

ダムを越流する流れの解析的研究*

ANALYTICAL STUDIES OF THE FLOW OVERFALLING DAMS.

(Trans. of JSCE, No. 32 March 1956)

Yoshiharu Ida, C.E. Assoc Member

准員 井田 至 春**

Synopsis Here, the author indicates analytical treatments of the flow overfalling dams, using the formulas he has past developed for the steady flow in open channels, considering the effects of vertical curvature. And, he discussed the position control section occurred near the crest of overflow spillway, which has controlling, effects for the nappe shape and coefficient of overflow.

Numerical examples is also indicated for Naruko arch dam overfall spillway to show the results of this theory.

要旨 本論文は従来おもに実験的に取扱われてきたダムの越流現象を筆者が先に発表した鉛直曲率を有する開水路運動方程式***を用いて解析的に取扱ひ、ダムの越流流れに対する水理学的方法の一試論を提供した。

まえがき ダムの越流現象は従来ほとんど実験的に取扱われ、すでにかんがりの成果を修めていることは周知のとおりである。すなわち、これまでの越流ダムに関する問題の主流は越流頂に負圧を生ぜしめない最も経済的な頂形を実験的に定めることであつて****、これらはいずれも鋭縁堰を越流するナップの下面に一致するいわゆる標準越流頂形を採用するもので、任意の形状を持つ越流頂における水理現象等、一般の問題に対しては、小数の場合について模型実験が行われている以外に、普遍的な理論に欠けているように思う。

以下、本文では、ダムを越流する流れを、貯水池水面より常流をもつて越流頂部に達し、頂点附近で限界水深を取り、爾後射流をもつてダム背面を流下する開水路定常流として取り扱う。

I. 一般的方法

1. 運動方程式

鉛直曲率を有する開水路運動方程式は一般に次のように表わしうる。

$$\frac{dH}{dx} + \alpha \frac{d}{dx} \left\{ \left(\frac{V^2}{2g} \right) (D) \right\} + \frac{n^2 V^{2m}}{R^m} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

ここに x : 水路底に沿い流れの方向に測られる距離

H : x 点における水面の基準面よりの高さ

V : x 断面の平均流速

$$D : \text{曲率が上に凸} = \left\{ \left(\frac{1}{\log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0}} \right) \left(\frac{d}{\rho_0 + d} \right) \right\}^2$$

$$\text{“ 下 ”} = \left\{ \left(\frac{1}{\log \frac{\rho_0}{\rho_0 - d}} \right) \left(\frac{d}{\rho_0 - d} \right) \right\}^2$$

n : マニングの粗度係数,

R : 径深 = 水深 (広矩形断面)

ρ_0 : x 断面における底の曲率半径

d : x 断面の水深

なお断面は底に垂直に取るものとする。

ダムを越流する流れにおいては摩擦損失の影響はきわめて小さいから、(1)式において第3項を無視し、かつ $\alpha=1$ として積分すれば、

$$H + \left(\frac{V^2}{2g} \right) \cdot D = \theta \dots \dots \dots (2)$$

ここに θ : 積分常数、この場合は貯水池水位、すなわち流れの持つ比エネルギーに一致する。

となる。次に任意断面の水位 H は

* 本論文は、東北地建第6回技術研究会(昭30-2)および土木学会第11年会次学術講演会(昭30-5)において概要を發表した。

** 東北地建、鳴子工事事務所

*** 1. 東北地建第5回技術研究会論文集(昭29-9)筆者論文「自由表面を有する急勾配流れ」または 2. 土木学会誌40-3(昭30-3)同上

**** 3. Bureau of Reclamation, Boulder Canyon Project, Final Report "Studies of Crest of Overfall Dams" 及び 4. Creager "Engineering for Dams" vol II

***** 前出 1. p7 または 2. p19

$$H = H_0 + d \cos i \dots\dots\dots (3)$$

ここに i : 底勾配角, H_0 : 底の基準面よりの高さ。

で表わされるから, これを(2)式に代入すれば,

$$V = \sqrt{\frac{2g(\theta - d \cos i - H_0)}{D}}$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} \text{曲率が上に凸} \quad V &= \sqrt{2g(\theta - d \cos i - H_0)} \left(\log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0} \right) \left(\frac{\rho_0 + d}{d} \right) \\ \text{曲率が下に凸} \quad V &= \sqrt{2g(\theta - d \cos i - H_0)} \left(\log \frac{\rho_0}{\rho_0 - d} \right) \left(\frac{\rho_0 - d}{d} \right) \\ \text{曲率が 0} \quad V &= \sqrt{2g(\theta - d \cos i - H_0)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

以下本節においては単位巾流量が一定なる場合, すなわち直線ダムにおいて導流壁間隔が一定の場合, 連続の関係から, $V \cdot d = q$ (単位巾流量) = const. であるから, (4)式は一般に次のように表現できる。

$$\left. \begin{aligned} \text{上に凸} \quad q &= \sqrt{2g(\theta - d \cos i - H_0)} \left(\log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0} \right) (\rho_0 + d) \\ \text{下に凸} \quad q &= \sqrt{2g(\theta - d \cos i - H_0)} \left(\log \frac{\rho_0}{\rho_0 - d} \right) (\rho_0 - d) \\ \text{0} \quad q &= \sqrt{2g(\theta - d \cos i - H_0)} \cdot d \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

