

## 断面変形を考慮した薄肉開き断面曲線部材の解析

DISTORTION OF CURVED THIN-WALLED  
OPEN-CROSS-SECTION MEMBERS

高橋 邦 弘\*・米 子 明 伸\*\*・水 野 正 夫\*\*\*

By Kunihiro TAKAHASHI, Akinobu YONAGO and Masao MIZUNO

## 1. ま え が き

薄肉断面の曲線部材が曲げを受けると断面が偏平化し、古典はり理論で扱える範囲を超えることは、1910年に Bantlin<sup>1)</sup> が実験的に見出して以来多くの研究が行われてきた。von Kármán<sup>2)</sup>, Timoshenko<sup>3)</sup> に代表されるエネルギー法によるもの、Clerk・Reissner<sup>4)</sup>, 中村<sup>5)</sup> による殻理論を応用したものなどがあり、多くは円管を対象としているものの、断面変形による曲げ剛性の低下が顕著であるという結果が得られている。この剛性の低下は微小変形領域においても生ずるものである。この現象を薄肉はり理論の立場から、一次元化された形で表現しようとするのが本論文の一つの目的である。

薄肉断面部材の一次元理論において曲線部材を取り扱う手法はすでに体系化されているといえよう<sup>6)~10)</sup>。しかしながら、これらの理論は断面変形 (distortion) が生じないという前提に立っている。一方、直線部材に関しては断面変形のそり関数も含めて検討が行われている<sup>11), 12)</sup>。さらに空間曲線棒の断面変形を扱ったもの<sup>13)</sup>があるが、断面変形のそりを考慮していない。

本論文ではまず断面変形を考慮した薄肉曲線部材についての一次元理論を、ねじり、曲げ、軸力も考慮して導出する。その特殊ケースとして上述の曲げ荷重時の挙動を取り扱うことにする。すでに得られている断面変形の考え方を使用するため、部材は開き断面に限った。また複雑な断面についても計算が可能と思われるが、最も簡単な場合について計算式をたて、特徴を見やすくすることを目標とした。そのため後述するような簡単な部材に限って検討を進める。

なお、部材を構成する母線間の曲率の差異を考慮する

ことにし、古典的な曲がりばりの効果を含めることにする。しかしながら仮定をひずみ場に集結せず、変位場を妥当と思われる形に仮定している。さらに模型による実験を行い、理論との対比を行った。

## 2. 薄肉開き断面の断面変形

折板からなる薄肉開き断面の断面変形には、次の2種類の変形が考えられる。第一に折板の各節点とその相対位置を変えるような変形、つまり図-1 (a) の実線のような変形である。このとき、構成板のうち、板の面内変位成分をもつものが必ず存在することが特徴である。もちろんそれに付随する面外への曲げ変位も併存する。第二の断面変形は図-1 (b) のごとく折板の節点が相対移動しない断面変形、つまり部材の各構成板の、その面外への曲げ変位のみにより生ずるような断面変形である。構成板の面内変位の有無により断面変形を2種類に分けた理由は、板の面内変位の剛性が面外変位の剛性よりはるかに高いからである。

そもそも断面変形に対応する一般化力は、断面変形のバイモーメントとよばれる一組のつり合った力の系である。この力は Saint-Venant の原理によって局部的な影響しか及ぼさないことが推測される。ところが薄肉断面部材の場合には、この影響が局部的にとどまらず遠くに

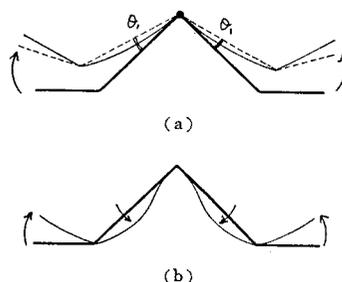


図-1 断面変形の例

\* 正会員 工博 慶応義塾大学専任講師 理工学部機械工学科

\*\* 工修 三菱重工業(株)

\*\*\* 工博 慶応義塾大学教授 理工学部機械工学科

まで及ぶ。しかも上述の第1種の断面変形(図-1(a))に関してだけ影響が遠くに及び、第2種の断面変形(図-1(b))については Saint-Venant の原理がほぼ適用できて、その影響は局部的となる。直線部材についてはしたがって、第1種の断面変形のみを扱っている<sup>(1),(2)</sup>。曲線部材に関しても上述の事情は変わらないが、しかし曲線部材の断面変形は直線部材の場合と異なり、曲げ変形と強く連成する。このことは断面の曲率半径方向の変位(つまり断面変形)が、曲げによるひずみと同じ方向である軸方向ひずみを生ずることから明らかである。したがってこの連成は断面変形の第1種、第2種の区別を問わない。このことから曲線部材を扱うときには第1種、第2種両方の断面変形を考慮する必要がある。

第1種の断面変形の自由度は、図-1(a)のごとく、一つの折れ点(●印)のみがヒンジとなって断面変形する場合を一つの自由度と考える。両端点(図-2の0,4点)の隣りの折れ点(1,3点)がヒンジと考えた場合の変形は、端のフランジだけが面外変位すると考え、第1種の断面変形とは考えない。両端点がヒンジと考えた場合は純粹のねじりとなる。

### 3. 対象モデル

本論文で対象とするモデルは、曲率面内に対称軸をもつ一軸対称一様断面で、折板の数を4とする。このとき第1種の断面変形の自由度は1となる。このときの面内変位は中央の折れ点をヒンジと考えた場合の、その左右の断面部分の剛体回転(図-1(a)の破線)により生ずる。後述するように直交化させるために断面に剛体並進変位を与え、断面左右部分の回転中心を対称軸に関して左右対称な位置に分離して移動させる。このとき、回転した左右の断面が離れたり重なったりしないように、ヒンジと考えた折れ点と、この2つの回転中心は一直線上に存在しなければならない。この回転中心を断面変形のせん断中心とよぶ。その位置は部材軸線の曲率の関数である。せん断中心の座標の求め方はその概要を後述する。第2種の断面変形については変形を仮定することでこれも一自由度にとどめる。この場合、仮定した変形は節点での角度が変形前後で不変なように選ぶ必要がある。このことと、上述の2つの回転中心と折れ点を一直線上に置くことにより、折れ点での変位の連続性は保たれる。板厚  $t$  は一定とする。

### 4. 変位、ひずみおよび応力場

図-2のごとくに座標系をとる。いずれも右手系である。  $x, y$  軸の原点は曲げの中立点であり、両軸は断面

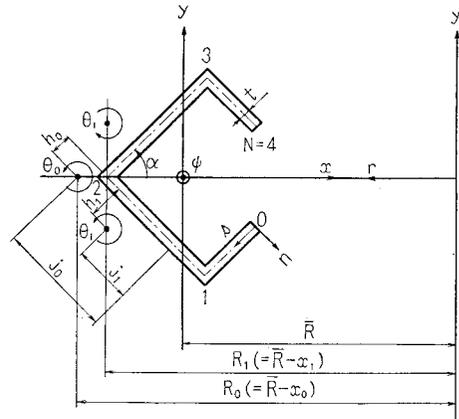
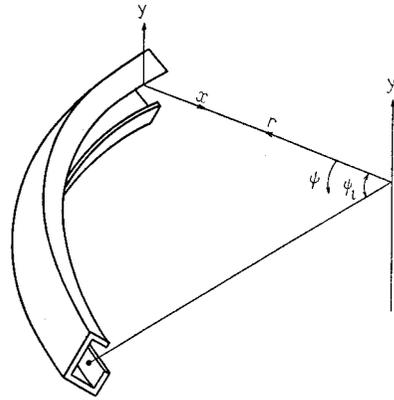


