

係数励振振動系の不安定領域の計算法

A METHOD OF APPROACHING STABILITY OF THE
PARAMETRIC DYNAMIC SYSTEMS

高橋和雄*・米倉真一**

By Kazuo TAKAHASHI and Shin-ichi YONEKURA

1. 緒 言

柱や骨組構造物に周期的変動荷重が作用する場合の安定問題、慣性力や剛性が周期的に変動するメカニズム、脈動流によるパイプの安定性およびタンク内の液体が鉛直方向の振動を受けた場合のスロッシングなどの係数励振不安定問題（動的安定問題）は Mathieu-Hill の方程式に支配される。係数励振不安定問題によって生ずる不安定現象は次の 2 つに分類される。すなわち、励振円振動数 $\theta = 2\omega_i/k$ （ここに、 $\omega_i : i$ 次固有円振動数、 $k=1, 2, \dots$ ）の近傍に生ずる単一の固有振動形をもつ単純（パラメトリック）共振（simple (parametric) resonance）と励振円振動数 $\theta = (\omega_i \pm \omega_j)/k$ （ここに、 $i > j$ 、 $j=1, 2, \dots$ ）の近傍に生ずる 2 個の固有振動形をもつ和形や差形の結合共振（混合共振、combination resonance）である。 $k=1$ の場合が主不安定領域とよばれ、 $k=2, 3$ の場合が副不安定領域とよばれている。

係数励振不安定問題は工学上重要な問題であるために不安定領域の決定法に関する研究はこれまで相当詳しく行われている。しかし、いまだに厳密解というべきものは提案されていない。ほとんどすべての係数励振不安定問題が Hsu の方法¹⁾および Bolotin の方法²⁾に従って解析されている。Hsu の方法は微小パラメータ法である漸近法を用いているために、係数励振成分が小さい場合にのみ成立するものである。Hsu の方法によれば $k=1$ に対応する単純共振および結合共振の主不安定領域が求められるが、 $k \geq 2$ に対応する第 2、第 3 などの副不安定領域は求められない。また、Bolotin は係数励振振動系の不安定振動を詳しく研究のうえ本題の一般解の形を示し、特性方程式から得られる無限項行列式のいくつかの中央の行と列を取って不安定領域の近似解を求めてい

る。Bolotin の方法によって単純共振の主および副不安定領域が得られるが、結合共振は求めることができない。したがって、Hsu の方法および Bolotin の方法による結果はいずれも十分条件を満足するのみで、必要・十分条件を満足するものではない。

以上のような事実から、係数励振振動系の不安定領域の合理的な計算法の確立が望まれるところである。したがって、現在でもなお不安定領域の決定するための研究が続けられている。結合共振の不安定領域の解析に調和バランス法を応用した Szemplińska-Stupnicka の研究³⁾、非減衰系の場合について Bolotin の方法を改善した小寺の研究⁴⁾および Hill の無限項行列式を用いた Lee⁵⁾の研究などがある。

一方、著者らは先にこれらとは別個に連続体の非線形振動を多自由度系の非線形振動に置換して解析する際に振幅の安定判別法として高調波を含む連立の Hill の方程式の解法を提案している⁶⁾。

そこで、本ノートは同じ手法を係数励振振動系の不安定領域の決定に応用した結果を報告するものである。すなわち、2~3 の係数励振振動系の不安定領域の決定に応用した結果および既往理論との比較を報告するものである。

2. 解 法

係数励振不安定問題の微分方程式の次数および係数は柱・帯板などの構造形式、または周期的変動荷重が保存荷重か非保存荷重かによって異なるが、微分方程式の形はいずれの場合も同じなので、ここでは Bolotin によって取り扱われた弾性はりの動的安定問題²⁾を対象に解法を説明する。本題の微分方程式は次のように表わされる。

$$C\ddot{\mathbf{f}} + 2CH\dot{\mathbf{f}} + (I - \alpha A)\mathbf{f} - \varepsilon B \cos \theta t \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \dots \quad (1)$$

* 正会員 工修 長崎大学助教授 工学部土木工学科

** 川鉄工業（株）

ここに, C, H, A, B : 係数行列, I : 単位行列, α : 一定荷重の大きさ, ε : 係数励振振動の荷重振幅, θ : 励振円振動数, f : 一般座標からなる列ベクトル。