(4), (5)式はダムを越流する流れの運動方程式を与えるもので, 越流頂部に対しては第1式, バケット曲線部には第2式, ダム背面及びエプロンの直線部には第3式がそれぞれ適用される。なお曲率を考慮しない場合に用いられる平均流速公式 $V = \sqrt{2gh}$ に対し, 曲率を考慮する場合は, 係数 $1/\sqrt{D}$ を乗じなければならぬことがわかる。

2. 限界水深

前述により, 運動方程式が定められたが, これのみでは, 流れの系の比エネルギー (この場合は θ) 及び越流頂形が与えられても, 起りうる流れの形式は無数に存在する。ここに流れの形式を唯一に決定づけるものとして, もう一つの条件がなければならない。

一般にダムを越流する流れは, 越流頂部において限界水深となりダム背面を射流状態で流下する。すなわち越流頂部の一断面がこの流れの系の支配断面となり, 流れを一義的に決定する支配条件を与える。

(1)式に対し筆者が先に定義した断面特性函数^{*}は,

$$\left. \begin{aligned} \phi &= H_0 + d \cos i + \frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{D}{A^2} + \frac{\Delta x_\phi}{2} \frac{n^2 Q^2}{R^{2m} A^2} \\ \psi &= H_0 + d \cos i + \frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{D}{A^2} - \frac{\Delta x_\psi}{2} \frac{n^2 Q^2}{R^{2m} A^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

であらわされるから, 前述の省略を行えば,

$$\phi = \psi = H_0 + d \cos i + \frac{q^2}{2g} \frac{D}{d^2} \dots\dots\dots (7)$$

となり, 形式的に流れの持つ比エネルギーに一致する。

越流頂部においては曲率が上に凸であるから, (7)式は

$$\phi = \psi = (H_0 + d \cos i) + \frac{q^2}{2g} \left\{ \left(\frac{1}{\log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0}} \right) \left(\frac{1}{\rho_0 + d} \right) \right\}^2 \dots\dots\dots (8)$$

となる。いまダムの越流頂部において背面に沿い相接近する任意の断面 x_1, x_2, x_3, \dots を取れば, 断面特性函数の性質上

$$\phi_1(d_1) = \phi_2(d_2) = \phi_3(d_3) = \dots = \theta \dots\dots\dots (9)$$

が成立しなければならない^{**}。(ただし d_1, d_2, d_3, \dots は各断面における水深, $\phi_1(d), \phi_2(d), \phi_3(d), \dots$ は断面特性函数を示すものとする)。

いま, ある断面 x_i に限界水深が起つているとすれば, その限界水深値 d_i に対する $\phi_i(d_i)$ は当然 θ に一致し, かつ, この値は函数 $\phi_i(d)$ の極小値でなければならない。なお, また x_i 断面に近接するすべての断面における $\phi(d)$ の極小値はこの値より小さくなければならない。もしたとえ一断面でもその ϕ 函数の極小値が, $\phi_i(d_i)$

* 前出 1. p13 または 2. p20

** 前出 1. p14 (22) 式または 2. p20 (17) 式

より大きければ、この断面には比エネルギー θ に対する水位が存在しえず、従つてかかる流れは実在しないことになる。よつて『流れが急激なるエネルギー損失をとまなうことなしに、常流から射流に連続的に変化する場合、断面特性函数の極小値が最大なる点に限界水深を生ずる。』と定義できる。以上は摩擦損失項を無視した場合について論じたものであるが、断面区間距離を十分小さく取つて考えれば、摩擦損失を考慮する流れにおいても同様に結論できる。これは一般開水路定常流における支配断面の位置を与えるものである。

(8) 式を d で微分し、0 と置けば、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (d)} = \cos i - \frac{q^2}{q} \frac{1 + \log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0}}{\left(\log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0}\right)^3 (\rho_0 + d)^3} = 0$$

$\frac{\rho_0 + d}{\rho_0} = \xi$ と置いて整理すると、

$$\frac{1 + \log \xi}{\xi^3 \log^3 \xi} = \frac{g \rho_0^3 \cos i}{q^2} \dots \dots \dots (10)$$

となり、(10) 式は断面特性函数の極小条件を与える。

支配断面においては (10) 式と同時に (5) 式 (第 1 式) を満足しなければならないから、両式から q を消去すれば、

$$\frac{1 + \log \xi}{\xi \log \xi} = \frac{\rho_0 \cos i}{2\{\theta - \rho_0(\xi - 1) \cos i - H_0\}} \dots \dots \dots (11)$$

となり、(11) 式は支配断面における限界水深を与えるもので、流れの形式を唯一に決定付ける支配条件式である。

支配断面が越流頂にあれば、(11) 式は

$$\frac{1 + \log \xi_c}{\xi_c \log \xi_c} = \frac{\rho_{0c}}{2\{\theta - \rho_{0c}(\xi_c - 1) - H_0\}} \dots \dots \dots (12)$$