図-2 座標系

主軸となっている。  $s, n, \phi$  方向の変位成分を、  $u, v, w$  とする。断面内のある一点における断面の接線および法線とせん断中心との距離を  $h_i, j_i$  ( $i=0, 1$ ) とする。以下添字が0のときはねじり、1のときは第1種断面変形に関する量を表わすことにする。符号はともに  $\theta_i$  が正のとき  $u, v$  が正になる場合を正とする。  $\theta_i$  の正の向きは図に示す。  $\bar{R}, R_0, R_1$  はそれぞれ中立軸、ねじりのせん断中心軸、断面変形のせん断中心軸の曲率半径である。板厚中央線の接線が  $x$  軸となす角を  $\alpha$  とする。

さて変位は次式で表わされると仮定する。

$$u(s, n, \phi) = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha + \sum_{i=0}^1 \theta_i (h_i - \alpha_i n) + u_{\theta_1} + u_{\lambda} \dots \dots \dots (1)$$

$$v(s, \phi) = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha + \sum_{i=0}^1 \theta_i j_i + \theta_{1\nu} + \lambda (\kappa_{ev} + \kappa_{od}) \dots \dots \dots (2)$$

$$w(s, n, \phi) = \zeta - \xi' x - \eta' y + \sum_{i=0}^1 \hat{\theta}_i' \phi_i + w_{\theta_1} + w_{\lambda} \dots \dots \dots (3)$$

以下にこの式を説明する。この式は下記の変位の要因の重ね合わせで表わされている。

- ①  $x$  方向の剛体変位  $\xi(\phi)$

- ②  $y$  方向の剛体変位  $\eta(\psi)$
- ③  $\psi$  方向への中立点の変位  $\zeta(\psi)$
- ④ ねじりのせん断中心回りの回転  $\theta_0(\psi)$
- ⑤ 節点が相対移動する断面変形(第1種の断面変形)
  - a) 断面変形のせん断中心回りの回転  $\theta_1(\psi)$
  - b) 付随する面外曲げによる付加変位  $u_{\theta_1}, v_{\theta_1}, w_{\theta_1}$
- ⑥ 節点が相対移動しない断面変形(第2種の断面変形). すなわち各構成板の面外曲げによる変位  $u_2, v_2, w_2$ .

上記のうち、各構成板の  $n$  方向変位のうちの  $v_{\theta_1}, v_2$  は以下のように考えた。いま、円弧曲線部材を考えているのであるから、曲率半径方向の広がりも考慮して、文献 12) と同じように  $R_0 d\psi = 1$  となるような角度幅のラーメンを考える。各構成板の面外曲げ剛性を長手方向について無視すれば、このラーメンに生ずる曲げモーメントは  $\theta_1(\psi)M_1(s)$  で表わされる。 $M_1(s)$  は  $\theta_1(\psi) = 1 \text{ rad}$  のときに各ラーメン部材に生ずる曲げモーメントである。回転  $\theta_1$  は節点 1, 2, 3 の変位だけで与えるため端末 (0, 4) では変位に条件を与えていない。したがって両端の構成板(節点 0-1, 3-4)では  $M_1(s)$  は零である。 $M_1(s)$  の分布がわかれば  $\theta_1 = 1$  のときの板厚中央線の  $n$  方向変位も求まる。この値を  $\mu(s)$  とおくことにより  $v_{\theta_1}$  は式 (2) では次式で与えてある。

$$v_{\theta_1} = \theta_1(\psi)\mu(s) \dots\dots\dots (4)$$

なお、このラーメンの断面二次モーメント  $I$  は、薄肉の仮定により曲率の板厚方向変化が無視できることから次のようになる。

$$I = \int_{-t/2}^{t/2} (r/R_0)n^2 dn = (r/R_0)(t^3/12) \dots\dots\dots (5)$$

一方、 $v_2$  は 図-1 (b) の変形であるが次のようにおいた。

$$v_2(\psi, s) = \lambda(\psi)\kappa(s) \dots\dots\dots (6)$$

ただし  $\kappa(s)$  は式 (2) では偶関数  $\kappa_{ev}(s)$  と奇関数  $\kappa_{od}(s)$  との和として表わした。本来は  $\kappa(s)$  を完備な無限級数でおけば精密に変位成分を表現できるのであるが、本論文では断面形状と荷重条件を考慮して、適当な 1 種類の三角関数で仮定することとする。なお  $\kappa(s)$  は定義から各折れ点で零である。なお曲げ、ねじり、断面変形に関して、板厚に一樣分布するせん断ひずみは無視している。このことは従来のはり理論のせん断変形無視の仮定に対応する。

なお  $\alpha_i$  は、

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = \begin{cases} 1 & (y < 0) \\ -1 & (y \geq 0) \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

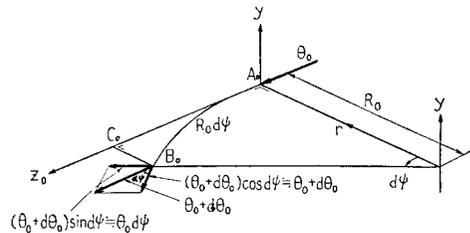
を意味する。また  $(x_i, y_i)$  はせん断中心の  $x, y$  座標であるが、一軸対称であるから  $y_0 = 0$  であり、また断面変形のせん断中心の  $y$  座標値  $y_1$  は 2 つ存在するが、

その絶対値はともに等しい。

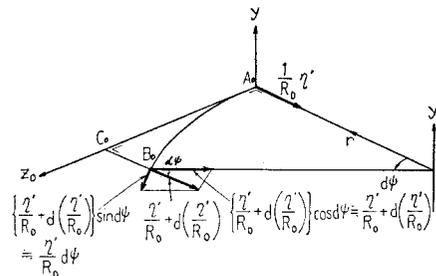
また、式 (3) の  $\xi'(\psi)$  は  $y$  軸回りの断面回転角であり、 $\xi' = (1/R_0)(\xi' + \zeta)$ 、 $\eta'(\psi)$  は  $x$  軸回りの断面回転角で  $\eta' = (1/R_0)\eta'$  である。ダッシュ (') は  $\psi$  に関する微係数を示す。また、式 (3) の右辺第 4 項のうち、 $\hat{\theta}'_0(\psi)\varphi_0(s, n)$  はねじりによるそり (warping) で、Saint-Venant のねじり理論に対応する変位場であり、 $\hat{\theta}'_1(\psi)\varphi_1(s, n)$  は断面変形によるそりで、ねじりの変位場と類似した形にとってある。 $\varphi_i$  は単位そり関数である。また  $\hat{\theta}'_0, \hat{\theta}'_1$  はそれぞれねじり率、断面変形率であり、以下のようにして求めることができる。