式(1)を $f = e^{-Ht}x$ とおいて標準形に直した場合の解を次のように仮定する⁶⁾。

$$x = e^{\lambda t} \left\{ \frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\theta t + b_k \cos k\theta t) \right\} \quad \dots \dots \dots (2)$$

ここに, λ : 未定定数, b_0, a_k, b_k : 時間に無関係な列ベクトル。

式(2)を微分方程式に代入すれば, 次のような b_0, a_k および b_k を求めるための同次方程式が得られる。

$$DX = 0 \dots \dots \dots (3)$$

ここに, D : λ を含む係数行列, $X: b_0, a_k, b_k$ からなる列ベクトル。

式(3)は文献6)の方法によって2倍の大きさの固有値問題に変換することができる。式(3)に含まれるパラメーターである励振円振動数 θ と励振荷重振幅 ε とに対して, 算定された固有値の実数部から減衰係数を引いた値がすべて負ならば安定, 逆に1つでも正ならば flutter 形の不安定という Liapunov の安定性の定義を用いて, 直接系の安定・不安定を検討することができる⁶⁾。

3. 2自由度系の Mathieu の方程式

(1) Szemplińska-Stupnicka の問題³⁾

Szemplińska-Stupnicka は調和バランス法を用いて結合共振を解析するために, 次の係数励振振動モデルを考えた。

$$C\ddot{f} + D\dot{f} + Ef + F \cos \theta f = 0 \dots \dots \dots (4)$$

ここに,

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \\ F &= \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

文献3)と同様に, 式(4)の係数 $\omega_1^2=0.5, \omega_2^2=1.5, \beta_{11}=\beta_{22}=0.1, \beta_{12}=\beta_{21}=0.0$ とした場合に行列 F の要素 $\lambda_{ij}(i, j=1, 2)$ をパラメーターに次の2ケースについて安定判別を行う。

case a): 直接項の係数 $\lambda_{11}=\lambda_{22}=0.4$ (一定), 連成項の係数 $\lambda_{12}=\lambda_{21}$ パラメーター

case b): 連成項の係数 $\lambda_{12}=\lambda_{21}=0.4$ (一定), 直接項の係数 $\lambda_{11}=\lambda_{22}$ パラメーター

case a) および case b) に対して励振円振動数 θ と係数励振パラメーター $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}(i, j=1, 2)$ に対する安定判別図を求めれば, Fig. 1 および 2 に示すとおりである。斜線部が flutter 形の振動が生ずる不安定領域で

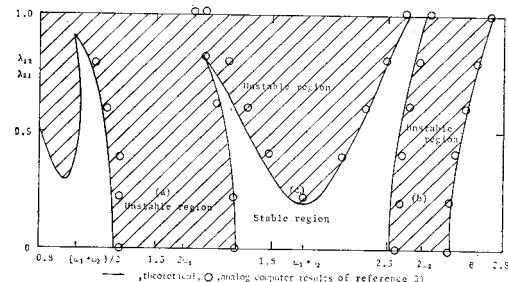


Fig. 1 Instability regions of simple (a), (b) and combination (c) resonances: $\lambda_{11}=\lambda_{22}=0.4$.

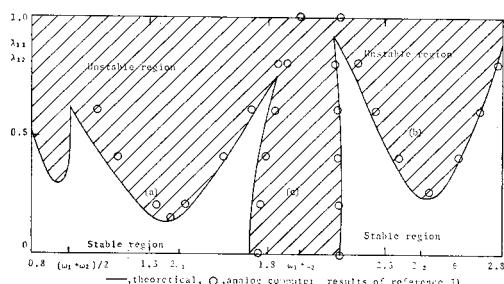


Fig. 2 Instability regions of simple (a), (b) and combination (c) resonances: $\lambda_{12}=\lambda_{21}=0.4$.