となり、本間教授の示されておられるもの*と全く同意義である。

ここに各記号の添字 c は越流頂点の値であることを示す。

3. 越流量

越流水路の縦断形と貯水池水位が与えられていれば、(5) 式から任意断面における水深がわかれば、一般にダムの越流量が決定せられる。いま特に支配断面に着目すれば、(10) 式より

$$q = \sqrt{\frac{g \cdot \rho_0^3 \cdot \xi^3 \cdot \log^3 \xi}{1 + \log \xi}} \dots \dots \dots (13)$$

が得られ、支配断面の位置とその限界水深が与えられれば越流量が決定される。この場合、支配断面が越流頂にあれば、

$$q = \sqrt{\frac{g \cdot \rho_{0c}^3 \cdot \xi_c^3 \cdot \log^3 \xi_c}{1 + \log \xi_c}} \dots \dots \dots (14)$$

となる。(5)、(13)、(14) の各式は実験係数を含まない理論式であることに注意しなければならない。

4. 流速分布、圧力分布

鉛直曲率を有する開水路断面における流速分布は、一般に

$$\left. \begin{array}{l} \text{上に凸} \quad v = \frac{d}{\rho_0 + d - \zeta} \frac{V}{\log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0}} \\ \text{下に凸} \quad v = \frac{d}{\rho_0 - d + \zeta} \frac{V}{\log \frac{\rho_0}{\rho_0 - d}} \\ 0 \quad \quad \quad v = V (= \text{const}) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

ここに ζ : 水面からの深さ

で表わされるから、流路に沿う流速分布は次のように示される。

(i) 水面流速分布 ($\zeta=0$)

* 本間仁「技術者のための流体の力学」p100

** 前出 1. p5 または 2. p18

$$\begin{array}{l}
 \text{上に凸} \quad v = \frac{d}{\rho_0 + d} \frac{V}{\log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0}} \\
 \text{下に凸} \quad v = \frac{d}{\rho_0 - d} \frac{V}{\log \frac{\rho_0}{\rho_0 - d}} \\
 0 \quad v = V
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{上に凸} \\ \text{下に凸} \\ 0 \end{array}} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

(ii) 水路底流速分布 ($\zeta = d$)

$$\begin{array}{l}
 \text{上に凸} \quad v = \frac{d}{\rho_0} \frac{V}{\log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0}} \\
 \text{下に凸} \quad v = \frac{d}{\rho_0} \frac{V}{\log \frac{\rho_0}{\rho_0 - d}} \\
 0 \quad v = V
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{上に凸} \\ \text{下に凸} \\ 0 \end{array}} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

鉛直曲率を有する開水路の断面圧力分布は、

$$\begin{array}{l}
 \text{上に凸} \quad p = w_0 \left[\zeta \cdot \cos i - \left(\frac{V^2}{2g} \right) \left(\frac{d}{\log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0}} \right)^2 \left\{ \frac{1}{(\rho_0 + d - \zeta)^2} - \frac{1}{(\rho_0 + d)^2} \right\} \right]^* \\
 \text{下に凸} \quad p = w_0 \left[\zeta \cdot \cos i + \left(\frac{V^2}{2g} \right) \left(\frac{d}{\log \frac{\rho_0}{\rho_0 - d}} \right)^2 \left\{ \frac{1}{(\rho_0 - d)^2} - \frac{1}{(\rho_0 - d + \zeta)^2} \right\} \right] \\
 0 \quad p = w_0 \cdot \zeta \cdot \cos i
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{上に凸} \\ \text{下に凸} \\ 0 \end{array}} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここに w_0 : 水の単位容積重量与えられるから、流路に沿う水路底圧力分布は、 $\zeta = d$ と置けば

$$\begin{array}{l}
 \text{上に凸} \quad p = w_0 d \left\{ \cos i - \left(\frac{V^2}{2g} \right) \left(\frac{d}{\log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0}} \right)^2 \frac{(2\rho_0 + d)}{\rho_0^2 (\rho_0 + d)^2} \right\} \\
 \text{下に凸} \quad p = w_0 d \left\{ \cos i + \left(\frac{V^2}{2g} \right) \left(\frac{d}{\log \frac{\rho_0}{\rho_0 - d}} \right)^2 \frac{(2\rho_0 - d)}{\rho_0^2 (\rho_0 - d)^2} \right\} \\
 0 \quad p = w_0 \cdot d \cdot \cos i
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{上に凸} \\ \text{下に凸} \\ 0 \end{array}} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

となる。水面においては圧力は当然0である。

なお (19) 式に (4) 式を代入し V を消去すれば、次のような表現が得られる。

$$\begin{array}{l}
 \text{上に凸} \quad p = w_0 d \left\{ \cos i - \frac{(\theta - d \cos i - H_0)(2\rho_0 + d)}{\rho_0^2} \right\} \\
 \text{下に凸} \quad p = w_0 d \left\{ \cos i + \frac{(\theta - d \cos i - H_0)(2\rho_0 - d)}{\rho_0^2} \right\} \\
 0 \quad p = w_0 d \cos i
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{上に凸} \\ \text{下に凸} \\ 0 \end{array}} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

