

## 圧縮と面内曲げを受ける長方形板の 面外有限変形に関する研究

STUDY ON FINITE OUT-OF-PLANE DEFORMATION OF RECTANGULAR PLATES SUBJECTED TO COMPRESSION AND IN-PLANE BENDING

前田幸雄\*・大倉一郎\*\*

By Yukio MAEDA and Ichiro OKURA

### 1. 序 論

薄肉プレートガーダーが繰り返し曲げを受けると、圧縮フランジをウェブに連結する隅肉溶接のウェブ側の止端に疲労亀裂の発生する可能性がある<sup>1)</sup>。初期たわみを有する薄肉ウェブが面内曲げを受けて、面外へ繰り返し変形することによって、ウェブ周辺の隅肉溶接部に生ずる2次的な面外曲げ応力がこの疲労亀裂の発生原因である。

著者らは、前論文<sup>2)</sup>で、初期たわみの大きさのみならず、初期たわみの形状も2次的な面外曲げ応力の増加、すなわち疲労亀裂の発生に影響することを明らかにした。この種の疲労亀裂の発生を防止するための設計式を確立するためには、初期たわみ、残留応力、ウェブに対するフランジや補剛材の回転拘束を考慮して、荷重と2次的な面外曲げ応力の関係を定式化する必要がある。

ところで、疲労亀裂は、非対称断面のプレートガーダー<sup>3)</sup>のウェブの面外変形や、水平補剛材を有するプレートガーダー<sup>4)</sup>の圧縮フランジと水平補剛材との間のウェブの局部的な面外変形によっても発生する可能性がある。このようなプレートガーダーのウェブの面外変形は、圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外変形を解析することによって調べることができる。

これを解析するために、著者らが前論文<sup>2)</sup>で用いた有限要素法を用いると、膨大な数値計算を必要とする。一方、Marguerre が与えた初期たわみを有する板の基礎微分方程式<sup>5)</sup>を、Galerkin 法あるいは Ritz 法によって近似的に解く従来の解法でも、他の研究者<sup>6)~9)</sup>が与えた解は非常に複雑であり、これから疲労亀裂の発生を防止するための設計式を誘導することはほとんど不可能である。

2次的な面外曲げ応力と荷重の関係を簡便な式で与えるために、著者らは次の手法を考案した<sup>10),11)</sup>。

(1) 4辺単純支持された、圧縮と面内曲げを受ける長方形板の荷重と面外たわみの関係を、初期たわみを考慮して定式化する。

(2) 非載荷辺の拘束度と残留応力を考慮した座屈解析、および有限要素法による面外有限変形解析の結果に基づいて、段階(1)で得られた式を修正することにより、初期たわみ、残留応力、および非載荷辺の回転拘束を考慮した、圧縮と面内曲げを受ける長方形板の荷重と面外たわみの関係を定式化する。また、2次的な面外曲げ応力と面外たわみの関係も定式化する。両式から面外たわみを消去することにより、2次的な面外曲げ応力と荷重の関係を与える。

純圧縮を受ける場合については、この手法に基づいて定式化を終了している<sup>10),11)</sup>。この手法は、4辺単純支持された、圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形が、初期たわみ以外の影響因子も考慮した場合の面外有限変形の基礎になるという考えに基づいている。したがって、4辺単純支持された、圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形を十分に理解しておく必要がある。しかし、圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形に関する研究は、純圧縮を受ける場合に比べて少なく、その面外有限変形についても、十分には理解されていないようである。

本論文は、4辺単純支持された、圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形を調べることを目的とする。解析手法は、Marguerre の板の基礎微分方程式を Galerkin 法によって近似的に解く従来の手法と同じであるが、得られた荷重と面外たわみの関係式は陽な形で与えられており、式を変形することにより、圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形を広範囲に調べることができる。

\* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工修 大阪大学助手 工学部土木工学科

## 2. 圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形の定式化

### (1) Marguerre の板の基礎微分方程式

初期たわみを有する板の面外有限変形に対する微分方程式は、Marguerre<sup>3)</sup>によって与えられた。図-1に示すように、面外変位の方向を $z$ 軸方向にとると、ひずみの適合条件式とつり合い条件式は、それぞれ次式で与えられる。

$$\frac{1}{E} \Delta \Delta F = \left\{ \frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial x \partial y} \right\}^2 - \frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial x^2} \frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial y^2} - \left\{ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$D_w \Delta \Delta w = P \\ \frac{P}{t_w} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial x \partial y} \\ + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial y^2} \quad \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $w_0$ ：板厚中央面の初期たわみ、 $w$ ：荷重による付加面外たわみ、 $F$ ：応力関数、 $E$ ：ヤング率、 $D_w = Et_w^3/[12(1-\nu^2)]$ ：板の曲げ剛性、 $t_w$ ：板厚、 $\nu$ ：ポアソン比、 $\Delta \Delta = \partial^4/\partial x^4 + 2\partial^4/\partial x^2\partial y^2 + \partial^4/\partial y^4$ ：演算記号。応力関数 $F$ と各膜応力成分との間には、次の関係がある。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_{mx}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma_{my}, \quad -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \tau_{mxy} \quad \dots \dots \dots (3)$$

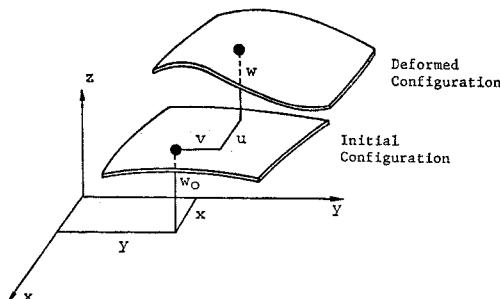


図-1 初期たわみを有する板

### (2) 境界条件

境界条件は、図-2を参照して、次のように与える。

(i) 面外方向に対し4辺単純支持の条件；  
 $x=0, a$  で

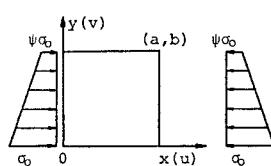


図-2 圧縮と面内曲げを受ける長方形板

$$\left. \begin{array}{l} w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \\ y=0, b \text{ で} \\ w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

(ii) 面内方向に対し；

$$\left. \begin{array}{l} x=0, a \text{ で} \\ t_w \int_0^b \sigma_{mx} dy = -\frac{1+\psi}{2} \sigma_0 t_w b \\ t_w \int_0^b \sigma_{mx} \left( y - \frac{b}{2} \right) dy = \frac{1-\psi}{2} \frac{\sigma_0 t_w b^2}{6} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 $-1 \leq \psi \leq 1$ であり、 $\sigma_0$ は、膜応力が線形的に変化していると仮定したときの $y=0$ 上の圧縮応力である。 $\psi=1$ のとき純圧縮、 $\psi=-1$ のとき純面内曲げとなる。

辺 $y=0, b$ 上の面内方向の境界条件については、次の2つの場合を考慮する。

条件 (a)