図-3 (a)~(c) はねじりのせん断中心軸を取り上げ、各軸回りの回転角をベクトルで表わしたものである。この図より基準点  $A_0$  から  $R_0 d\psi$  離れた  $B_0$  点におけるせん断中心軸の接線回りの回転角変化は  $d\theta_0 + (1/R_0)\eta' d\psi$  である。この回転角のせん断中心軸方向の変化がねじり率であるから上式を  $R_0 d\psi$  で除すと次のようになる。

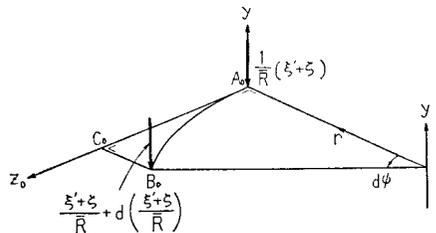
$$\hat{\theta}'_0 = (1/R_0)\{\theta'_0 + (1/R_0)\eta'\} \dots\dots\dots (8)$$



(a)  $z_0$  軸回りの回転 (回転角:  $\theta_0$ )



(b)  $r$  軸回りの回転 (回転角:  $\frac{\eta'}{R_0}$ )



(c)  $y$  軸回りの回転 (回転角:  $\frac{\xi'+\zeta}{R}$ )

図-3  $\hat{\theta}'_0$  の決定

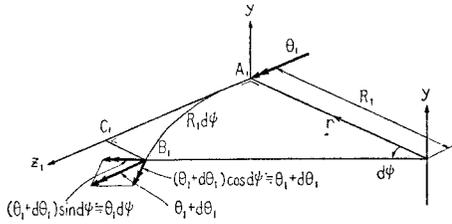


図4  $\hat{\theta}_1'$  の決定 ( $z_1$  軸回りの回転, 回転角:  $\theta_1$ )

次に図4は断面変形のせん断中心軸を取り上げ回転角  $\theta_1$  をベクトルで表わしたものであるが、断面変形の場合図3(b)のような回転角のベクトル成分の影響はない。よって  $B_1$  点におけるせん断中心軸の接線回りの回転角は  $d\theta_1$  である。よってこれを  $R_1 d\psi$  で除すと次のようになる。

$$\hat{\theta}_1' = \theta_1' / R_1 \dots\dots\dots (9)$$

次に図2の座標系に対し、微小変位理論における任意点のひずみ変位関係式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \epsilon_n = \frac{\partial v}{\partial n} \\ \epsilon_\psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \psi} - \frac{1}{r} (u \cos \alpha - v \sin \alpha) \\ \tau_{sn} &= \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial s} \\ \tau_{n\psi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \psi} + r \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{w}{r} \right) \\ \tau_{\psi s} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \psi} + r \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{w}{r} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (10)$$

ここで、添字付きの  $\epsilon$  は垂直ひずみ、 $r$  はせん断ひずみである。これらの式に式(1)~(3)の各変位場を代入すると、各ひずみは若干の検討の結果、以下のようになる。

$$\epsilon_s = \partial(u_{\theta_1} + u_s) / \partial s = \{ \theta_1 M_1 / (EI) \} n - \lambda (\ddot{\kappa}_{ev} + \ddot{\kappa}_{od}) n \dots\dots\dots (11)$$

$$\epsilon_n = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$\epsilon_\psi = \frac{1}{r} \left[ (-\xi + \zeta') - \xi'' x - \eta'' y + \sum_{i=0}^1 \hat{\theta}_i'' \varphi_i + \sum_{i=0}^1 \alpha_i (y - y_i) \theta_i + \{ \theta_i \mu + \lambda (\kappa_{ev} + \kappa_{od}) \} \sin \alpha \right] \dots\dots\dots (13)$$

$$\tau_{sn} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$\tau_{n\psi} = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^1 \left\{ \frac{R_i}{r} j_i + r \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\varphi_i}{r} \right) \right\} \hat{\theta}_i' \dots\dots\dots (15)$$

$$\tau_{\psi s} = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^1 \left\{ \frac{R_i}{r} (h_i - \alpha_i n) + r \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\varphi_i}{r} \right) \right\} \hat{\theta}_i' \dots\dots\dots (16)$$

なおドット (  $\dot{\phantom{x}}$  ) は  $s$  に関する微係数を表す。ここで各構成板の面外曲げのみによる各方向のせん断ひずみは折板構造理論で通常行われるように無視し、 $\epsilon_\psi$  に関しては  $s$  方向変位 ( $u_{\theta_1} + u_s$ ) によるひずみを  $n$  方向変位 ( $v_{\theta_1} + v_s$ ) によるひずみに対して無視した。

さらに次の仮定をおく。

$$\tau_{n\psi} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

$n=0$  で、

$$\tau_{\psi s} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

式(17),(18)を式(15),(16)に代入すると次式が得られる。

$$\frac{\varphi_i}{r} = -R_i \int_0^s \frac{1}{r^2} h_i ds - \frac{R_i}{r^2} j_i n + \frac{1}{R_i} \varphi_{i0} \dots\dots (19)$$

式(19)において曲げねじり理論同様、 $\varphi_i(s, n)$  を  $\varphi_i(s, 0)$  で代表しても誤差は少ない。また同式第1項の積分の下限を  $s = s_{oi}$  で  $\varphi_i(s, 0) = 0$  になるような点  $s_{oi}$  にとると、積分定数  $\varphi_{i0} / R_i$  は消える。したがって単位そり関数  $\varphi_i$  は次のようになる。

$$\varphi_i(s) = -R_i r \int_{s_{oi}}^s \frac{1}{r^2} h_i ds \dots\dots\dots (20)$$

$$d \left( \frac{\varphi_i}{r} \right) = - \frac{R_i}{r^2} h_i ds \dots\dots\dots (21)$$

式(18)において、 $\tau_{\psi s}$  は従来行われてきたようにねじりによるもの ( $i=0$ ) だけを考える。すなわち、式(19)を式(16)に代入して、

$$\tau_{\psi s} = - \frac{R_0^2}{r^2} 2 n \hat{\theta}_0' \dots\dots\dots (22)$$

応力はポアソン比を無視すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= E \epsilon_s, \quad \sigma_n = 0, \quad \sigma_\psi = E \epsilon_\psi \\ \tau_{sn} &= 0, \quad \tau_{n\psi} = 0, \quad \tau_{\psi s} = G r_{\psi s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 $E, G$  は縦弾性係数、横弾性係数である。また、 $\tau_{\psi s}$  はねじりモーメントにより板厚方向に直線的に変化するせん断応力であるが、このほかに  $\sigma_\psi$  とつり合うべき板厚内一様分布のせん断応力が存在する。

### 5. 基礎式および境界条件

部材の有するひずみエネルギーの変分  $\delta V$  は次式で表わされる。

$$\delta V = \frac{1}{2} \delta \int_{\psi} \int_n \int_s (E \epsilon_s^2 + E \epsilon_\psi^2 + G r_{\psi s}^2) r ds dn d\psi \dots\dots\dots (24)$$