II. 二、三の問題に関する試論

1. アーチダムを越流する流れ

前節においては、単位巾流量 q が一定なる場合について論じたのであるが、水路巾の変化する流れとして多少取り扱いを変えれば、直線ダムの導流壁を下方にしぼる場合、及びアーチダムを越流する流れについても同様に議論できる。

いま円形アーチを考えると 図-1 に示すとおり、アーチダムの背面はアーチ中心跡上の各点を中心とする水平円弧によつて構成されている。よつて背面上の x 点に対する水平円弧半径を R_0 とし、アーチ中心跡が鉛直または鉛直からのずれが微小であるとすれば、図-1(c) より x 断面の水面は $R_0 - d \sin i$ を半径とする水平円弧をなしている。ゆえにアーチダムを越流する流れは、厳密には水深の方向に水路巾の変化する流れであつて、これまで述べた矩形断面の流れ**とは異なつている。

* 前出 1. p7 または 2. p18

** 前出 2. p18 及び p22

一般に鉛直曲率を有する任意形断面流れの運動方式の D 項^{*}は

$$D = \left(\frac{\int_0^d B d\eta}{\int_0^d \frac{B d\eta}{\rho_0 + \eta}} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0 + d} \right)^2 \dots \dots \dots (21)$$

ここに B : 任意断面における η 点の水路巾

η : 考えている点から底までの距離 = $d - \zeta$

で与えられる。

図-1(c)より、 η 点における流路巾は、底巾を単位とすれば、

$$B = \frac{2\pi(R_0 - d \sin i)}{2\pi(R_0)} = \frac{R_0 - \eta \sin i}{R_0} \dots \dots \dots (22)$$

(22) 式を (21) 式に代入して積分すれば、アーチダムを越流する流れの運動方程式における D 項は次のように求められる。

$$D = \left[\frac{R_0 - \frac{d}{2} \sin i}{-d \sin i + (R_0 + \rho_0 \sin i) \log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0}} \right]^2 \left(\frac{d}{\rho_0 + d} \right)^2 \dots \dots \dots (23)$$

ここに 曲率が上に凸の場合 $\rho_0 > 0$ } である。
 曲率が下に凸の場合 $\rho_0 < 0$ }

(23) 式において、次の極限条件が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \lim_{R_0 \rightarrow \infty} D &= \left(\frac{1}{\log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0}} \right)^2 \left(\frac{d}{\rho_0 + d} \right)^2 \text{ (矩形断面の場合に一致する)} \\ \lim_{\rho_0 \rightarrow \infty} D &= 1 \text{ (直線部に対する値)} \\ \lim_{i \rightarrow 0} D &= \left(\frac{1}{\log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0}} \right)^2 \left(\frac{d}{\rho_0 + d} \right)^2 \text{ (越流頂点に対する値で矩形断面の場合に一致する)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

(24) 式は (23) 式の検照を与えると同時に、垂直方向の断面巾変化の影響は、越流頂附近で小さく、特に頂点においては全く消滅すること、また i の値が大きい背面曲線部においては ρ_0 がきわめて大となるからその影響が小さくなること、また背面直線部では全く影響のないことを示している。

よつて、以上のことを考えると、 R_0 が d にくらべてあまり大きくない、朝顔型堅孔余水吐 (Morning-Glory Shaft spillway)** 等の場合は別として、 R_0 が d にくらべてきわめて大きいアーチダムの越流流れに対しては、要求される計算精度によつては矩形断面の D 項を用いても十分さしつかえないと考える。

上記のほか、アーチダムを越流する流れは、当然各標高においてその標高のアーチ中心に向うから、流れの方向に流路巾が変化する流れとなる。

よつて、アーチダム越流余水吐の任意点における、流路巾を B 、総流量を Q とすれば、矩形断面の D 項を用いるものとし、(4) 式より

$$\frac{Q}{d \cdot B} = \sqrt{\frac{2g(\theta - d \cos i - H_0)}{D}} \dots \dots \dots (25)$$

アーチダム越流余水吐において、流れが背面を離れたり、乱れを生じたりすることなしに整一であるためには当然、ダムが定中心型またはこれに近い形式でアーチ中心跡の軸中心からのずれが小さくなければならない。この場合流れは一般に越流頂から軸中心に向い、水路巾がほぼ直線的にしばられることとなる。

余水吐の断面巾が 図-1 のように導流壁で直線的にしばられる場合は

$$B = B_c(1 - \alpha x) \dots \dots \dots (26)$$

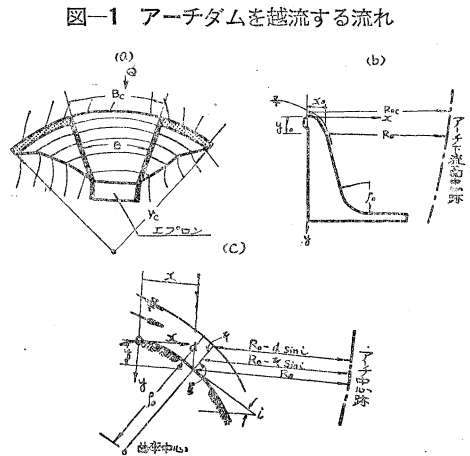


図-1 アーチダムを越流する流れ

* 筆者未発表論文「鉛直曲率を有する任意形断面定常流れ」(近く発表の予定)