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^a \sigma_{my} dx = 0 \\ v(x, b) - v(x, 0) = \text{constant} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

条件 (b)

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{my} = 0 \\ \tau_{mxy} = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

条件 (a)の場合、両非載荷辺の相対変位は、 $y$ 軸方向の膜応力 $\sigma_{my}$ の分布のために一定となる。ただし、 $\sigma_{my}$ の合力は0である。一方、条件 (b)の場合、両非載荷辺は自由に変位する。

### (3) 初期たわみと付加たわみの仮定

一般に、板の初期たわみ形状は、非常に複雑であり、2重Fourier級数で表わすことができる。この各級数成分は、相互に影響し合って、成長したり、減衰することが明らかにされている<sup>10)~13)</sup>。

純圧縮を受ける場合について、初期たわみの $x$ 軸方向の各成分が面外有限変形に与える影響について解析した結果<sup>10), 11)</sup>、初期たわみの $x$ 軸方向の各成分の影響特性は、各成分のモードの次数と座屈モードの次数とを比較することによって分類できることが明らかにされた。この分類方法は、圧縮と面内曲げを受ける場合についても基本的に成立すると考えられる。

したがって、本研究では、初期たわみの $y$ 軸方向の成分が面外有限変形に与える影響を調べるために、次の初期たわみと付加たわみを仮定した。

$$w_0 = \sin \frac{\pi x}{a} \left( e_{01} \sin \frac{\pi y}{b} + e_{02} \sin \frac{2\pi y}{b} \right) \dots \dots \dots (8)$$

$$w = \sin \frac{\pi x}{a} \left( e_1 \sin \frac{\pi y}{b} + e_2 \sin \frac{2\pi y}{b} \right) \dots \dots \dots (9)$$

ここに、 $e_{01}$ と $e_{02}$ ：既知定数、 $e_1$ と $e_2$ ：未知定数。

式(9)は式(4)の境界条件を満足する。

(4) 条件 (a) に対する応力関数

式(8), (9)を式(1)へ代入すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} \Delta F = & \frac{E\pi^4}{a^2 b^2} \left\{ -\frac{1}{4} q_3 \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{2} q_1 \cos \frac{2\pi y}{b} \right. \\ & + \frac{9}{4} q_3 \cos \frac{3\pi y}{b} + 2 q_2 \cos \frac{4\pi y}{b} \\ & + \cos \frac{2\pi x}{a} \left( \frac{1}{2} q_1 + 2 q_2 + \frac{9}{4} q_3 \cos \frac{\pi y}{b} \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{4} q_3 \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \right\} \dots \quad (10) \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } q_1 = (e_{01} + e_1)^2 - e_{01}^2, \quad q_2 = (e_{02} + e_2)^2 - e_{02}^2;$$

$$q_3 = (e_{01} + e_1)(e_{02} + e_2) - e_{01}e_{02}$$

式 (10) の特解  $F_0$  は次式で与えられる.

$$F_0 = \frac{1-\nu^2}{\pi^2} \frac{b^4}{a^2} \sigma_e \left\{ \frac{3}{8} \frac{q_1}{t_w^2} \cos \frac{2\pi y}{b} + \frac{3}{32} \frac{q_2}{t_w^2} \cos \frac{4\pi y}{b} - 3 \frac{q_3}{t_w^2} \left( \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \right\} + \frac{1-\nu^2}{\pi^2} b^2 \sigma_e \cos \frac{2\pi x}{a} \cdot \left\{ \frac{3}{8} \frac{\alpha^2}{b^2} \frac{q_1 + 4q_2}{t_w^2} + 3 \frac{q_3}{t_w^2} \left( \frac{9}{\theta_1} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{\theta_2} \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \right\} \dots \quad (11)$$

ここに、

$$\sigma_e = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t_w}{b} \right)^2, \quad \theta_1 = \left( \frac{4}{a} \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2, \\ \theta_2 = \left( \frac{4}{a} \frac{b}{a} + 9 \frac{a}{b} \right)^2$$

応力関数が条件 (a) を満足しなければならないことを考慮して、式 (10) の同次解として次式を選ぶ。

$$F_1 = -\frac{1}{3} \left\{ -\frac{1-\psi}{2} \sigma_0 + (1-\nu^2) r_1 \frac{q_3}{t_w^2} \sigma_e \right\} \frac{y^3}{b} \\ + \frac{1}{2} \left\{ -\sigma_0 + (1-\nu^2) r_1 \frac{q_3}{t_w^2} \sigma_e \right\} y^2 \dots \dots \quad (12)$$

すなわち、条件 (a) を満足する応力関数は、

で与えられ、定数  $r_1$  は、式 (13) が式 (5), (6) の境界条件を満足しなければならないことから決定され、次式となる。

$$r_1 = \frac{72}{\pi^2} \left\{ -\frac{4}{9} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \right\}$$

各膜応力成分はそれぞれ次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{mx}}{\sigma_e} = & -2 \left\{ -\frac{1-\psi}{2} \frac{\sigma_0}{\sigma_e} + (1-\nu^2) r_1 \frac{q_3}{t_w^2} \right\} \frac{y}{b} - \frac{\sigma_0}{\sigma_e} \\ & + (1-\nu^2) r_1 \frac{q_3}{t_w^2} - \frac{3}{2} (1-\nu^2) \frac{b^2}{a^2} \left\{ \frac{q_1}{t_w^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right. \\ & + \frac{q_2}{t_w^2} \cos \frac{4\pi y}{b} - 2 \frac{q_3}{t_w^2} \left( \cos \frac{\pi y}{b} - \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \Big\} \\ & - 27 (1-\nu^2) \frac{q_3}{t_m^2} \left( \frac{1}{\theta_1} \cos \frac{\pi y}{b} \right. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{my}}{\sigma_e} &= -\frac{3}{2}(1-\nu^2) \left\{ \frac{q_1+4q_2}{t_w^2} + 8 \frac{b^2}{a^2} \frac{q_3}{t_w^2} \left( \frac{9}{\theta_1} \cos \frac{\pi y}{b} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\theta_2} \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \right\} \cos \frac{2\pi x}{a} \\ \frac{\tau_{mx y}}{\sigma_e} &= -18(1-\nu^2) \frac{b}{a} \frac{q_3}{t_w^2} \left( \frac{3}{\theta_1} \sin \frac{\pi y}{b} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\theta_2} \sin \frac{3\pi y}{b} \right) \sin \frac{2\pi x}{a} \end{aligned} \right\} \dots \quad (14)$$

載荷辺の  $x$  軸方向の変位  $u$  について考える。 $x$  軸方向の膜ひずみと膜応力の関係、そして膜ひずみと変位の関係<sup>5)</sup>はそれぞれ次式で与えられる。

$$\varepsilon_{mx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \dots \dots \dots (16)$$

