0.015 6	0.353 5	0.006 6
5	0.006 6	0.374 1	-0.002 2
6	-0.000 4	0.238 3	-0.013 4
7	0.000 0	0.000 0	-0.023 8
8	0.150 5	0.000 0	-0.002 7
9	0.151 9	0.014 7	0.008 2
10	0.159 6	0.114 0	0.014 2
11	0.099 0	0.258 5	0.012 8
12	0.034 5	0.358 8	0.007 6
13	0.022 9	0.379 8	-0.001 8
14	-0.054 8	0.248 2	-0.021 1
15	-0.204 0	0.078 4	-0.018 8
16	-0.226 8	0.000 0	0.001 3

294.94 t でのつり合い節点位置を示す。

4. 考 察

接線係数を用いて修正を行う Newton-Raphson 法系の繰返し計算では、関数の滑らかさと 1 対 1 の対応が収束のための必要条件であるが、Newton-

Fig. 16 Joint Positions for $P_y=806.23$ t.Fig. 17 Joint Positions for $P_y=294.94$ t.

Raphson 法そのものはこれらの条件のみでは収束は保証されない。式 (27) に示している修正式は Newton-Raphson 法のそれに未定定数 $\omega_{[a]}$ を挿入した形のものであり、いわゆる改良 Newton-Raphson 法とはなんらかの判断でこの係数を定めて行う繰返し計算と考えてあてはまる場合が多い。関数に 1 対 1 の対応がある場合には、式 (32) のように $\omega_{[a]}$ を定めることにより収束値が得られることはすでに報告されている¹²⁾。本報告では、特異点を含み安定・不安定領域にまたがるつり合い経路に対して、式 (27), (32) の改良 Newton-Raphson 法を適用することを行っている。

つり合い経路の正則区間では、それを含んで内側で 1 対 1 の対応がある開領域 (r_R -近傍) を考えることができ、そのなかで計算が行われる限り前述の繰返し手法により任意の初期値に対して収束値が得られることは明らかである。式 (27), (32) は 1 対 1 の対応がある開領域内で修正計算が行われることを保証するものであり、その定性的な意味について次のように説明することができる。

不つり合い力 $E_{[a]}$ が系の非線形性に相対して大きく接線係数で $E_{[a]}$ のすべてを修正しようすれば収束傾向を外れるか r_R -近傍の外に逸脱するような強非線形問題において、系の非線形性と $E_{[a]}$ に対して適当に小さい $\omega_{[a]} (0 < \omega_{[a]} \leq 1)$ を定めて r_R -近傍を飛び出さない接線係数が有効と考えられる不つり合い力の一部 $\omega_{[a]}$ を修正しようとする繰返し計算を考えることができる。2. (3) で述べたように、経路上の 1 点を初期値とする場合、式 (32) で ω を十分小さくすれば繰返し過程

はつり合い経路にいくらでも近接して目的の 1 点に収束するが、経路上の点をより少ない繰返し回数で求めてゆくためにはより大きい ω を用いるのが有効である¹²⁾。安定領域での式 (28)、正則領域での式 (46) により定義した $R_{[a]}$ は不つり合い状態をエネルギー的に定量化したものであり、式 (28) の $R_{[a]}$ はその $R_{[a]}^2/2$ で不つり合い状態と目的のつり合い状態の間の全ポテンシャル・エネルギーの差の第 1 近似を表わすものであり、式 (46) の $R_{[a]}$ も同程度の量を表わす。したがって、式 (27), (32) は、 $R_{[a]} > \omega R_{[a]}$ の収束の初期段階で前述のエネルギーの第 1 近似のうちの一定値が修正される繰返し計算となり、収束が進んで $R_{[a]} < \omega R_{[a]}$ となれば Newton-Raphson 法による繰返し計算に継続される。