** Proceedings A.S.C.E April 1954 No.431,432,433 または前出 4. vol 1 p 227~p 243

ここに B_c : 越流頂巾 B : x 点における流路巾

アーチダムが定中心型で、流れが完全に直線的に軸中心に向う場合は、(26) 式は

$$\left. \begin{aligned} B &= B_c \left(1 - \frac{x}{R_{0c}} \right) \\ \alpha &= \frac{1}{R_{0c}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

ここに R_{0c} : 越流頂点アーチ半径 x : 越流頂点に座標原点を取つた場合、背面任意点の水平座標値となる。なおアーチダムの越流頂部付近のみを論ずる場合は、定中心型アーチダムでなくてもアーチ中心跡の軸中心からのずれが小さいから (27) 式を用いてもさしつかえないと考える。

次に断面特性函数は (7) 式に $q=Q/B$ を代入すれば、

$$\phi = \psi = H_0 + d \cos i + \frac{Q^2}{2gB^2} \frac{D}{d^2} \dots\dots\dots (28)$$

となり、流量巾が直線的に変化する場合は、これに (26) 式を代入すれば、次のようになる。

$$\phi = \psi = H_0 + d \cos i + \frac{Q^2}{2gB_c^2(1-\alpha x)^2} \frac{D}{d^2} \dots\dots\dots (29)$$

越流頂部における ϕ 函数の極小条件は、(10) 式より

$$\frac{1 + \log \xi}{\xi^3 \log^3 \xi} = \frac{g \rho_0^3 \cdot B^2 \cos i}{Q^2} \dots\dots\dots (30)$$

によつて与えられ、越流頂部の支配断面に対しては、(30) (25) 両式より

$$\frac{1 + \log \xi}{\xi \log \xi} = \frac{\rho_0 \cos i}{2\{\phi - \rho_0(\xi - 1) \cos i - H_0\}} \dots\dots\dots (31)$$

となり、単位巾流量が一定な場合の (11) 式と全く同一の支配条件式が求められる。

アーチダムを越流する流れの支配断面は、直線ダムの場合と同様 (28) (30) 両式より ϕ 函数の極小値が最大になる条件より求められる。

支配断面の位置とその限界水深値が既知の場合は、(30) 式から

$$Q = \left(\frac{g \cdot \rho_0^3 \cdot B^2 \cdot \cos i \cdot \xi^3 \cdot \log^3 \xi}{1 + \log \xi} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (32)$$

によつて総流量が与えられる (ただし (32) 式の右辺の各記号は支配断面に対する値を示すものとする)。また貯水池水位 θ 及び越流頂形が与えられて Q を求める場合は、(30) (31) 両式を試算的に計算すればよい。

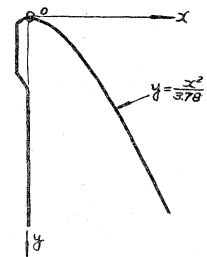
アーチダムを越流する流れの流速並びに圧力の分布は、(16)~(20) 式において $q=Q/B$ と置けば容易に求めることができる。

2. 支配断面の位置と越流係数

前述したとおり、ダムを越流する流れの支配断面は、一般に断面特性函数 ϕ の極小値が最大となる位置に生ずるのであるが、次に一例として鳴子アーチダム越流余水吐(案)の頂形 $y = \frac{x^2}{3.78}$ (図

図-2 鳴子アーチダム越流頂形

一2) に対し支配断面の位置を決定するため、 $x=0, \pm 0.3 \text{ m}, \pm 0.5 \text{ m}, \pm 1.0 \text{ m}, \pm 1.5 \text{ m}$ において、流量 $Q=2000, 1000, 500, 100, 30 \text{ m}^3/\text{sec}$ のそれぞれに対し、アーチの彎曲効果を考慮する場合と無視する場合の ϕ の極小値をそれぞれ (29) (30) 及び (7) (10) の各式によつて計算すれば、図-3 のとおりである。すなわち、図-3 より明かなとおり、鳴子ダム越流余水吐においては、流量のいかんにかかわらず、またアーチの彎曲効果に関係なく、 ϕ の極小値が常に越流頂点で最大となるから、支配断面は常に越流頂点にあること、従つて限界水深が頂に起つていくことがわかる。また先に述べたとおりアーチの彎曲効果に関係なく支配条件式は (31) 式で表わされるから、貯水池水位 θ が与えられれば、同一の頂巾 B_c に対しては、彎曲効果を考慮する場合も無視する場合も全く同一の越流量となること、従つてまた次に述べる越流係数の値が全く同一になることがわかる。



一般に、普通の越流ダムでは、支配断面は常に越流頂点にあると考えてさしつかえないようであつて、この点本間教授は、「頂上すなわち S (本論文の H_0) の最大の位置で常流から射流に移る*」と述べておられる。しかし呑口が越流形式を取るトンネル余水吐等で断面形の変化がはげしい場合**には必ずしも越流頂点支配断面にならな