式(16)を式(15)へ代入し、 $x$ について積分し、 $u(a/2, y) = 0$  の条件を用いると、辺  $x=0$  と  $a$  における変位が次式のように求められる。

$$u(0, y) = -u(a, y) = -\frac{a}{2} \left\{ -2 \left( -\frac{1-\psi}{2} \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\pi^2}{12} \frac{t_w^2}{b^2} r_1 \frac{q_3}{t_w^2} \right) \frac{y}{b} - \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\pi^2}{12} \frac{t_w^2}{b^2} r_1 \frac{q_3}{t_w^2} - \frac{\pi^2}{8} \frac{b^2}{a^2} \frac{t_w^2}{b^2} \left( \frac{q_1}{t_w^2} + \frac{q_2}{t_w^2} \right) \right\} \dots \quad (17)$$

式(17)は、載荷辺が直線を保って変位することを示している。

(5) 条件 (b) に対する応力関数

条件 (b) の場合、式 (10) の同次解として、式 (12) のほかに、さらに次式を選ぶ。

$$F_2 = (1 - \nu^2) r_2 \frac{q_3}{t_w^2} \sigma_e \left( \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} \frac{y^3}{b} \right) \\ + (1 - \nu^2) \frac{a^2}{4 \pi^2} \sigma_e \left( A \cosh \frac{2 \pi y}{a} + B \sinh \frac{2 \pi y}{a} \right. \\ \left. + C \frac{2 \pi y}{a} \cosh \frac{2 \pi y}{a} + D \frac{2 \pi y}{a} \sinh \frac{2 \pi y}{a} \right) \cos \frac{2 \pi x}{a} \quad (18)$$

すなわち、条件 (b) を満足する応力関数は、

で与えられ、定数  $r_2, A, B, C, D$  は、式(19)が式(5), (7)の境界条件を満足しなければならないことから定められ、それぞれ次式となる。

$$B = -C = \frac{3}{2} \frac{q_1 + 4q_2}{t_w^2} \frac{\cosh(2\pi b/a) - 1}{\sinh(2\pi b/a) + 2\pi b/a}$$

$$+ 12 \frac{b^2}{\sigma^2} \frac{q_3}{t_w^2} \left( \frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \frac{\cosh(2\pi b/a) + 1}{\sinh(2\pi b/a) - 2\pi b/a}$$

$$D = \frac{3}{2} \frac{q_1 + 4q_2}{t_w^2} \frac{\sinh(2\pi b/a)}{\sinh(2\pi b/a) + 2\pi b/a} \\ + 12 \frac{b^2}{a^2} \frac{q_3}{t_w^2} \left( \frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \frac{\sinh(2\pi b/a)}{\sinh(2\pi b/a) - 2\pi b/a}$$

同次解  $F_2$  から次の各膜応力が生ずる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{mxh}}{\sigma_e} &= (1-\nu^2) \left[ r_2 \frac{q_3}{t_w^2} \left( 1 - 2 \frac{y}{b} \right) \right. \\ &\quad + \left\{ (A+2D) \cosh \frac{2\pi y}{a} + C \left( \sinh \frac{2\pi y}{a} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\pi y}{a} \cosh \frac{2\pi y}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + D \frac{2\pi y}{a} \sinh \frac{2\pi y}{a} \right\} \cos \frac{2\pi x}{a} \right] \\ \frac{\sigma_{myh}}{\sigma_e} &= -(1-\nu^2) \left\{ A \cosh \frac{2\pi y}{a} - C \left( \sinh \frac{2\pi y}{a} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2\pi y}{a} \cosh \frac{2\pi y}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + D \frac{2\pi y}{a} \sinh \frac{2\pi y}{a} \right\} \cos \frac{2\pi x}{a} \right] \\ \frac{\tau_{mxyh}}{\sigma_e} &= (1-\nu^2) \left\{ (A+D) \sinh \frac{2\pi y}{a} \right. \\ &\quad \left. + C \frac{2\pi y}{a} \sinh \frac{2\pi y}{a} \right. \\ &\quad \left. + D \frac{2\pi y}{a} \cosh \frac{2\pi y}{a} \right\} \sin \frac{2\pi x}{a} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

載荷辺の  $x$  軸方向の変位  $u$  は、前と同様にして求められ、次式となる。

$$u(0, y) = -u(a, y) = -\frac{a}{2} \left[ -2 \left\{ -\frac{1-\psi}{2} \frac{\sigma_0}{E} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\pi^2}{12} \frac{t_w^2}{b^2} (r_1 + r_2) \frac{q_3}{t_w^2} \right\} \frac{y}{b} - \frac{\sigma_0}{E} \right. \\ \left. + \frac{\pi^2}{12} \frac{t_w^2}{b^2} (r_1 + r_2) \frac{q_3}{t_w^2} \right. \\ \left. - \frac{\pi^2}{8} \frac{b^2}{a^2} \frac{t_w^2}{b^2} \left( \frac{q_1}{t_w^2} + \frac{q_2}{t_w^2} \right) \right] \quad (21)$$

## (6) Galerkin 法による定式化

Galerkin 法に基づいて、次式から未定定数  $e_1$  と  $e_2$  の関係を決定する。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \int_0^b (D_w \Delta \Delta w - P) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0 \\ \int_0^a \int_0^b (D_w \Delta \Delta w - P) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} dx dy = 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

条件 (a) の場合は式 (8), (9), (13) を、そして条件 (b) の場合は式 (8), (9), (19) を式 (22) へ代入して、積分を行うと、次式が得られる。

$$\theta_3 \frac{e_1}{t_w} + (1-\nu^2) \left\{ \frac{3}{4} \frac{\theta_5}{t_w^3} q_1 (e_{01} + e_1) \right. \\ \left. + 3 \frac{\theta_7}{t_w^3} q_2 (e_{01} + e_1) + 3 \frac{\theta_8}{t_w^3} q_3 (e_{02} + e_2) \right\}$$

$$- \left( \frac{1+\psi}{2} \frac{e_{01} + e_1}{t_w} + \frac{32}{9\pi^2} \frac{1-\psi}{2} \frac{e_{02} + e_2}{t_w} \right) \\ \cdot \frac{\sigma_0}{\sigma_e} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (23)$$

$$\theta_4 \frac{e_2}{t_w} + (1-\nu^2) \left\{ \frac{3}{4} \frac{\theta_6}{t_w^3} q_2 (e_{02} + e_2) + 3 \frac{\theta_7}{t_w^3} q_1 (e_{02} + e_2) \right. \\ \left. + 3 \frac{\theta_8}{t_w^3} q_3 (e_{01} + e_1) \right\} - \left( \frac{1+\psi}{2} \frac{e_{02} + e_2}{t_w} \right. \\ \left. + \frac{32}{9\pi^2} \frac{1-\psi}{2} \frac{e_{01} + e_1}{t_w} \right) \frac{\sigma_0}{\sigma_e} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (24)$$