一方、部材の板厚中央面の単位面積当たり作用する表面力として  $s, n, \psi$  方向に  $q_s, q_n, p$  が加わるとし、部材両端面 ( $\psi=0, \psi_e$ ) に加わる板厚中央線の単位  $s$  方向長さ当たり作用する外力として  $F_{qs}, F_{qn}, F_p$  を考える。外力の仮想仕事  $\delta W$  は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{\psi} \int_s q_s \delta u r ds d\psi + \int_{\psi} \int_s q_n \delta v r ds d\psi \\ &+ \int_{\psi} \int_s p \delta w r ds d\psi + \int_{(\psi=\psi_e)} F_{qs} \delta u ds + \int_{(\psi=\psi_e)} F_{qn} \delta v ds \\ &+ \int_{(\psi=\psi_e)} F_p \delta w ds - \int_{(\psi=0)} F_{qs} \delta u ds - \int_{(\psi=0)} F_{qn} \delta v ds \\ &- \int_{(\psi=0)} F_p \delta w ds \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

式 (24) に 4. で求めた各ひずみ場, 式 (25) に各変位場を代入し, それらを仮想仕事の原理  $\delta(V-W)=0$  に代入し Euler の方程式を求めて変形していくと, 各仮想変位に対して次式が得られる. 基礎式として,  $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta, \delta\theta_0, \delta\theta_1, \delta\lambda$  のおのおのに対して,

$$\frac{EI_y}{R^3 R_0} (\xi^{IV} + \zeta''') - \frac{EF}{R R_0} (-\xi + \zeta') - \frac{E}{R R_0} \left( \frac{2I_{xy}{}^{[2]}}{R} + \frac{I_{x\mu}}{R_1} \right) \theta_1'' - \frac{E}{R_0} \left( \frac{F}{R} \rho_d + \frac{S_\mu}{R_1} \right) \theta_1 - \frac{EI_{x\kappa ev}}{R^2 R_0} \lambda'' - \frac{ES_{\kappa ev}}{R R_0} \lambda - f_x + \frac{m_y'}{R_0} = 0 \dots\dots\dots(26)$$

$$\frac{EI_x}{R R_0^2} \left( \frac{\eta^{IV}}{R_0} - \theta_0'' \right) + \frac{EI_{\varphi_0}}{R_0^3} \left( \theta_0^{IV} + \frac{\eta^{IV}}{R_0} \right) - \frac{GJ_{00}}{R_0^3} \left( \theta_0'' + \frac{\eta''}{R_0} \right) + \frac{E}{R_0^2} \left( \frac{I_{\varphi_0 \kappa od}}{R_0^2} - \frac{I_{y \kappa od}}{R} \right) \lambda'' - f_y - \frac{\bar{R}}{R_0^2} m_x' + \frac{p_0'}{R_0^2} = 0 \dots\dots\dots(27)$$

$$\frac{EF}{R^2} (-\xi' + \zeta'') + \frac{EI_y}{R^4} (\xi'''' + \zeta'') + \left\{ \frac{E}{R} \left( \frac{F}{R} \rho_d + \frac{S_\mu}{R_1} \right) - \frac{E}{R^2} \left( \frac{2I_{xy}{}^{[2]}}{R} + \frac{I_{x\mu}}{R_1} \right) \right\} \theta_1' + \frac{E}{R^2} \left( S_{\kappa ev} - \frac{I_{x\kappa ev}}{R} \right) \lambda' + f_\phi + \frac{m_y}{R} = 0 \dots\dots\dots(28)$$

$$\frac{EI_{\varphi_0}}{R_0^4} \left( \theta_0^{IV} + \frac{\eta^{IV}}{R_0} \right) - \frac{GJ_{00}}{R_0^2} \left( \theta_0'' + \frac{\eta''}{R_0} \right) - \frac{EI_x}{R R_0} \left( \frac{\eta''}{R_0} - \theta_0 \right) + \frac{EI_{\varphi_0 \kappa od}}{R_0^3} \lambda'' + \frac{EI_{y \kappa od}}{R R_0} \lambda - q_0 + \frac{p_0'}{R_0} = 0 \dots\dots\dots(29)$$

$$\frac{EI_{\varphi_1}}{R_1^4} \theta_1^{IV} + \frac{2E}{R_1^3} (2I_{y\varphi_1}{}^{[2]} + I_{\varphi_1\mu}) \theta_1'' + \left( M_{11} + \frac{EF}{R R_1} y d^2 + \frac{2ES_\mu}{R_1^2} \rho_{d\mu} + \frac{EI_\mu}{R_1^2} \right) \theta_1 + \frac{E}{R_1} \left( \frac{F}{R} \rho_d + \frac{S_\mu}{R_1} \right) (-\xi + \zeta') - \frac{E}{R R_1} \left( \frac{2I_{xy}{}^{[2]}}{R} + \frac{I_{x\mu}}{R_1} \right) (\xi'' + \zeta') + \frac{EI_{\varphi_1 \kappa ev}}{R_1^3} \lambda'' + \left( \frac{ES_{\kappa ev}}{R R_1} \rho_{d\kappa} + \frac{EI_{\mu \kappa ev}}{R_1^2} \right) \lambda - q_1 + q_\mu + \frac{p_1'}{R_1} = 0 \dots\dots\dots(30)$$

$$\left\{ (M_{\kappa ev} + M_{\kappa od}) + \frac{E}{R R_1} (I_{\kappa ev} + I_{\kappa od}) \right\} \lambda + \frac{ES_{\kappa ev}}{R R_1} (-\xi + \zeta') - \frac{EI_{x\kappa ev}}{R^2 R_1} (\xi'' + \zeta') - \frac{EI_{y \kappa od}}{R R_1} \left( \frac{\eta''}{R_0} - \theta_0 \right) + \frac{EI_{\varphi_1 \kappa ev}}{R_1^3} \theta_1'' + \left( \frac{ES_{\kappa ev}}{R R_1} \rho_{d\kappa} + \frac{EI_{\mu \kappa ev}}{R_1^2} \right) \theta_1 + \frac{\bar{R}}{R_1} q_\kappa = 0 \dots\dots\dots(31)$$