ある。図のように $2\omega_1=1.41$ および $2\omega_2=2.45$ 付近に生ずる各単純共振の主不安定領域のほかに, $\omega_1+\omega_2=1.93$ および $(\omega_1+\omega_2)/2=0.965$ 付近に生ずる結合共振の主および副不安定領域が得られている。

以上のように本法によれば, 単純および結合共振の主および副不安定領域が同時に得られることが確認される。すなわち, 本法の解は必要十分条件を満足するものである。Fig. 1 および 2 の結果は, 式(2)の Fourier 級数の収束解である。解の収束は級数の項数 n を 1, 2, 3... と順次変化させた場合の不安定領域の変動を系統的に調べることによって判定することができる。本安定判別の収束はきわめて速く, 3項($n=3$)で十分である。

文献3)においては同じ問題に対する analog computer による simulation 計算が行われ, 安定・不安定の境界線が示されている。この結果をプロットすれば, Fig. 1, 2 の中の○印に示すとおりである。本法により安定判別結果と simulation 結果とを比較すると両者はよく合致している。

文献3)の調和バランス法による結果と本法による結果を比較したところ, ほぼ同程度の解が得られているが, 調和バランス法による解析では $\theta=0.965$ 付近の結合共振の副不安定領域が得られていない。この原因は調和バランス法による解析においては高次の不安定領域の影響を考慮することができないことによるものである。また, 調和バランス法の解では単純共振か結合共振かの対象ごとに解を仮定のうえ, 非線形連立代数方程式を解

く必要がある。これに対して本研究の方法では定式化が統一的でかつ行列の固有値解析によって計算することができる利点をもつ。

文献 3) の analog computer による simulation 結果によれば、結合共振の境界線の振動波形はうなりを伴っている。Bolotin の方法²⁾は境界線が周期振動することを前提としているためにうなりを伴ったかかる結合共振の境界線を得ることができないものと考えられる。これに対して、本安定判別法の基本式は式(2)のように $e^{i\omega t}\phi(t)$ のように指数関数の項と周期解のみとを同時に含み、かつ λ の虚数部は零以外の値をもつために、これらの一つと周期解 $\phi(t)$ がうなりを発生させるから、境界線がうなりを伴う結合共振の場合にも適用可能である。

(2) Bolotin の問題²⁾

はりの動的安定問題を曲げ y とねじり φ の 2 自由度系と考えた場合の運動方程式の一般形は式(1)のように与えられる。式(1)を無次元化すれば次式が得られる(定式化については、文献 2) の pp. 333~344、不安定領域の決定法については文献 2) の pp. 221~225 参照)。

$$\omega^2 I \ddot{x} + (K - D)x + F \cos \tau x = 0 \dots \dots \dots (5)$$

ここに、

$$K = \begin{bmatrix} r & -r\mu \\ -\mu & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \sqrt{r}h^2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -2r\varepsilon \\ -2\varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

x : 曲げとねじりの各自由度に関する一般座標からなる列ベクトル, $\bar{\omega}^2 = \theta^2/\omega_2^2$, $r = (\omega_1/\omega_2)^2$, ω_1, ω_2 : 系の 1 次(曲げ), 2 次(ねじり)の固有円振動数, h : 減衰定数, μ : 一定荷重の大きさ。

$r=0.1$ および $\mu=0.5$ に対して、載荷後における系の無次元固有円振動数はそれぞれ $\omega_1=0.270$, $\omega_2=1.013$ のように与えられる。

減衰のない場合($h=0.0$)と減衰のある場合($h=0.03$)の 2 ケースについて、励振円振動数 $\bar{\omega}$ と励振荷重強度 ε をパラメーターに不安定領域を求めれば Fig. 3 のような安定判別図が得られる。

図より明らかなように肉太の実線でプロットされた減衰のない場合には、 $2\omega_2$, $2\omega_2/2$, $2\omega_2/3$ 付近の 2 次振動の単純共振の主・副不安定領域および $2\omega_1$, $2\omega_1/2$ 付近の 1 次振動の主・副不安定領域が得られている。また、 $\omega_1+\omega_2$, $(\omega_1+\omega_2)/2$ 付近には和形の結合共振の主・副不安定領域が得られている。次に、これらの不安定領域の幅に注目すれば、結合共振の主不安定領域は単純共振のそれよりも広いことおよび 2 次振動の第 2 不安定領域が対応する主不安定領域よりも広いことがわかる。したがって、本題に対してすべてのケースをカバーすること

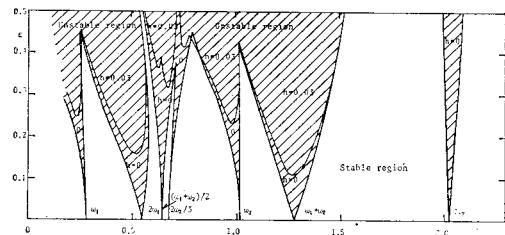


Fig. 3 Regions of parametric instability for coupled Mathieu equations.