ここで、係数  $\theta_3 \sim \theta_8$  は、

$$\theta_3 = \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2, \quad \theta_4 = \left( \frac{b}{a} + 4 \frac{a}{b} \right)^2 \\ \theta_5 = \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \left( \frac{a}{b} \right)^2 - J_1 \\ \theta_6 = \left( \frac{b}{a} \right)^2 + 16 \left( \frac{a}{b} \right)^2 - 16 J_1 \\ \theta_7 = \left( \frac{a}{b} \right)^2 - J_1 \\ \theta_8 = \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{81}{4\theta_1} + \frac{1}{4\theta_2} + \frac{32}{27\pi^2} r_1 - J_2$$

であり、

条件 (a) の場合

$$J_1 = J_2 = 0$$

条件 (b) の場合

$$J_1 = \frac{2}{\pi} \frac{a^3}{b^3} \frac{\cosh(2\pi b/a) - 1}{\sinh(2\pi b/a) + 2\pi b/a} \\ J_2 = -\frac{32}{27\pi^2} r_2 + \frac{16}{\pi} \frac{b}{a} \left( \frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right)^2 \\ \cdot \frac{\cosh(2\pi b/a) + 1}{\sinh(2\pi b/a) - 2\pi b/a}$$

である。式 (23), (24) から  $\sigma_0/\sigma_e$  を消去すると、 $e_1$  と  $e_2$  の関係式が得られる。この式は 4 次式となるので、Ferrari の公式<sup>14)</sup>により、 $e_1$  あるいは  $e_2$  のどちらかについて解くことができる。

## (7) 実験結果との比較

荷重と面外たわみの関係について、本研究の理論解析の結果と Walker の実験結果<sup>8)</sup>の比較を図-3 に示す。

載荷状態は  $\psi=0$  であり、非載荷辺の面内方向の境界条件は、条件 (b) である。Walker が用いた長方形板は、 $a/b=2$  で、載荷方向に 2 半波で変形したので、理論解析では、 $a/b=1$  として計算した。理論解析の面

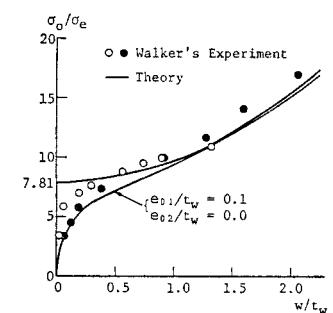


図-3 荷重と面外たわみの関係 ( $\psi=0$ )

## 圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形に関する研究

外たわみは、後述の 3. (3) の結果を考慮して、(0.5a, 0.45b) の位置の付加たわみである。Walker の実験では、板厚の 0.1 倍以下の初期たわみが確認されており、面外たわみが、付加たわみか全たわみか不明である。図から、両結果とも、座屈荷重の付近で、面外たわみが急激に増加することがわかる。

### 3. 圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外 有限変形の基礎特性

(1) 座屈係数と座屈時の  $e_2$  と  $e_1$  の比  $(e_2/e_1)_{cr}$

式(23), (24)において、 $e_{01}$ と $e_{02}$ を0とし、 $e_1$ と $e_2$ の2次以上の項を無視して得られる1次元連立方程式の $e_1$ と $e_2$ の係数が作る行列式の値を0とすれば、座屈係数が得られる。この場合、 $\sigma_0$ を $\sigma_{0\text{cr}}$ とおくと、座屈係数 $k_{\text{cr}}$ は次式のように表わせる。

$$k_{\text{cr}} = \frac{\sigma_{0\text{cr}}}{\sigma_e} = \frac{\frac{1+\psi}{32}(\theta_3 + \theta_4) - \sqrt{\frac{(1+\psi)^2}{1024}(\theta_3 - \theta_4)^2 + \frac{4}{81}\frac{(1-\psi)^2}{\pi^4}\theta_3\theta_4}}{\frac{(1+\psi)^2}{32} - \frac{32}{81}\frac{(1-\psi)^2}{\pi^4}}$$

.....(25)

式(25)は、文献15)のp.376の式(i)に一致する。  
一方、座屈時における $e_2$ と $e_1$ の比 $(e_2/e_1)_{cr}$ は次式で与えられる。

$$\left( \frac{e_2}{e_1} \right)_{\text{cr}} = -\frac{9\pi^2}{64} \frac{1+\phi}{1-\phi} \left( 1 - \frac{\theta_3}{\theta_4} \right) + \sqrt{\frac{81\pi^4}{4096} \left( \frac{1+\phi}{1-\phi} \right)^2 \left( 1 - \frac{\theta_3}{\theta_4} \right)^2 + \frac{\theta_3}{\theta_4}}$$

..... (26)

$\psi$  に対する  $k_{\text{cr}}$  の値および  $(c_2/e_1)_{\text{cr}}$  の値をそれぞれ表-1, 2 に示す。

表-1  $k_{cr}$  の値

表-2  $(e_2/e_1)_{cr}$  の値

$a/b$	0.5	0.75	1.0	$a/b$	0.5	0.75	1.0
$\psi$				$\psi$			
1.0	6.25	4.34	4.0	1.0	.0	.0	.0
0.5	8.26	5.76	5.32	0.5	.075	.035	.022
0.0	11.64	8.37	7.81	0.0	.205	.103	.066
-0.5	17.41	13.76	13.53	-0.5	.403	.242	.169
-1.0	27.76	25.06	27.76	-1.0	.625	.480	.4

(2) 比  $e_2/e_1$  の極限値  $(e_2/e_1)_\infty$

式(23), (24)から  $\sigma_0/\sigma_e$  を消去した式において,  $e_2$  と  $e_1$  の比  $e_2/e_1$  を作成し,  $e_1$  を無限に大きくすると, 次式を満足する極限値  $(e_2/e_1)_{\infty}$  が得られる.

$$\frac{32}{9\pi^2} \theta_6 \frac{1-\psi}{2} \left( \frac{e_2}{e_1} \right)^4 + \{ \theta_6 - 4(\theta_7 + \theta_8) \} \frac{1+\psi}{2} \left( \frac{e_2}{e_1} \right)^3$$

$$-\{\theta_5 - 4(\theta_7 + \theta_8)\} \frac{1+\psi}{2} \left( \frac{e_z}{e_t} \right)_\infty - \frac{32}{9\pi^2} \theta_5 \frac{1-\psi}{2} = 0$$

.....(27)

式(27)の根のうち、実根で、正の最小のものを表-3に示す。このような値が存在することは、荷重が増加すると、面外たわみの形状が、 $\psi$ の値や境界条件に応じて、特定のたわみ形状に収束することを意味している。

表-3  $(e_2/e_1)_{\infty}$  の値

	Condition (a)			Condition (b)		
$\phi/a/b$	0.5	0.75	1.0	0.5	0.75	1.0
1.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
0.5	.065 1	.040 9	.028 9	.073 5	.060 4	.051 6
0.0	.198 4	.122 3	.086 2	.225 9	.180 2	.152 0
-0.5	.566 4	.337 7	.241 3	.643 5	.460 0	.376 2
-1.0	.853 7	.682 6	.585 7	.887 3	.751 5	.664 4