$\phi=0, \phi_e$  における境界条件として,

$$\left\{ \frac{EI_y}{R^2} (\xi'' + \zeta') - E \left( \frac{2I_{xy}{}^{[2]}}{R} + \frac{I_{x\mu}}{R_1} \right) \theta_1 - \frac{EI_{x\kappa ev}}{R} \lambda - M_y \right\} \delta\xi' = 0 \dots\dots\dots(32)$$

$$\left\{ -\frac{EI_y}{R^3} (\xi'''' + \zeta'') + \frac{E}{R} \left( \frac{2I_{xy}{}^{[2]}}{R} + \frac{I_{x\mu}}{R_1} \right) \theta_1' + \frac{EI_{x\kappa ev}}{R^2} \lambda' - m_y - F_x \right\} \delta\xi = 0 \dots\dots\dots(33)$$

$$\left\{ \frac{EI_x}{R} \left( \frac{\eta''}{R_0} - \theta_0 \right) - \frac{EI_{y \kappa od}}{R} \lambda + M_x \right\} \delta\eta' = 0 \dots\dots\dots(34)$$

$$\left\{ -\frac{EI_x}{R R_0} \left( \frac{\eta''}{R_0} - \theta_0 \right) - \frac{EI_{\varphi_0}}{R_0^4} \left( \theta_0'' + \frac{\eta''}{R_0} \right) + \frac{GJ_{00}}{R_0^2} \left( \theta_0' + \frac{\eta'}{R_0} \right) - \frac{E}{R_0} \left( \frac{I_{\varphi_0 \kappa od}}{R_0^2} - \frac{I_{y \kappa od}}{R} \right) \lambda' + \frac{\bar{R}}{R_0} m_x - F_y - \frac{p_0'}{R_0} \right\} \delta\eta = 0 \dots\dots\dots(35)$$

$$\left\{ \frac{EF}{R} (-\xi + \zeta') + E \left( \frac{F}{R} \rho_d + \frac{S_\mu}{R_1} \right) \theta_1 + \frac{ES_{\kappa ev}}{R} \lambda - F_\phi \right\} \delta\zeta = 0 \dots\dots\dots(36)$$

$$\left\{ \frac{EI_{\varphi_0}}{R_0^2} \left( \theta_0'' + \frac{\eta''}{R_0} \right) + \frac{EI_{\varphi_0 \kappa od}}{R_0} \lambda - F_{p_0} \right\} \delta\theta_0' = 0 \dots\dots\dots(37)$$

$$\left\{ -\frac{EI_{\varphi_0}}{R_0^3} \left( \theta_0'' + \frac{\eta''}{R_0} \right) + \frac{GJ_{00}}{R_0} \left( \theta_0' + \frac{\eta'}{R_0} \right) - \frac{EI_{\varphi_0 \kappa od}}{R_0^2} \lambda' - p_0 - F_{q_0} \right\} \delta\theta_0 = 0 \dots\dots\dots(38)$$

$$\left\{ \frac{EI_{\varphi_1}}{R_1^2} \theta_1'' + \frac{E}{R_1} (2I_{y\varphi_1}{}^{[2]} + I_{\varphi_1\mu}) \theta_1 + \frac{EI_{\varphi_1 \kappa ev}}{R_1} \lambda - F_{p_1} \right\} \delta\theta_1' = 0 \dots\dots\dots(39)$$

$$\left\{ -\frac{EI_{\varphi_1}}{R_1^3} \theta_1'' - \frac{E}{R_1^2} (2I_{y\varphi_1}{}^{[2]} + I_{\varphi_1\mu}) \theta_1' - \frac{EI_{\varphi_1 \kappa ev}}{R_1^2} \lambda' - p_1 - F_{q_1} - F_{q_\mu} \right\} \delta\theta_1 = 0 \dots\dots\dots(40)$$

$$F_{q_\kappa} \delta\lambda = 0 \dots\dots\dots(41)$$

上の計算中  $x, y, \varphi_0, \varphi_1$  は  $1/r$  を重み関数とする直交関数系をなしているとした.  $(^N)$  は  $\phi$  に関する四階の導関数を示す.

上記の基礎式および境界条件の各式は,  $\bar{R}d\phi=R_0d\phi=R_1d\phi=dz, \bar{R}, R_0, R_1 \rightarrow \infty$  とし  $\lambda$  を無視すると一自由度断面変形を考慮した場合の薄肉直線部材の式<sup>12)</sup>に一致する. また断面変形に関する項, すなわち  $\theta_1$  と  $\lambda$  の項だけを無視すると薄肉曲線部材に関する従来の曲げねじり理論の式<sup>9)</sup>に一致する.

部材の形状と材質を与えると求まる定数は以下のように定義した。

$$\begin{aligned}
 y_d^2 &= (I_x - 4\alpha_1 y_1 S_x^{[2]}) / F + y_1^2 \\
 \rho_d &= 2S_x^{[2]} / F - \alpha_1 y_1, \quad \rho_{d\mu} = 2I_{y\mu}^{[2]} / S_\mu - \alpha_1 y_1 \\
 \rho_{dc} &= 2I_{y\kappa ev}^{[2]} / S_{\kappa ev} - \alpha_1 y_1 \\
 F &= \int_n \int_s \frac{\bar{R}}{r} dsdn, \quad I_y = \int_n \int_s \frac{\bar{R}}{r} x^2 dsdn \\
 I_x &= \int_n \int_s \frac{\bar{R}}{r} y^2 dsdn, \quad I_{\varphi_0} = \int_n \int_s \frac{R_0}{r} \varphi_0^2 dsdn \\
 I_{\varphi_1} &= \int_n \int_s \frac{R_1}{r} \varphi_1^2 dsdn \\
 I_\mu &= \int_n \int_s \frac{R_1}{r} \mu^2 \sin^2 \alpha dsdn \\
 I_{\kappa ev} &= \int_n \int_s \frac{\bar{R}}{r} \kappa_{ev}^2 \sin^2 \alpha dsdn \\
 I_{\kappa_0 d} &= \int_n \int_s \frac{\bar{R}}{r} \kappa_{0d}^2 \sin^2 \alpha dsdn \\
 I_{x\mu} &= \int_n \int_s \frac{R_1}{r} x\mu \sin \alpha dsdn \\
 I_{x\kappa ev} &= \int_n \int_s \frac{\bar{R}}{r} x\kappa_{ev} \sin \alpha dsdn \\
 I_{y\kappa_0 d} &= \int_n \int_s \frac{\bar{R}}{r} y\kappa_{0d} \sin \alpha dsdn \\
 I_{\varphi_0 \kappa_0 d} &= \int_n \int_s \frac{R_0}{r} \varphi_0 \kappa_{0d} \sin \alpha dsdn \\
 I_{\varphi_1 \mu} &= \int_n \int_s \frac{R_1}{r} \varphi_1 \mu \sin \alpha dsdn \\
 I_{\varphi_1 \kappa ev} &= \int_n \int_s \frac{R_1}{r} \varphi_1 \kappa_{ev} \sin \alpha dsdn \\
 I_{\mu \kappa ev} &= \int_n \int_s \frac{R_1}{r} \mu \kappa_{ev} \sin^2 \alpha dsdn \\
 S_\mu &= \int_n \int_s \frac{R_1}{r} \mu \sin \alpha dsdn \\
 S_{\kappa ev} &= \int_n \int_s \frac{\bar{R}}{r} \kappa_{ev} \sin \alpha dsdn \\
 S_x^{[2]} &= \int_n \int_{[0]}^{[2]} \frac{\bar{R}}{r} y dsdn \\
 I_{xy}^{[2]} &= \int_n \int_{[0]}^{[2]} \frac{\bar{R}}{r} xy dsdn \\
 I_{y\varphi_1}^{[2]} &= \int_n \int_{[0]}^{[2]} \frac{R_1}{r} y\varphi_1 dsdn \\
 I_{y\mu}^{[2]} &= \int_n \int_{[0]}^{[2]} \frac{R_1}{r} y\mu \sin \alpha dsdn \\
 I_{y\kappa ev}^{[2]} &= \int_n \int_{[0]}^{[2]} \frac{\bar{R}}{r} y\kappa_{ev} \sin \alpha dsdn \\
 M_{1\kappa ev} &= - \int_s M_1 \dot{\kappa}_{ev} ds, \quad M_{11} = \int_s \frac{M_1^2}{EI} ds \\
 M_{\kappa ev} &= \int_s EI \dot{\kappa}_{ev}^2 ds, \quad M_{\kappa_0 d} = \int_s EI \dot{\kappa}_{0d}^2 ds \\
 J_{00} &= \frac{t^3}{3} \int_s \frac{R_0^3}{r^3} ds
 \end{aligned}$$