* 前出 5. p98

** 前出 1. p14 または 2. p21

いから注意を要する。

ダムの越流量は従来実験的に定められる越流係数を用い、

$$Q = c \cdot B_c h^{3/2} \dots \dots \dots (33)$$

ここに h : 越流水深 $= \theta - H_{0c}$

で表わされるが、(33) 式と (5) 式 (第1式) から

$$c = \frac{B}{B_c} \frac{\sqrt{2g}(\theta - d \cos i - H_0)}{h^{3/2}} \left(\log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0} \right) (\rho_0 + d) \dots \dots \dots (34)$$

と表現できる。(34) 式の右辺の各記号を越流頂点で考え、 $B = B_c$, $H_0 = H_{0c}$, $d = d_c$, $\cos i = 1$, $\rho_0 = \rho_{0c}$, $\theta - H_0 = h$ と置けば、

$$c = \frac{\sqrt{2g}(h - d_c)}{h^{3/2}} \left(\log \frac{\rho_{0c} + d_c}{\rho_{0c}} \right) (\rho_{0c} + d_c) \dots \dots \dots (35)$$

となる。(35) 式で支配断面が越流頂点にある場合は、 d_c はそのまま限界水深となり、本間教授の述べておられるもの*と一致する。

また支配断面の位置とその限界水深が既知の場合は、(32) (33) 両式から

$$c = \frac{B \cdot g^{1/2} \cdot \rho_0^{3/2} \cdot \cos^{1/2} i \cdot \xi^{3/2} \cdot \log^{3/2} \xi}{B_c \cdot h^{3/2} (1 + \log \xi)^{1/2}} \dots \dots \dots (36)$$

となり、(34) 及び (35) 式と全く同意義ではあるが形の異なつた表現が得られる。ただし (36) 式右辺の記号中 B_c, h は越流頂に対する値で、その他はすべて支配断面に対する値である。支配断面が越流頂点にあれば、同様にして (36) 式は次のようになる。

$$c = \frac{g^{1/2} \cdot \rho_{0c}^{3/2} \cdot \xi_c^{3/2} \cdot \log^{3/2} \xi_c}{h^{3/2} (1 + \log \xi_c)^{1/2}} \dots \dots \dots (37)$$

以上 (34)~(37) 式により、一般にダムの越流係数は、越流水深のみならず、支配断面の位置によつて変ることが理解できる。次に、上に誘導した越流係数式を検証するため、鳴子ダム越流余水吐 (案) に対し、(34) 式より計算される値と、竹内、山本、Creager, Davis** 4 氏の実験値または実験式と比較すれば 図-4 のとおりとなる。

ここで、従来の標準越流頂形においては、越流水深を設計水頭に対する比をもつて無次元化して表現できるが、ここに述べるような任意の頂形に対しては厳密な意味で設計水頭は存在しないから、越流水深を無次元化するためには、幾何学的に相似な各頂形ごとにそれぞれの基準寸法 (例えば越流頂曲率半径) に対する比をもつて表わさなければならない。

よつて、この場合は、Creager の標準越流頂形座標値***に対し放物線 $y = x^2/N$ を最小2乗法によつて曲

図-3 鳴子ダム越流頂近傍における限界水深値と ϕ の極小値

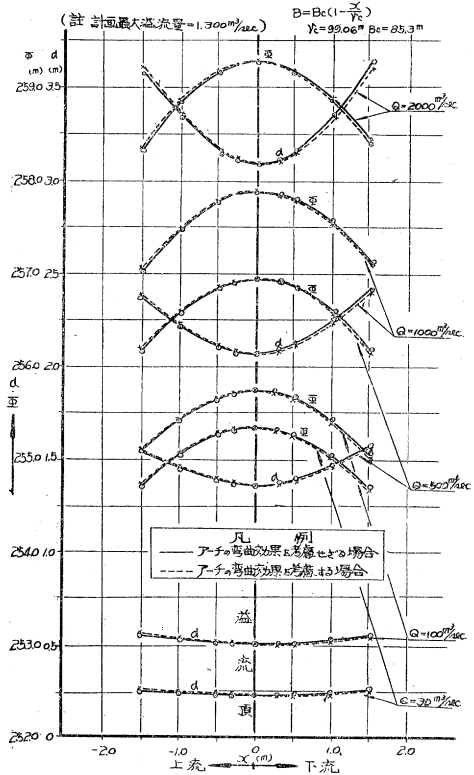
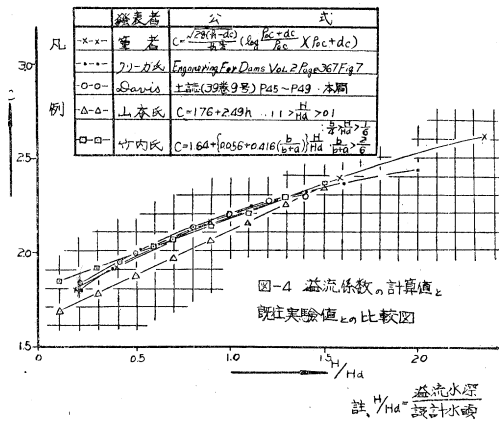