### (3) 最大面外たわみの生ずる位置

最大面外たわみの生ずる位置は、 $\partial(w_0+w)/\partial y=0$  の条件より、次式で与えられる。

$$\frac{y_0}{b} = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left\{ -\frac{\frac{e_{01}}{e_1} + 1}{8 \left( \frac{e_{02}}{e_1} + \frac{e_2}{e_1} \right)} \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{1}{64} \left( \frac{\frac{e_{01}}{e_1} + 1}{\frac{e_{02}}{e_1} + \frac{e_2}{e_1}} \right)^2 + \frac{1}{2}} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

式(26)あるいは式(27)を式(28)へ代入することにより、座屈時あるいは荷重が増加したときの最大面外たわみの生ずる位置  $y_0/b$  を求めることができる。これを表-4に示す。最大面外たわみは、純圧縮を受ける場合に板中央に生じ、純面内曲げを受ける場合には、板中央から板幅の約0.2倍ほど圧縮側の位置に生ずる。そして、圧縮と面内曲げを受ける場合には、両者の位置の

表-4  $y_0/b$  の値

(I) In the case of  $(e_2/e_1)_c$ :

$a/b$	0.5	0.75	1.0
$\phi$			
1.0	.5	.5	.5
0.5	.453 6	.477 4	.485 5
0.0	.394 7	.438 7	.458 8
-0.5	.347 0	.383 0	.408 4
-1.0	.320 4	.335 8	.347 6

(II) In the case of  $(e_2/e_1)\alpha$

	Condition (a)			Condition (b)			
$\phi$	$a/b$	0.5	0.75	1.0	0.5	0.75	1.0
1.0	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5
0.5	.4598	.4743	.4817	.4550	.4625	.4678	
0.0	.3973	.4291	.4478	.3880	.4041	.4155	
-0.5	.3259	.3592	.3833	.3188	.3385	.3518	
-1.0	.3047	.3157	.3240	.3030	.3108	.3171	

中間に生ずる。

(4) 比  $\sigma_{mx}/\sigma_0$  の極限値  $(\sigma_{mx}/\sigma_0)_{\infty}$

条件(a)の場合には式(14)と式(23)から、そして条件(b)の場合にはさらに式(20)を考慮して、比  $\sigma_{mx}/\sigma_0$  を作り、 $e_1/t_w$  を無限に大きくすると、荷重が増加したときの  $\sigma_{mx}$  と  $\sigma_0$  の比  $(\sigma_{mx}/\sigma_0)_{\infty}$  が得られる。後に示す図-5の膜応力分布からわかるように、一般に、 $\sigma_{mx}$  は、条件(a)では点(0, 0)で、そして条件(b)では点  $(a/2, 0)$  で最大になる。したがって、条件(a)については点(0, 0)の  $(\sigma_{mx}/\sigma_0)_{\infty}$  を、そして条件(b)については点  $(a/2, 0)$  の  $(\sigma_{mx}/\sigma_0)_{\infty}$  を次に示す。

条件 (a)

$$-\left(\frac{\sigma_{mx}}{\sigma_0}\right)_\infty = 1 + \left[ \frac{3}{2} \frac{b^2}{a^2} \left\{ 1 + \left( \frac{e_2}{e_1} \right)_\infty^2 \right\} \right. \\ \left. + \left\{ -r_1 + 27 \left( \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \right\} \left( \frac{e_2}{e_1} \right)_\infty \right] \\ \times \frac{\frac{1+\phi}{2} + \frac{32}{9\pi^2} \frac{1-\phi}{2} \left( \frac{e_2}{e_1} \right)_\infty}{\frac{3}{4} \theta_5 + 3(\theta_7 + \theta_8) \left( \frac{e_2}{e_1} \right)_\infty^2}$$

条件 (b)

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{\sigma_{mx}}{\sigma_0} \right)_{\infty} = 1 + \left[ \frac{3}{2} \left\{ \frac{b^2}{a^2} + \frac{\sinh(2\pi b/a) - 2\pi b/a}{\sinh(2\pi b/a) + 2\pi b/a} \right. \right. \\
& + \left( \frac{b^2}{a^2} + 4 \frac{\sinh(2\pi b/a) - 2\pi b/a}{\sinh(2\pi b/a) + 2\pi b/a} \right) \left( \frac{e_2}{e_1} \right)^2 \}_{\infty} \\
& + \left\{ -r_1 - r_2 - 27 \left( \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \right. \\
& + 12 \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \\
& \times \left. \left. \frac{\sinh(2\pi b/a) + 2\pi b/a}{\sinh(2\pi b/a) - 2\pi b/a} \right\} \left( \frac{e_2}{e_1} \right)_{\infty} \right] \\
& \times \frac{\frac{1+\psi}{2} + \frac{32}{9\pi^2} \frac{1-\psi}{2} \left( \frac{e_2}{e_1} \right)_{\infty}}{\frac{3}{4}\theta_5 + 3(\theta_7 + \theta_8) \left( \frac{e_2}{e_1} \right)^2_{\infty}}
\end{aligned}$$

式(27)を式(29)へ代入すると、 $-(\sigma_{mx}/\sigma_0)_\infty$ の値が得られる。これを表-5に示す。

ところで、比  $\sigma_{mx}/\sigma_0$  は、断面平面保持の仮定による圧縮応力に対する、面外変形の影響を考慮した場合の圧縮応力の増大率を表わしている。したがって、極限値

表-5  $-(\sigma_{m,x}/\sigma_0)_{\infty}$  の値

		Condition (a)			Condition (b)		
$a/b$	$\phi$	0.5	0.75	1.0	0.5	0.75	1.0
1.0		2.882	2.519	2.0	3.398	3.673	3.831
0.5		2.606	2.235	1.791	3.127	3.311	3.385
0.0		2.325	1.947	1.582	2.871	2.964	2.953
-0.5		2.001	1.646	1.369	2.575	2.581	2.503
-1.0		1.667	1.377	1.188	2.106	2.086	1.996

$(\sigma_{mx}/\sigma_0)_\infty$  が存在することは、荷重が増加すると、この増大率が、 $\psi$  の値や境界条件に応じて、特定の値に収束することを意味している。

#### 4. 純圧縮を受ける長方形板の面外有限変形

純圧縮を受ける正方形板の面外有限変形に関する既往の理論的研究<sup>6), 7)</sup>では、初期たわみ形状の仮定として、 $y=b/2$  に関して対称のもののみが取り扱われている。しかし、実際の板の初期たわみ形状は、非常に複雑であり、 $y=b/2$  に関して逆対称の形状もその構成成分として考える必要がある。したがって、 $y=b/2$  に関して逆対称の初期たわみ形状が面外有限変形に与える影響について調べる。

最初に、初期たわみとして  $e_{01}$  だけが存在する場合について考える。このとき、式 (24)において  $\psi=1.0$  とおくことにより、次の 2 式が得られる。