が無理な Bolotin の方法もしくは Hsu の方法のいずれか一方のみを用いて不安定領域を求めるることは不可能である。

Fig. 3 には減衰のある場合($h=0.03$)の不安定領域の境界線が細い実線を用いてプロットされている。図のように、減衰力の存在は励振荷重 ε が小さい領域の不安定領域を安定領域に変える。また、減衰力の影響は不安定領域の狭い領域に対して顕著に効いてくる。本例では $2\omega_2$ 付近の 2 次の主不安定領域は $\varepsilon > 0.5$ の領域で存在するため、図ではすべて安定領域となっている。

4. 3 自由度系の Mathieu の方程式

保存周期的変動軸力および従動周期的変動軸力を自由端に受ける片持ち柱の係数励振不安定問題を 3 自由度系と仮定すれば、一般座標に対する運動方程式は次のとおりである(定式化および具体的な数値については、文献 2) の pp. 283~287 参照)。

$$C\ddot{f} + (I - P_0 A - P_t B \cos \theta t)f = 0 \dots \dots \dots (6)$$

ここに、 C, A, B : 3 行 3 列の係数行列, I : 3 行 3 列の単位行列, P_0 : 一定の保存軸力, P_t : 従動変動荷重の振幅。

ここで、保存荷重は荷重の作用方向が常に一定である場合を意味し、従動荷重は荷重の作用方向が自由端で弾性曲線の接線方向に常に保つ場合を意味する(文献 2) の p. 283 参照)。

上式を $\bar{\omega} = \theta/\omega_1$, $\alpha = P_0/P_{cr}$ および $\varepsilon = P_t/P_{cr}$ (ここに, ω_1 : 1 次固有円振動数, P_{cr} : 保存軸力による座屈荷重) のように無次元化のうえ、一定軸力 $\alpha=0$ の場合の励振円振動数 $\bar{\omega}$ と励振荷重振幅 ε に対する安定判別結果を求めれば、Fig. 4 および 5 に示すとおりである。Fig. 4 および 5 は保存および従動荷重の場合をそれぞれ示すものである。図中に示した記号 ω_1, ω_2 および ω_3 は 1, 2 および 3 次の無次元固有円振動数である。Fig. 4, 5 から明らかのように、本例では $2\omega_1$, $2\omega_1/2$, $2\omega_2$, $2\omega_2/2$ のような $2\omega_i/k$ 付近に生ずる単純共振の主・副不安定領域のほかに、 $\omega_1+\omega_2$, $(\omega_1+\omega_2)/2$, $\omega_1+\omega_3$, $(\omega_1+\omega_3)/2$, ..., $(\omega_1+\omega_j)/k$ のような $(\omega_i+\omega_j)/k$ 付近に生ずる和形の結

合共振の主・副不安定領域ならびに $\omega_2 - \omega_1$, $(\omega_2 - \omega_1)/2 \dots$ のような $(\omega_i - \omega_j)/k$ ($i > j$) 付近に生ずる差形の結合共振の主・副不安定領域が得られている。Fig. 4, 5 の比較から明らかのように不安定領域は保存荷重の場合の方が従動荷重の場合よりもかなり広く（物理的意味については文献 2) の p. 287 参照）。かつ、生ずる不安定現象の種類も多い。また、負荷形式によっても生ずる現象が異なる。すなわち、保存荷重の場合には和形の結合共振の不安定領域のみが現われ、差形の結合共振の不安定領域は現われない。一方、従動荷重の場合には差形の結合共振の不安定領域が現われ、和形の結合共振の不安定領域は現われにくく。

5. 結 語

本ノートは係数励振不安定問題に著者らの提案した安定判別法を応用するとともに 2~3 の係数励振不安定問題について解の精度および有用性を検討したものである。得られた結果を要約すると次のとおりである。