図-4 越流係数の計算値と既往実験値との比較



* 前出 5. p 100

** 6. 土木工学ハンドブック (昭29) p 196~p 197 7. 土木研究所報告第 66 号 (昭10) p 75~p 92
8. 土木学会誌 (39-9) 本間 p 45~p 49 前出 4. vol II p 367

*** 前出 4. vol II p 359

線挿入すれば, normal equation は, $N = \Sigma yx^2 / \Sigma y^2$ で表わされるから, これを $x = 0 \sim 11.0$ の7個の値に対して計算し, $N = 2.096$ をうる。鳴子ダム越流余水吐頂形 $N = 3.78$ に対しては相似の理論から, 設計水頭 $H_d = \frac{3.78}{2.096} \cdot 1 = 1.804 \text{ m}$ に相当する。図-4 に示す筆者の計算値は, この H_d の値を用い近似的に横座標をプロットしたものである。

図-4 より明らかとなり, 全く解析的に求められる越流係数値が, 既往の実験値ときわめてよく一致していること, 従つてまたダムの越流係数は, 頂形及び支配断面の位置によつて定まるもので, この場合考慮外に置いた摩擦損失はほとんど影響を与えないことがわかる。なお図に示した値の内, 竹内, 山本両氏の用いられた頂形は $y = x^2/N$ 型の放物線形であるが, 他の2氏のもは標準越流頂形に対するものであるから, 厳密には, 筆者の計算値は前2氏の値と比較するのが妥当であろう。

3. 越流頂における流れの安定条件

越流頂部において, 流れがダム背面に与える水圧は (20) 式 (第1式) で表わされるが, 一般に貯水池水位 θ の上昇にともない, 同式の右辺が負の値を示すようになる。この場合ダム背面に負圧が働らくことになる。よつて (20) 式 (第1式) より

$$\cos i \geq \frac{(\theta - d \cos i - H_0)(2\rho_0 + d)}{\rho_0^2} \dots\dots\dots (38)$$

とおけば, (38) 式は越流頂部に負圧を生じない条件を与える。

また鋭縁堰を越流する水脈の下面に形取つて定められる, いわゆる標準越流頂形は, 頂部のすべての点で水圧は0と考えられるから, 理論的に次のように表現される。

$$\cos i - \frac{(\theta - d \cos i - H_0)(2\rho_0 + d)}{\rho_0^2} = 0 \dots\dots\dots (39)$$

一般に越流頂部に負圧が発生する場合, その値が小さければナップは背面に沿つて流れるが, 流れには空気を溶解しており低圧においてこれを析出するほか, また水自身が気化するため, 負圧が絶対圧力0に近づくところにて空洞が発生し, ナップは背面を離れ, ついには全面的分離を起し, いわゆるフリーナップを現出する。この現象はすでにキャビテーション現象及びナップの分離として知られているもので, ここではかかる現象が起る場合流れが不安定であると定義する。

ダムの越流頂部において負圧が存在し, なお流れが安定であるためには, (20) 式 (第1式) より越流頂部のすべての点において次の条件が成立しなければならない。

$$\left| \cos i - \frac{(\theta - d \cos i - H_0)(2\rho_0 + d)}{\rho_0^2} \right| \leq \frac{k_c P_A}{w_0 d} \dots\dots\dots (40)$$

ここに P_A : 大気圧 (厳密には場所と時間によつて変る) $\approx 10 \text{ t/m}^2$

k_c : 流れの溶解している空気量, 及び温度によつて変る係数 (越流頂部における流れの安定係数と定義する)

(40) 式において, 一般に大気圧が低いほど, 気温が高いほど, 流れの溶解している空気量が多いほど, $k_c P_A$ の値は小さくなり, θ の低い値で流れが不安定となることがわかる。

従来, 重力ダムの越流頂形設計に当り, 起りうる最大の越流水深を設計水頭として背面曲線形を決定し, 結局負圧が生じないことを原則としているが (すなわち $k_c = 0$), 負圧の存在は必ずしもキャビテーションの発生, ナップの分離を意味するものではなく, また前述の越流係数を大きく取るためからも, 設計水頭は必ずしも最大越流水深に取る必要はないと考える。特にアーチダムにおいては, 頂部の肉厚は, 構造学的条件から定まつてくるため, これに越流形式の余水吐を考える場合, 所要の越流量に対し多少の負圧をまぬかれない場合が生ずる。最近, 越流ダムの背面負圧として 0.3 kg/cm^2 程度を許容する場合があるが, これは (40) 式より

$$\left. \begin{aligned} k_c P_A &= 3 \text{ (t/m}^2\text{)} \\ \therefore k_c &\approx 0.3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

を許容限界とするものである。

III. 数値計算例

1. 計算条件

上述の理論にもとづき, 目下計画中の鳴子アーチダム越流余水吐 (案) について数値計算例を示す。計算は, 図-5に示す条件に従つて行つた。

図-5 鳴子アーチダム越流余水吐(案)