または

$$\frac{\theta_4}{1-\nu^2} + \frac{3}{4} \theta_6 \left( \frac{e_2}{t_w} \right)^2 + 3 \theta_7 \frac{e_1^2 + 2 e_{01} e_1}{t_w^2} + 3 \theta_8 \left( \frac{e_1 + e_{01}}{t_w} \right)^2 - \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\sigma_0}{\sigma_e} = 0 \dots (31)$$

式 (30) を式 (23) へ代入すると、次式が得られる。

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_e} = \frac{3}{4} (1 - \nu^2) \theta_5 \frac{e_1^2 + 2e_{01}e_1}{t_w^2} + \theta_3 \frac{e_1}{e_1 + e_{01}} \quad \dots \quad (32)$$

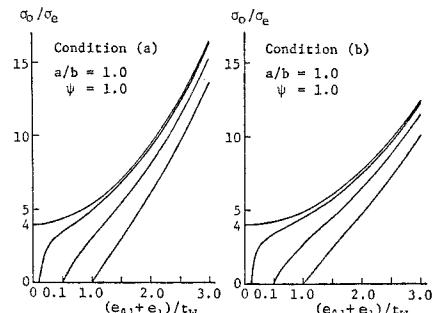


図-4 荷重と面外たわみの関係（純圧縮）

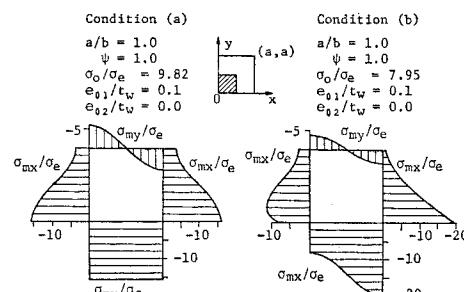


図-5 膜応力分布（純圧縮）

式(32)は、 $a/b=1.0$ のとき、条件(a)と条件(b)に対し、それぞれ文献16)のp.332の式(b)と式(a)に一致する。式(32)が与える荷重と面外たわみの関係および膜応力分布をそれぞれ図-4, 5に示す。

一方、式(23), (31)から $\sigma_0/\sigma_e$ を消去すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{e_2}{t_w}\right)^2 = & -\left\{\frac{\theta_4-\theta_3}{1-\nu^2} + \frac{\theta_3}{1-\nu^2} \frac{e_{01}}{e_1+e_{01}} \right. \\ & + \left(3\theta_7 - \frac{3}{4}\theta_5\right) \frac{e_1^2 + 2e_1e_2}{t_w^2} \\ & \left. + 3\theta_8 \left(\frac{e_1+e_{01}}{t_w}\right)^2\right\} / \left\{\frac{3}{4}\theta_6 - 3(\theta_7+\theta_8)\right\} \quad (33) \end{aligned}$$

式(33)においては、 $a/b=1$ のとき、右辺が負となり、 $e_2/t_w$ は虚数になる。

次に、初期たわみとして $e_{02}$ だけが存在する場合について考える。このとき、式(23)から次の2式が得られる。

$$e_1/t_w = 0 \quad (34)$$

または、

$$\begin{aligned} \frac{\theta_3}{1-\nu^2} + \frac{3}{4}\theta_8 \left(\frac{e_1}{t_w}\right)^2 + 3\theta_7 \frac{e_2^2 + 2e_{02}e_2}{t_w^2} \\ + 3\theta_8 \left(\frac{e_2+e_{02}}{t_w}\right)^2 - \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\sigma_0}{\sigma_e} = 0 \quad (35) \end{aligned}$$

式(34)を式(24)へ代入すると、次式が得られる。

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_e} = \frac{3}{4}(1-\nu^2)\theta_6 \frac{e_2^2 + 2e_{02}e_2}{t_w^2} + \theta_4 \frac{e_2}{e_2+e_{02}} \quad (36)$$

一方、式(24), (35)から $\sigma_0/\sigma_e$ を消去すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{e_1}{t_w}\right)^2 = & \left\{-\frac{\theta_4-\theta_3}{1-\nu^2} + \frac{\theta_4}{1-\nu^2} \frac{e_{02}}{e_2+e_{02}} \right. \\ & - \left(\frac{3}{4}\theta_6 - 3\theta_7\right) \frac{e_2^2 + 2e_{02}e_2}{t_w^2} \\ & \left. + 3\theta_8 \left(\frac{e_2+e_{02}}{t_w}\right)^2\right\} / \left\{-\frac{3}{4}\theta_5 + 3(\theta_7+\theta_8)\right\} \quad (37) \end{aligned}$$

式(36), (37)が与える関係を図-6に示す。最初式

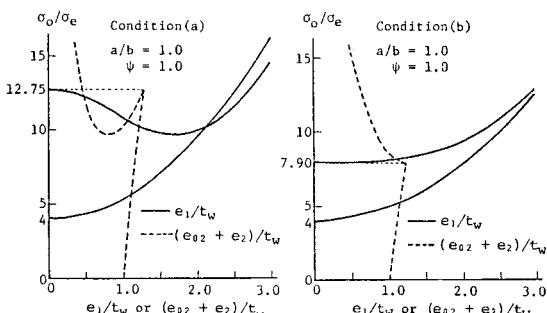


図-6 荷重と面外たわみの関係(純圧縮)

表-6  $(e_2/t_w)_{cr}$  と  $k_{cr}$  の値

$e_{02}/t_w$	Condition (a)		Condition (b)	
	$(e_2/t_w)_{cr}$	$k_{cr}$	$(e_2/t_w)_{cr}$	$k_{cr}$
0.0	.0	4.0	.0	4.0
0.5	.1103	5.94	.1046	4.88
1.0	.2771	12.75	.2565	7.90
1.5	.4800	25.44	.4674	13.77
2.0	.6910	44.03	.7166	22.94

Note :  $a/b=1.0$

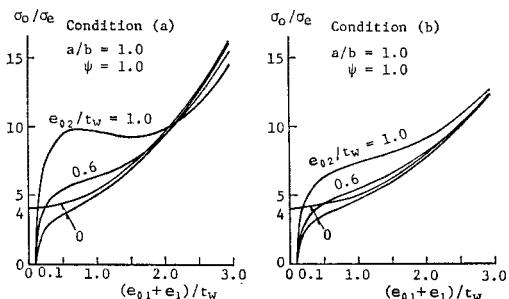


図-7 荷重と面外たわみの関係(純圧縮)

(36)に従って変形し、荷重がある値に到達すると、式(37)が与える変形も生ずる。すなわち分岐座屈が生ずる。 $(e_{02}+e_2)/t_w$ は0に漸近し、 $e_1/t_w$ は、式(32)で $e_{01}/t_w=0$ とした曲線に漸近する。分岐座屈が生ずるときの荷重は、式(37)において $e_1/t_w=0$ とおいた式から $e_2/t_w$ を求め、これを式(36)へ代入することにより求められる。座屈するときの $e_2/t_w$ の値 $(e_2/t_w)_{cr}$ と座屈係数 $k_{cr}$ を表-6に示す。初期たわみ $e_{02}/t_w$ が大きくなると座屈係数も大きくなる。また、座屈係数は、条件(a)の方が条件(b)よりも大きい。