(1) 本法によれば係数励振不安定問題の単純共振および結合共振の主不安定領域および副不安定領域を同時に決定することができる。すなわち、本法による解は必要十分条件を満足するものである。また、本法による安定判別結果は analog computer による simulation 結果とよく一致する。

(2) 係数励振不安定問題の不安定領域の決定法として通常用いられている Bolotin の方法および Hsu の方法と比較すると本法は次の特徴をもつ。Bolotin の方法は単純共振の不安定領域にのみ適用可能であるが、本法は結合共振の不安定領域を決定することができる。また、Hsu の方法は漸近法を用いているために係数励振の項が小さいときにのみ有効であるが、本法は係数励振の項が大きい場合にも適用可能である。Bolotin の方法および Hsu の方法はいずれも十分条件のみを満足するために、対象によって適宜使い分けることが必要であるが、本法によればすべての不安定領域を同時に決定することが可能である。

以上によって本法が係数励振不安定問題の不安定領域の決定法として既往研究の不備を補う有力な方法であることが立証された。最後に本研究の一部は昭和 55 年度の文部省科研費によったことを記して謝意を表するものである。なお、本ノートの full paper および一般化に

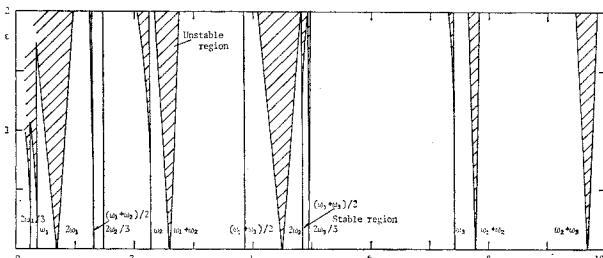


Fig. 4 Regions of parametric instability for a clamped-free beam subjected to a periodic loading (Conservative load, initial axial force $\alpha=0$).

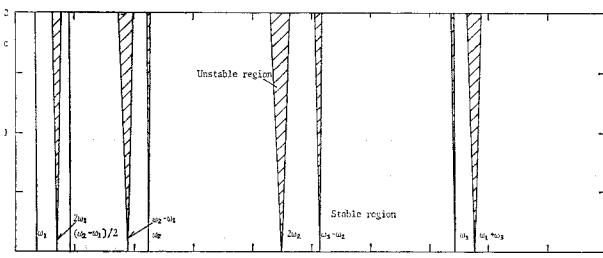


Fig. 5 Regions of parametric instability for a clamped-free beam subjected to a periodic loading (Nonconservative load, initial axial force $\alpha=0$).

については文献 7), 8) を参照されたい。

参 考 文 献

- 1) Hsu, C.H. : On the Parametric Excitation of Dynamic Systems Having Multiple Degrees of Freedom, Journal of Applied Mechanics, Vol. 30, pp. 363~372, 1963.
- 2) Bolotin, V.V. : The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day, San Francisco, 1964.
- 3) Szmelińska-Stupnicka, W. : The Generalized Harmonic Balance Method for Determining the Combination Resonance in the Parametric System, Journal of Sound and Vibration, Vol. 58, No. 3, pp. 347~361, 1978.
- 4) 小寺：係数励振系の不安定域の新しい求め方，日本機械学会論文集(C編)，45巻，395号，pp. 747~753，1979。
- 5) Lee, T.C. : A Study of Coupled Mathieu Equations by Use of Infinite Determinants, Journal of Applied Mechanics, Vol. 43, pp. 349~352, 1976.
- 6) 高橋・河原・山辺：はりおよび薄板の非線形振動の Galerkin 法による解の収束性および安定性について，土木学会論文報告集，第 283 号，pp. 9~22，1980 年 1 月。
- 7) Takahashi, K. : An Approach to Investigate the Instability of the Multiple-Degree-of-Freedom Parametric Dynamic Systems, Journal of Sound and Vibration, Vol. 78, pp. 519~529, 1981.
- 8) Takahashi, K. : Further Results of Instability of Parametric Dynamic Systems Including Different Dampings, Journal of Sound and Vibration, 1982(to appear).

(1981.3.16・受付)