経路上の特異点を含む部分領域では、いかに小さな部分領域であっても内に安定領域と不安定領域の両方を含むことから、前述の繰返し計算は適用できない。本報告では、この部分領域内の特異点を確定することを式 (34), (35) および式 (38), (39), (40), (42) の 2 組の繰返し計算で行っている。これらの繰返し計算では修正を有効域にとどめるための係数 $\omega_{[1]}$ は用いていないが、特異点で零となる最小の固有値以外の固有値が部分領域内で十分正則であれば前述の操作は必要としない。式 (38)～(42) の繰返し計算は、式 (34), (35) が経路上の特異点直前の正則点を初期値として線形化された固有値問題の連続により特異点を定める計算であり、その線形化式の累積誤差によって外力経路より外れることを防ぎ経路上の特異点を正確に求めるためのものである。その繰返し手法は、接線係数を用いるという意味で Newton-Raphson 法系と考えてよいが、接線剛性の特異モードに関して特別の処理を行っている。式 (38)～(42) の計算は、経路上の確定点を目指すものではなく経路上の任意点を求める目的とするものであり、その目的状態の自由度は経路上の確定点に対するものより 1 自由度少ない。以上のことを考えて、特異モード方向の節点変位を拘束して、他の自由度の変化により目的状態に到達しようとするものであり、消極的な意味で特異点付近で節点自由度の特異モード方向の変化を一般的に変位制御していると考えてよく、特異点からの離脱における最初のつり合い位置を求めることも同様の考え方のもとに行っている。

5. まとめ

本報告は、安定・不安定領域にまたがるつり合い経路を求める目的として、正則経路に対して前章で述

べた意味で正確に適用することのできる一改良 Newton-Raphson 法と経路上の特異点を確定するための繰返し計算手法を提案しているが、つり合い経路を明確に解析するという意味ではなお以下のような不備な点を残している。

2. (3) で述べたように特異点からの離脱はその特異モード方向への初期の変位増分を与えて行っている。その方法は、特異モードと分岐モードが一致する経路上の極限点や対称分岐点では合理的であるが、それらが一致しないいわゆる非対称分岐点^{4), 5)}では、いずれかの経路上の点が求まることはいえるものの、分岐方向の制御が十分でないといえる。

本報告では、安定な1つのつり合い状態から連続して特異点に至り不安定領域に入るつり合い経路に対しては最も不安定な方向の分岐を考えるという判断基準のもとに応答計算を行っているが、不安定区間-特異点-安定区間または不安定区間という経路における分岐に関する判断基準をもたない。分岐するすべての方向のつり合い経路を求めることが対象としている構造物の種々のつり合い状態を知るという意味があるが、一方において安定問題の理論展開としてより広義で明確な分岐に関する判断基準が示されることも必要であろう。

参考文献

- 1) Kar, A.K. and C.Y. Okazaki : Convergence in Highly Nonlinear Cable Net Problems, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST 3, Proc. Paper 9601, pp. 321~334, Mar., 1973.
- 2) Mallet, R.H. and L.A. Schmitt : Nonlinear Structural Analysis by Energy Search, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, No. ST 3, Proc. Paper 5285, pp. 221~234, June, 1967.
- 3) Schmitt, L.A., F.K. Bogner and R.L. Fox : Finite Deflection Structural Analysis Using Plate and Shell Discrete Elements, AIAA J., Vol. 6, No. 5, May, 1968.
- 4) Thompson, J.M.T. : A General Theory for the Equilibrium and Stability of Discrete Conservative Systems, ZAMP, Vol. 20, 1969.
- 5) Hangai, Y. and S. Kawamata : Analysis of Geometrically Nonlinear Problem by Static Perturbation Method, Rep. of the Inst. of Ind. Science, Tokyo Univ., Vol. 22, No. 5, 1973.
- 6) Endou, A., Y. Hangai and S. Kawamata : Post-Buckling Analysis of Elastic Shells of Revolution by the Finite Element Method, Rep. of the Inst. of Ind. Science, Tokyo Univ., Vol. 26, No. 2, 1976.
- 7) Leicester, R.H. : Finite Deformations of Shallow Shells, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 94, No. EM 6, Proc. Paper 6274, pp. 1409~1423, Dec., 1968.
- 8) 平田隆教・白沢和丈：有限要素法による円形アーチの非線形解析, 日本国構造協会, 第7回研究集会, マトリックス構造解析法研究発表論文集, pp. 341~349, 1973.
- 9) 細野透：弧長法による弾性座屈問題の解析（その1），座屈点における増分解の性質, 日本建築学会論文報告集, 第242号, 1976.4.
- 10) 細野透：弧長法による弾性座屈問題の解析（その2），数値解析方法としての弧長法, 日本建築学会論文報告集, 第243号, 1976.5.
- 11) 阿井正博・西野文雄：離散系の幾何学的非線形問題での力学的関係と平面骨組への適用, 土木学会論文報告集, 第304号, 1980.12.
- 12) 阿井正博・西岡隆・奥村敏恵：ケーブル構造に関する一理論解説, 土木学会論文報告集, 第260号, 1977.4.
- 13) 阿井正博：1次元構造要素の幾何学的非線形問題について, 東京大学工学系研究科学位論文, 1979.3.

(1980.3.26・受付)