最後に、 $e_{01}$ と $e_{02}$ がともに存在するときの荷重と面外たわみの関係を図-7に示す。初期たわみ $e_{02}/t_w$ は、面外変形 $(e_{01}+e_1)/t_w$ の増加を抑制する効果がある。この効果は、条件(a)の方が条件(b)よりも大きい。

## 5. 純面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形

式(23), (24)から $\sigma_0/\sigma_e$ を消去し、 $\psi=-1.0$ とおいた式は、初期たわみ $e_{01}$ と $e_{02}$ のどちらか一方のみが存在するときには、次のように簡単に表わせる。

$e_{01}$ だけが存在する場合

$$\frac{e_2}{e_1} = \sqrt{-Q_1 + \sqrt{Q_1^2 + Q_2}} \quad (38)$$

ここに、

$$Q_1 = -2\left(\frac{e_{01}}{e_1}\right)^2 \theta_7 + \frac{2}{3}\left(\frac{t_w}{e_1}\right)^2 \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\theta_4}{\theta_6}$$

$$Q_2 = \left(1 + \frac{e_{01}}{e_1}\right) \left\{ \left(1 + 2\frac{e_{01}}{e_1}\right) \left(1 + \frac{e_{01}}{e_1}\right) \frac{\theta_5}{\theta_6} \right\}$$

$$+ \frac{4}{3} \left( \frac{t_w}{e_1} \right)^2 \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\theta_3}{\theta_6} \}$$

$e_{02}$  だけが存在する場合

$$\frac{e_1}{e_2} = \sqrt{-Q_3 + \sqrt{Q_3^2 + Q_4}} \quad \dots \dots \dots (39)$$

ここに、

$$Q_3 = -2 \left( \frac{e_{02}}{e_2} \right)^2 \frac{\theta_7}{\theta_5} + \frac{2}{3} \left( \frac{t_w}{e_2} \right)^2 \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\theta_3}{\theta_5}$$

$$Q_4 = \left( 1 + \frac{e_{02}}{e_2} \right) \left\{ \left( 1 + 2 \frac{e_{02}}{e_2} \right) \left( 1 + \frac{e_{02}}{e_2} \right) \frac{\theta_6}{\theta_5} \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \left( \frac{t_w}{e_2} \right)^2 \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\theta_4}{\theta_5} \right\}$$

$e_{01}$  と  $e_{02}$  がともに存在するときの荷重と面外たわみの関係を図-8 に示す。面外たわみは、最大面外たわみの生ずる位置について述べた 3. (3) の結果を考慮して、点  $(0.5a, 0.3b)$  に生ずるものである。そして、同点の初期たわみが  $w_0/t_w = 0.5$  になるように、 $e_{01}/t_w$  と  $e_{02}/t_w$  の大きさを組み合わせた。条件 (a) の  $e_{01}/t_w = 0.36603$ ,  $e_{02}/t_w = 0.21437$  と条件 (b) の  $e_{01}/t_w = 0.34701$ ,  $e_{02}/t_w = 0.23055$  は、それぞれ  $e_{02}/e_{01} = (e_2/e_1)_\infty$  とした場合に対応する。

面外たわみは、 $e_{02}$  の初期たわみが卓越するほど大きく生ずる。また、面外たわみは、条件 (b) の方が条件 (a) よりも大きく生ずる。特に、条件 (b) で  $a/b=1.0$  のとき、面外たわみの増加が著しい。ところで、純面内曲げを受けるとき、初期たわみがなければ、 $a/b=1.0$  では  $x$  軸方向に 2 半波のモードで座屈する。したがって、初期たわみの  $x$  軸方向のモードに関して、座屈モードと

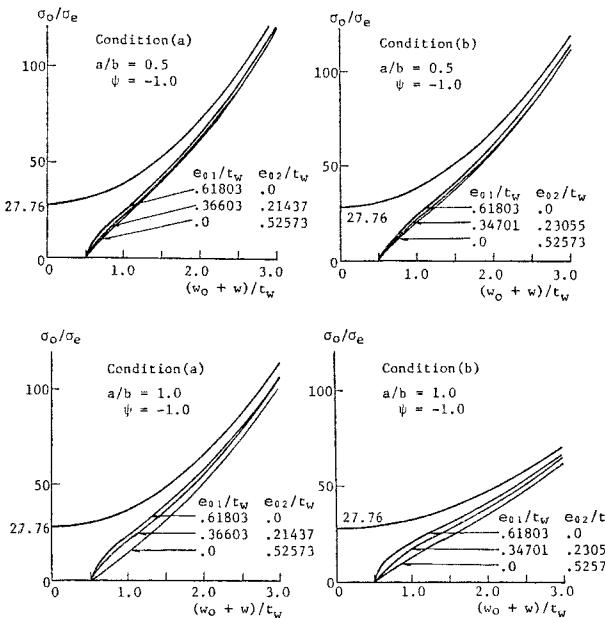


図-8 荷重と面外たわみの関係（純面内曲げ）

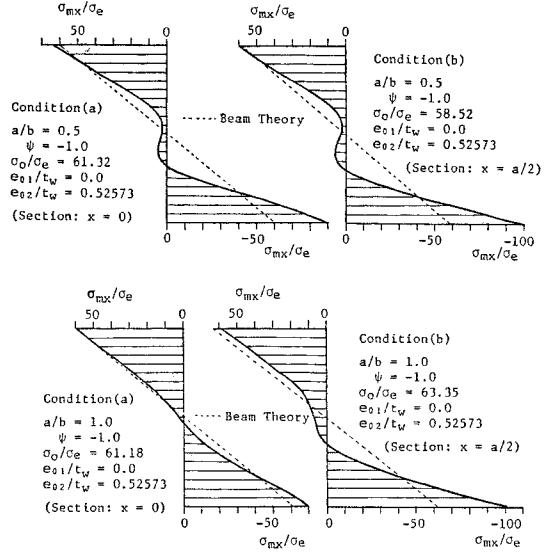


図-9 膜応力分布（純面内曲げ）

異なるモードの方が、座屈モードと同じモードよりも面外たわみを大きく生じさせている。

次に、膜応力  $\sigma_{mx}$  の分布を 図-9 に示す。条件 (a) で  $a/b=1.0$  の場合を除いて、圧縮側に著しい応力欠損が生じている。応力欠損の程度は、棒理論の仮定から来る最外縁の圧縮応力  $\sigma_0$  に対する  $\sigma_{mx}$  の増大率  $\sigma_{mx}/\sigma_0$  で判断することができる。荷重が増加したときの増大率  $(\sigma_{mx}/\sigma_0)_\infty$  が、すでに表-5 に示してある。これによれば、増大率は、条件 (b) で  $a/b=0.5$  のとき最も大きく、