.....(42)

$F$  は断面積、添字付きの  $S$  は一次モーメント、添字付

きの  $I$  は二次および相乗モーメントを表わす。なお、 $\int_{[0]}^{[2]}$  は断面の折れ点 0 から 2 までの積分を表わす。 $J_{00}$  は Saint-Venant のねじり定数である。

バイモーメントを含む外力の合力を次式で定義した。

$$\begin{aligned}
 f_x &= \int_n \int_s \frac{r}{R_0} (q_s \cos \alpha - q_n \sin \alpha) dsdn \\
 f_y &= \int_n \int_s \frac{r}{R_0} (q_s \sin \alpha + q_n \cos \alpha) dsdn \\
 f_\phi &= \int_n \int_s \frac{r}{R} p dsdn, \quad m_x = \int_n \int_s \frac{r}{R} p y dsdn \\
 m_y &= - \int_n \int_s \frac{r}{R} p x dsdn \\
 F_x &= \int_n \int_s (F_{qs} \cos \alpha - F_{qn} \sin \alpha) dsdn \\
 F_y &= \int_n \int_s (F_{qs} \sin \alpha + F_{qn} \cos \alpha) dsdn \\
 F_\phi &= \int_n \int_s F_p dsdn, \quad M_x = \int_n \int_s F_p y dsdn \\
 M_y &= - \int_n \int_s F_p x dsdn \\
 q_i &= \int_n \int_s \frac{r}{R_i} (q_s h_i + q_n j_i) dsdn \\
 p_i &= \int_n \int_s \frac{r}{R_i} p \varphi_i dsdn, \quad q_\mu = \int_n \int_s \frac{r}{R_1} q_n \mu dsdn \\
 q_\kappa &= \int_n \int_s \frac{r}{R} q_n (\kappa_{ev} + \kappa_{0d}) dsdn \\
 F_{qi} &= \int_n \int_s (F_{qs} h_i + F_{qn} j_i) dsdn \\
 F_{pi} &= \int_n \int_s F_p \varphi_i dsdn, \quad F_{q\mu} = \int_n \int_s F_{qn} \mu dsdn \\
 F_{q\kappa} &= \int_n \int_s F_{qn} (\kappa_{ev} + \kappa_{0d}) dsdn, \quad (i=0, 1)
 \end{aligned}$$

.....(43)

### 6. 断面変形のせん断中心

5. の計算過程では  $x, y, \varphi_0, \varphi_1$  の直交性を前提としてきた。したがって  $\varphi_1$  は以下の直交条件を満たしていなければならない。

$$\left. \begin{aligned}
 \int_F \frac{1}{r} \varphi_1 dF &= 0, \quad \int_F \frac{1}{r} \varphi_1 y dF = 0 \\
 \int_F \frac{1}{r} \varphi_1 x dF &= 0, \quad \int_F \frac{1}{r} \varphi_1 \varphi_0 dF = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

この式の意味は以下のように考えられる。まず  $x$  なる分布をもつ (曲げの) 軸方向応力による曲げモーメントが、1 なる断面内分布をもつ軸圧縮力と連成しないように中立軸が決められていることは周知のことである。また、拘束ねじりの軸方向応力によるバイモーメントとこれらの力が連成しないようにねじりのせん断中心が決められている。これらのことは 1,  $x, y, \varphi_0$  を直交化する

ことに対応している。したがって式(44)の直交条件も、断面変形のバイモーメントが他の合力と連成しないようにする条件式であり、この式から断面変形のせん断中心位置が求まる。その位置は部材の曲率半径の関数でもあるから、直線部材の場合とは異なっている。

### 7. 負荷条件が簡単な場合

以前から数多く取り扱われてきた円弧部材の曲率面内一様曲げの場合を考えてみよう。この場合基礎式(26)~(31)の項がかなり簡略化され変数を消去していくと次式のごとく  $\theta_1$  に関する四階の常微分方程式が得られる。

$$\theta_1^{IV} + a\theta_1'' + b^2\theta_1 + eM_y/\bar{R} = 0 \dots \dots \dots (45)$$

ここで、 $a, b, e$  は部材の形状および弾性定数を与えるとき求める定数である。これらの定数、他の基礎式および境界条件は補遺に述べる。直線部材の場合は  $a=e=0$  となり弾性床上的のはりの式と同形になる。その物理的意味は文献11)で述べたごとく、第1種の断面変形を引き起こす分布バイモーメントが一つのフランジに対する分布横荷重に対応し、 $\theta_1$  がはりの横たわみに対応するからであった。上式の曲線部材に対しても同様に考えられるのでさらに弾性床上的のはりとして考えていく。曲線部材としたために新たに付け加わった第2, 4項は、部材の曲率による分布横荷重と考えられる。部材の曲率により分布横荷重が生ずることは、部材の接線方向の力が曲率によって法線方向に分力をもつことから明らかであろう。このことが曲線部材において断面変形を考慮する必要性の基本的な理由である。第4項は曲げモーメントなどにより部材全長にわたり等しい曲率変化が生じた際の分布力の項で、第2項はその等曲率からずれた曲率による分布横荷重項である(もちろん、これは弾性床上的のはりのアナロジーを拡張したものであるから、一つのフランジに対しての分布横荷重ということになるので、実際の断面ではこれらは断面内でつり合って、断面変形のバイモーメントを形成している)。こう考えると曲線部材の場合に  $\theta_1''$  の項と定数項が付け加わることが了解できる。薄肉円管の曲線部材を扱った文献4)によれば、 $\theta_1^{IV}, \theta_1''', \theta_1'', \theta_1', \theta_1$  などに 関する項が全部出た常微分方程式が式(45)に対応して得られているが、ここで扱ったような場合には、上記の物理的意味を考えれば、 $\theta_1''', \theta_1'$  の項の影響は少ないと考えられる。

式(45)はねじりを受ける弾性床上的のはりの薄肉部材の式と同形である。解は容易に求まるが、応用に際してその解の形の詳細なとりまとめはたとえば文献6)の3章5節などを参考にすると有用であろう。