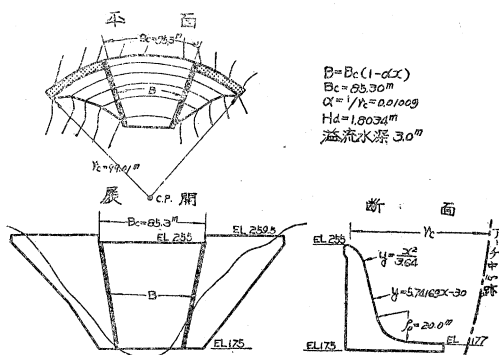
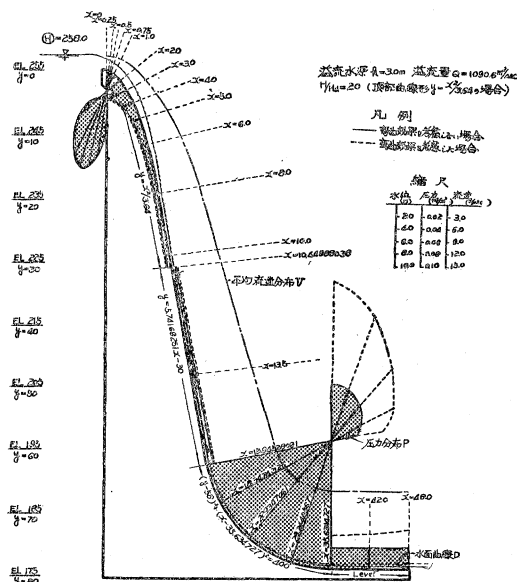
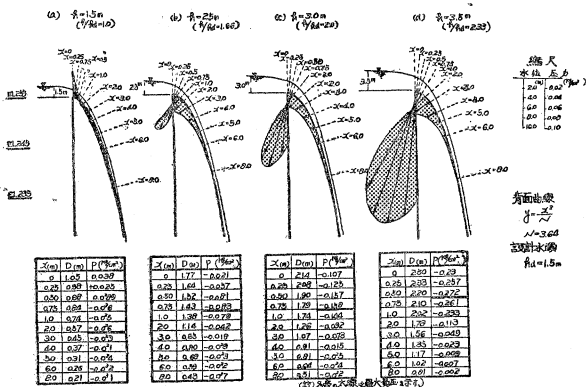


図-6 鳴子ダム越流余水吐水力計算図



水深(D)、圧力分布(P)、流速分布(V)、計算値			
X(m)	D(m)	P(kg/cm ²)	V(m/sec)
0.00	2.92	0.177	0.250
0.20	2.67	0.162	0.242
0.40	2.42	0.147	0.234
0.60	2.17	0.132	0.226
0.80	1.92	0.117	0.218
1.00	1.67	0.102	0.210
1.20	1.42	0.087	0.202
1.40	1.17	0.072	0.194
1.60	0.92	0.057	0.186
1.80	0.67	0.042	0.178
2.00	0.42	0.027	0.170
2.20	0.17	0.012	0.162
2.40	0.00	0.000	0.154

図-7 鳴子ダム越流頂部圧力分布



2. 水面曲線, 流速分布, 圧力分布

越流水深 $h=3.0\text{m}$ (計画最大越流深)

頂部曲線形 $y=x^2/3.64$

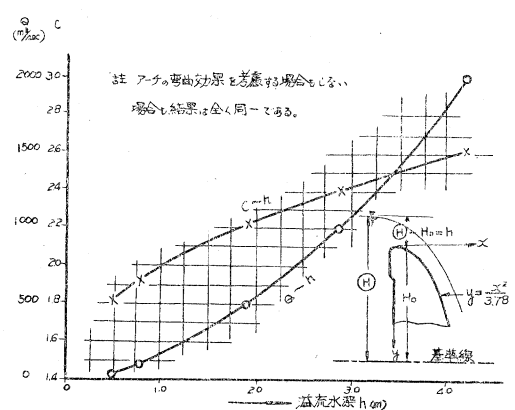
の場合に対し, 水面曲線, 流速分布, 圧力分布の計算結果を図示すれば, 図-6 のとおりである。

次に同じ頂形に対し, 越流水深の変化にともなう頂部圧力の変化を図示すれば, 図-7 のとおりで, 越流水深の増大にともない頂部負圧の増大の様子がわかる。

3. 越流係数, 越流量

越流水深の変化にともなう越流係数, 総越流量の計算値を図示すれば 図-8 のとおりで, この場合, 前述のとおり, アーチの彎曲効果は影響しない。

図-8 鳴子アーチダムの越流係数と越流量



4. 越流頂部における流れの安定係数

計画最大越流水深 3m に対し頂部における最大負圧は 図-6 に示すとおり 1.58t/m^2 であるから, (40)式より

$$k_c P_A = 1.58$$

$$\therefore k_c = 0.16$$

に相当することがわかる。

あとがき ここに述べた理論は, 開水路流れの流線が各横断面においてすべて底に平行と仮定するもので, 水面勾配が底勾配といちぢるしく異なっている流れの部分には厳密な結果が得られないことになる。しかし本文に述べたとおり, 計算される越流係数の値が既往の実験値ときわめてよく一致している事実から見て, ダムの越流流れの解析手段として十分実用性を持つものとする。従来ほとんど実験的にのみ取扱われてきたこの種の問題に, 解析的な一手段を提供できれば, 筆者の幸いとする所である。本文に述べた数値計算は, 鳴子ダム設計の一部として鳴子工事事務所において行われたもので, 計算にあられた加谷技術員を始め係員諸氏に深く敬意を表するものである (昭.30.6.11)