条件 (a) で  $a/b=1.0$  のとき最も小さい。この結果と前述の面外たわみの結果とを比較すると、 $a/b=1.0$  のとき、面外たわみを最も大きく生じさせる、 $x$  軸方向の初期たわみのモードと、応力欠損を最も著しく生じさせる、 $x$  軸方向の初期たわみのモードとが異なっていることがわかる。

## 6. 結論

初期たわみと付加たわみをそれぞれ式 (8), (9) で仮定して、Marguerre の板の微分方程式に Galerkin 法を適用することにより、圧縮と面内曲げを受ける長方形板の荷重と面外たわみの関係が式 (23), (24) で与えられた。式 (23), (24) を変形することにより、以下のことが明らかになった。

(1) 比  $(e_2/e_1)$  は、荷重が増加すると、式 (27) を満足する比  $(e_2/e_1)_\infty$  に収束する。すなわち、荷重が増加すると、面外たわみの形状は、特定のたわみ形状に収束する。

(2) 最大面外たわみは、純圧縮を受ける場合に板中央に生じ、純面内曲げを受ける場合には、板中央から板幅の約0.2倍ほど圧縮側の位置に生ずる。そして、圧縮と面内曲げを受ける場合には、両者の位置の中間に生ずる。

(3) 比 $(\sigma_{mx}/\sigma_0)$ は、荷重が増加すると、式(29)で与えられる比 $(\sigma_{mx}/\sigma_0)_\infty$ に収束する。すなわち、比 $(\sigma_{mx}/\sigma_0)$ は、断面平面保持の仮定による圧縮応力に対する、面外変形の影響を考慮した場合の圧縮応力の増大率を表わしており、この増大率は、荷重が増加すると、特定の値に収束する。

(4) 純圧縮を受ける場合について、次のことが明らかになった。

Ⓐ 初期たわみとして、 $e_{01}$ のみが存在する場合には、式(23)、(24)は簡単化され、荷重と面外たわみの関係は、式(32)で与えられる。

Ⓑ 初期たわみとして、 $e_{02}$ のみが存在する場合には、座屈現象が生ずる。最初、 $e_2$ の面外たわみのみが存在し、荷重が座屈荷重に達すると、 $e_1$ の面外たわみも生ずる。座屈係数は、 $e_{02}$ が大きくなるに従って大きくなる。また、座屈係数は、条件(a)の方が条件(b)よりも大きい。

Ⓒ  $e_{01}$ と $e_{02}$ がともに存在する場合には、 $e_{02}$ が $(e_{01} + e_1)$ の増加を抑制する効果がある。

(5) 純面内曲げを受ける場合について、次のことが明らかになった。

Ⓐ 初期たわみとして、 $e_{01}$ と $e_{02}$ のどちらか一方のみが存在する場合には、式(23)、(24)は簡単化され、それぞれ式(38)、(39)で与えられる。

Ⓑ  $e_{01}$ と $e_{02}$ がともに存在する場合、面外たわみは、 $e_{02}$ が卓越するほど大きく生ずる。

Ⓒ  $a/b=1.0$ のとき、 $x$ 軸方向に半波の初期たわみ形状の方が、座屈モードと同じ2半波のものよりも面外たわみを大きく生じさせる。したがって、 $a/b$ の値によっては、座屈モードと異なるモードの初期たわみ形状の方が面外たわみを大きく生じさせる可能性がある。

著者らは、現在、本研究の解析結果に基づいて、初期たわみ、残留応力、ウェブに対するフランジや補剛材の回転拘束を考慮して、荷重と2次的な面外曲げ応力の関係を定式化しているところである。

最後に、本研究にあたり、当時大阪大学工学部学生の

有安 敬氏（現在、長崎県）にご協力いただいたことを付記し、ここに感謝の意を表わす。

#### 参考文献

- 1) 前田幸雄：プレートガーダーの疲労、JSSC, Vol. 9, No. 86, pp. 32~41, 1973.
- 2) 前田幸雄・大倉一郎：プレートガーダーウェブの初期たわみと疲労亀裂発生の相関に関する研究、土木学会論文報告集、第319号、pp. 1~11, 1982.
- 3) Parsanejad, S. and A. Ostapenko : On the fatigue strength of unsymmetrical steel plate girders, WRC, Bull. No. 156, Nov., 1970.
- 4) 前田幸雄・大倉一郎：水平補剛材を有するプレートガーダーの2次曲げ応力に関する研究、土木学会関西支部年次学術講演会講演概要、I-44, 1980.
- 5) Marguerre, K. : Zur Theorie der gekrümmter Platte grosser Formänderung, Proc. 5th International Congress for Applied Mechanics, Cambridge, pp. 93~101, 1938.
- 6) Coan, J.M. : Large-deflection theory for plates with small initial curvature loaded in edge compression, J. of Appl. Mech., Vol. 18, pp. 143~151, 1951.
- 7) Yamaki, N. : Postbuckling behavior of rectangular plates with small initial curvature loaded in edge compression, J. of Appl. Mech., Vol. 26, pp. 407~414, 1959, and Vol. 27, pp. 335~342, 1960.
- 8) Walker, A.C. : Flat rectangular plates subjected to a linearly-varying edge compressive loading, Thin-Walled Structures, edited by A.H. Chilver, Chatto & Windus, London, pp. 208~247, 1967.
- 9) Rhodes, J. and J.M. Harvey : Examination of plate post-buckling behavior, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 103, No. EM 3, pp. 461~478, June, 1977.
- 10) Maeda, Y., I. Okura and K. Kobashi : Formulation of finite out-of-plane deformation of rectangular plates in compression, Technol. Repts. Osaka Univ., Vol. 31, No. 1624, pp. 333~342, 1981.
- 11) 小橋慶三・前田幸雄・大倉一郎：初期不整を考慮した圧縮板の弾性面外有限変形挙動の定式化、第36回土木学会年次学術講演会講演概要集、I-150, 1981.
- 12) Carlsen, C.A. and J. Czujko : The specification of post-welding distortion tolerances for stiffened plates in compression, The Structural Engineer, Vol. 56 A, No. 5, pp. 133~141, May, 1978.
- 13) 上田幸雄・矢尾哲也・中村和博：溶接初期不整を有する矩形板の圧縮強度に関する研究（第1報）、日本造船学会論文集、第148号、pp. 222~231, 1980.
- 14) 日本数学会：岩波数学辞典第2版、岩波書店、1968.
- 15) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere : Theory of Elastic Stability, Second Edition, McGraw-Hill Book Company Inc., 1961.
- 16) Klöppel, K., R. Schmied and J. Schubert : Die Traglast mittig und außermittig gedrückter dünnwandiger Kastenträger unter Verwendung der nichtlinearen Beultheorie, Der Stahlbau, Vol. 35, H. 11, S. 321~337, 1966.

(1980.11.17・受付)