さらに式(45)は横分布荷重と軸圧縮力を受ける弾性

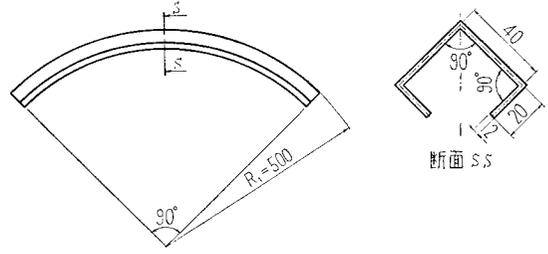


図-5 計算モデル

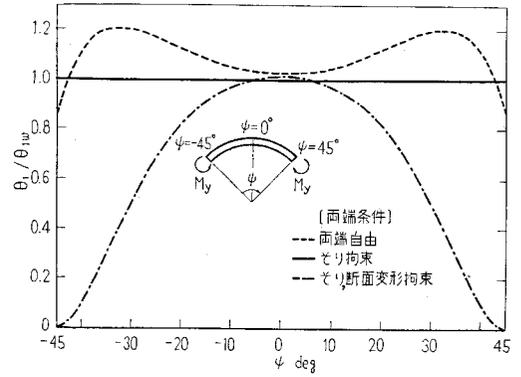


図-6  $\theta_1$  の軸方向分布 (計算値)

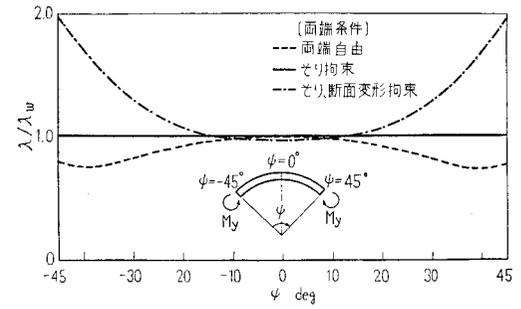


図-7  $\lambda$  の軸方向分布 (計算値)

床上的のはりの式と同形である。

図-5のモデルに曲率面内の一様曲げモーメントを加えた場合について数値計算を行った。結果を図-6, 7に示す。図-6は第1種の断面変形  $\theta_1(\psi)$  を、両端でそりだけを拘束したときの第1種断面変形  $\theta_{1w}(\psi)$  で無次元化したものである。注意すべきは両端自由で一様曲げモーメントを加えても軸方向に一樣な状態にはないことである。断面変形のそりを拘束し、断面変形自体は拘束しないという境界条件において初めて部材全長にわたり一樣な応力状態になる。このことは物理的に考えてみれば当然ではあるが、断面変形を考慮する際に独特のことである。

図-7は第2種の断面変形  $\lambda(\psi)$  をやはり両端でそりのみ拘束したときの第2種の断面変形  $\lambda_w(\psi)$  で無次元化したものである。これら2つの図より  $\theta_1(\psi)$  と  $\lambda(\psi)$

が相補っていることがわかる。計算では  $\kappa$  を  $\cos$  関数で近似した。

また前述したように、古くから断面変形の影響で曲げ剛性が小さくなるという指摘がなされている。上述のモデルで両端でそりだけ拘束した場合につき計算すると、約  $1/1.74$  に剛性が低下することになる。やはり大きな影響があることがわかる。ここで、 $\theta_1 = \lambda = 0$  の場合の曲率の変化を 1 とした。この 1 に対し  $\theta_1$  による曲率の変化の増加分は 0.7410 であり、 $\lambda$  による増加分はわずか 0.0016 にすぎなかった。

次に部材が軸線の曲率面外へだけの変形をするような荷重条件を考える。この条件は  $F_y$  などの荷重によるものである。このとき式(26)~(31)において  $\xi = \zeta = \theta_1 = 0$  となる。すなわち第 1 種の断面変形  $\theta_1(\psi)$  は生じない。一方、第 2 種の断面変形  $\lambda(\psi)\kappa_{od}(s)$  は生ずると思われる。同様な荷重条件での円管の断面は  $45^\circ$  方向につぶれた楕円状の形に変形するが、本論文で扱うような開き断面では様相が若干異なっている。

### 8. 実験値と理論値の比較

アクリル樹脂を材料として作製した模型を用い、実験を行った。モデルは図-5 に示す数値計算と同じ形状のものを用いた。

#### (1) 曲率面内の変形

部材両端面でそりと断面変形を拘束し、端面の中立点を結ぶ線上に 1.5 kgf (14.7 N) の荷重を相反する方向に加えた。図-8 に  $\epsilon_s$  の軸方向分布、図-9 に  $\epsilon_\psi$  の軸方向分布を示す。ひずみ測定にはプラスチック用ゲージを用いた。なおアクリル材の縦弾性係数は、実測によれば  $3.2 \times 10^3$  kgf/mm<sup>2</sup> (3.1 GPa) であった。

#### (2) 曲率面外の変形

両端面でそりと断面変形を拘束し、一端を固定し他端の曲げの中立点に曲率面に垂直に 0.1 kgf (0.98 N) の荷重を加えた。この場合計算では  $\theta_1$  は零となる。またマイクロメータで測定した節点 0, 1 間の距離の変化量を  $\Delta l$  とし 図-10 に示す。  $\Delta l$  は  $\theta_1$  に比例しているはずであるが、図に示すごとく  $\Delta l$  は微小である。

以上、実験値と理論値は比較的良好一致しているといえよう。

### 9. 結 論

薄肉開き断面を有する円弧曲線部材について一自由度断面変形を考慮した解析を行った。

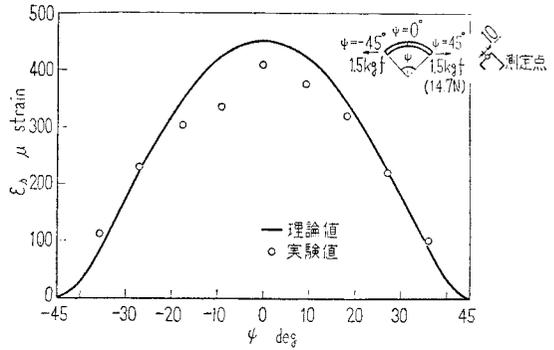


図-8  $\epsilon_s$  の軸方向分布 (断面変形を考えなければ生じない)

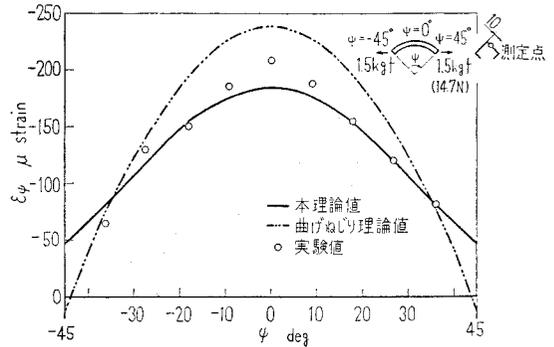


図-9  $\epsilon_\psi$  の軸方向分布

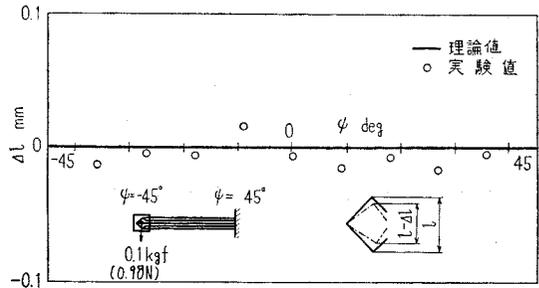


図-10  $\Delta l$  の軸方向分布

(1) 基礎方程式として四階の連立常微分方程式が得られた。従来の薄肉曲線部材に対する曲げねじり理論の式、および薄肉直線部材に対する一自由度断面変形を考慮した式の両方をその中に含んでいる。

(2) その特殊ケースとして、古くより研究されてきた曲率面内の曲げによる断面変形に対し、簡単な四階の常微分方程式が得られた。

(3) 薄肉曲線部材に関する断面変形のせん断中心の位置が新しく定義された。

(4) 実験値と理論値は比較的良好一致した。

本研究は簡単な断面形状に関するものであるが、断面形状に応じて第 1 種および第 2 種の断面変形の自由度を

増やして本論文と同様の手法を用いれば、任意の開き断面を有する部材に対し、より精密な解析を行うことができよう。

終わりに、実験および数値計算にご協力いただいた木谷裕一、木下潤一両氏に感謝の意を表する次第である。

補 遺

曲率面内一様曲げの場合の基礎式については式 (45) に  $\theta_1$  に関してのみ記述した。その他の変数に関する基礎式を式 (26)~(31) より導き以下に示す。曲率面内曲げであるから  $\eta, \theta_0$  は無関係となる。

$$\lambda = -\frac{S}{U_1}\theta_1'' - \frac{T_1}{U_1}\theta_1 + \frac{K}{RAU_1}M_y \dots\dots\dots(A.1)$$

$$\xi'' + \xi = \left(\frac{D}{A} + \frac{H}{B}\right)\theta_1 - \left(\frac{K}{A} + \frac{L}{B}\right)\lambda + \frac{1}{RA}M_y \dots\dots\dots(A.2)$$

$$\zeta''' + \zeta' = -\frac{H}{B}\theta_1'' + \frac{D}{A}\theta_1 - \frac{L}{B}\lambda'' - \frac{K}{A}\lambda + \frac{1}{RA}M_y \dots\dots\dots(A.3)$$

式 (45) の解を  $\theta_1$  に代入して順次計算していけば求められる。式中の係数は後で定義する。

次に  $\psi=0, \psi_l$  における境界条件は以下ようになる。

a) 拘束なし

$$\left. \begin{aligned} N_2\theta_1'' + P_2\theta_1 + \frac{KS}{RAU_1}M_y &= 0 \\ N_2\theta_1''' + P_2\theta_1' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(A.4)$$

b) そりを拘束

$$\left. \begin{aligned} \theta_1' &= 0 \\ N_2\theta_1''' + P_2\theta_1' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(A.5)$$

c) そりと断面変形を拘束

$$\left. \begin{aligned} \theta_1' &= 0 \\ \theta_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(A.6)$$

以上の式中の係数は次式で定義され、部材の材質、形状を与えるとき定まる量である。

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{EI_y}{R^3}, B = \frac{EF}{R}, D = \frac{E}{R} \left( \frac{2I_{xy}^{[2]}}{R} + \frac{I_{x\mu}}{R_1} \right) \\ H &= E \left( \frac{F}{R} \rho_d + \frac{S_\mu}{R_1} \right), K = \frac{EI_{x\epsilon\epsilon v}}{R^2} \\ L &= \frac{ES_{\epsilon\epsilon v}}{R}, N_0 = \frac{EI_{\phi_1}}{R_1^3} \\ P &= \frac{E}{R_1^2} (2I_{y\phi_1}^{[2]} + I_{\phi_1\mu}) \\ Q &= R_1M_{11} + \frac{EF}{R} y_d^2 + \frac{2ES_\mu}{R_1} \rho_d \mu + \frac{EI_\mu}{R_1} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{EI_{\phi_1\epsilon\epsilon v}}{R_1^2} \\ T &= R_1M_{1\epsilon\epsilon v} + \frac{ES_{\epsilon\epsilon v}}{R} \rho_{d\epsilon} + \frac{EI_{\mu\epsilon\epsilon v}}{R_1} \\ U &= R_1M_{\epsilon\epsilon v} + \frac{EI_{\epsilon\epsilon v}}{R}, Q_1 = Q - \frac{D^2}{A} - \frac{H^2}{B} \\ T_1 &= T - \frac{DK}{A} - \frac{HL}{B}, U_1 = U - \frac{K^2}{A} - \frac{L^2}{B} \\ N_2 &= N - \frac{S^2}{U_1}, P_2 = P - \frac{ST_1}{U_1}, Q_2 = Q_1 - \frac{T_1^2}{U_1} \\ D_2 &= D - \frac{KT_1}{U_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(A.7)$$

また、式 (45) の係数は次のようになる。

$$a = 2\frac{P_2}{N_2}, b^2 = \frac{Q_2}{N_2}, e = \frac{D_2}{AN_2} \dots\dots\dots(A.8)$$

参 考 文 献

- 1) Bantlin, A.: Formänderung und Beanspruchung federnder Ausgleichsröhren, Z. Ver. deut. Ing., Heft 54, pp. 43~49, 1910.
- 2) von Kármán, Th.: Über die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichsröhre, Z. Ver. deut. Ing., Heft 55, pp. 1889~1895, 1911.
- 3) Timoshenko, S.: Bending stresses in curved tubes of rectangular cross section, Trans. Am. Soc. Mech. Eng., Vol. 45, pp. 135~140, 1923.
- 4) Clark, R.A. and E. Reissner: Bending of curved tubes, In "Advances in Applied Mechanics, Vol. 2" (von Mises, R. and Th. von Kármán eds.) Academic Press, 1951.
- 5) 中村康治: 軸対称殻理論の曲り梁問題への応用, 日本機械学会総会講演会前副集, pp. 37~40, 1957.4.
- 6) Vlasov, V.Z.: Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translation, Ltd., Ierusalem, 1961 (奥村敏恵ほか共訳: 薄肉弾性ばりの理論, 技報堂, 1967).
- 7) Kollbrunner, C.F. and N. Hajdin: Dünnwandige Stäbe, Band 1, Springer Verlag, Berlin, 1972.
- 8) 小西一郎・小松定夫: 薄肉曲線析の基礎理論, 土木学会論文集, No. 87, pp. 35~48, 1962.11.
- 9) 深沢泰晴: 薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論, 土木学会論文集, No. 110, pp. 30~51, 1964.10.
- 10) 西野文雄・深沢泰晴: ひずみ場の仮定に基づく薄肉曲がりばりの静的挙動の定式化, 土木学会論文報告集, No. 247, pp. 9~19, 1976.3.
- 11) 高橋邦弘・水野正夫: 薄肉開き断面部材の断面変形 (1 自由度断面変形・1 軸対称断面の場合), 日本機械学会論文集, Vol. 44, No. 378, pp. 460~469, 1978.2.
- 12) 高橋邦弘・水野正夫: 薄肉開き断面部材の断面変形 (多自由度断面変形の場合), 日本機械学会論文集, Vol. 45, No. 400, pp. 1545~1553, 1979.12.
- 13) 高嶋秀雄: 空間曲線をもつ薄肉開断面材の解析, 日本建築学会論文報告集, No. 267, 1978.

(1981.4.17・受付)