

クノイド波と孤立波に関する解析的研究

准員 岩佐 義朗*

ANALYTICAL CONSIDERATIONS ON CNOIDAL AND SOLITARY WAVES

(Trans. of JSCE, No.32, March 1956)

Yoshiaki Iwasa, C.E. Assoc. Member

Synopsis In this paper, the mathematical theory on progressive translation waves of the permanent type is developed. The treatment of the second approximation based upon the momentum and energy approaches considering the effects of the vertical acceleration shows that the surface profile of waves is expressed in terms of an elliptic function which is designated as the cn-function, the name cnoidal being derived therefrom as analogous to sinusoidal, and the solitary wave is included as a special case of the cnoidal wave. It should be noticed that the behaviour of cnoidal waves may be reduced to that of classical sinusoidal waves at a special limiting case.

1. 緒言

河道を伝わる移動波については、G.H. Keulegan¹⁾ は適切な定義を与えているが、一般には洪水波のように流体粒子の移動とともに自由表面の波動が伝播されるものということができよう。

この移動波の水理学的特性については古くより考察が進められ、中でも洪水波の問題として P. Massé²⁾ や林教授³⁾ が、また周期性進行波として流体の非回転性を仮定して、J. Boussinesq⁴⁾、G.H. Keulegan および G.W. Patterson¹⁾ が立派な研究を残している。とくに微小振巾を取扱った第1次近似理論においては多くの人々が研究を重ね、移動波がいわゆる Lagrange 型の伝播速度をもつて、波形を変化することなく伝わるものであることはすでによく知られた事実である。

Keulegan もいうように、移動波はつぎの二つに分類することができよう。第一は permanent 型の進行波の取扱いに現われるように、水平床では摩擦力が無視され、傾斜水路では自重による項と摩擦力による項とが等しいという特殊な場合に当り、第二は洪水波を取扱うときのように、摩擦力の影響を無視しがたい場合である。従つて本文で考察する permanent 型の進行波は前者に属する。また移動波の波高が相当高くなつて、自由表面の勾配および曲率を無視できないようになれば、上述の第1次近似理論における結果は、もはや現象を十分説明できないことになり、これらの影響を考慮した第2次近似理論にもとづかなければならぬ。

Boussinesq⁴⁾ や Keulegan および Patterson¹⁾ はこの点を考慮し、流れの非回転性を仮定して波高のやや高い移動波を解析し、その波形が Korteweg や de Vries によつて名づけられたクノイド波 (cnoidal wave)、すなわち Jacobi の cn 函数によつて表わされることを示してきわめて注目すべき結果を得ている。

ここでは流れを非回転性と仮定せずに、いわゆる開水路の基礎方程式より出発する。しかしながら普通に用いられる基礎方程式はその根底に静水圧分布を仮定しているから、ここで取扱うような鉛直加速度を無視できない場合にはその修正が必要となるし、また事実、その式においては本質的に周期波動解をもたないことは著者らの転波列に関する理論^{5), 6)} の結果をみても明らかである。従つて自由表面の勾配や曲率に影響を及ぼす鉛直加速度を考慮した基礎方程式によらなければならぬ。著者はこの事実にもとづいて、運動量およびエネルギーの関係から第2次近似基礎方程式を導くことができた。これは F. Serre⁷⁾ と同様の仮定にもとづいたもので、その結果も大体同様になっているが、Serre の計算は十分とはいえないようである。

以上述べた考え方にもとづくと、permanent の意義に従つて高次移動波の解析が進められるが、これは一定の伝播速度で動く座標系から permanent 型の波を見た場合、波形が定常化されるからである。この方法は、これまで多くの人々が取扱つてきたように、一定勾配の水路上の permanent 型の波の取扱いにはきわめて有効なものである。著者はこの方法を用いて permanent 型の移動波の波形を cn 函数であらわし、波の水理学的特性を明らかにすることができた。さらにその1極限条件の取扱いが孤立波となることを確かめることができた。

このクノイド波はわれわれにとつてあまり親しみ深いものではないが、水路中に起る流水中の波を見ると容易にその存在が認められるし、また A.T. Ippen ら⁸⁾ は波状跳水現象の研究において、波形をクノイド波と仮定して巧妙な解析を行い、著者⁹⁾ は波状跳水の波形がクノイド波で表わされることを明らかにした。一方において、海岸近くの波がこのクノイド波に近似していることはすでに知られた事実であり、Keulegan はその適用範囲について考察を加えている。とくにその極限である孤立波の理論結果が海岸近くの磯波の一つ一つにきわめてよく

* 京都大学助教授，工学部土木工学教室

似ており、種々の点において海岸工学への応用が熱心に考えられるようになった今日では、このクノイド波の理論は重要な意義をもつものであつて、その今後の発展が期待されるわけである。事実、クノイド波の振巾を無限小に帰せしめると、十分の精度で広く用いられている微小振巾浅海波理論の結果と一致することが、容易に確かめられるのである。

2. 基礎的關係

ここでは取扱いを簡単にするために2次元流れとするが、容易に一般断面にも拡張することができる。

いま水路底面に沿い下流方向に x 軸、これと直角上向きに z 軸をとり、 t を時間、 u_m を断面平均流速、 h を水深とすれば、連続の方程式は

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_m \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u_m}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

である。ここで x 方向の流速 u をつぎのように仮定する。

$$u(x, z, t) = u_m(x, t) \cdot f(z/h) \dots\dots\dots (2)$$

上式の $f(z/h)$ は流速分布から決定される任意函数であり、不等流にても等流における分布型と同様の形であると仮定したわけである。従つて流れの函数 ψ は

$$\psi(x, z, t) = h \cdot u_m \cdot F(z/h) + \varphi(x, t) \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここに $F(z/h)$ は $f(z/h)$ の積分であり、 $\varphi(x, t)$ は x と t に関する任意函数である。これより運動学的境界条件を考慮して、 z 方向の速度 w を表わすと、

$$w(x, z, t) = \frac{u \cdot z}{h} \frac{\partial h}{\partial x} + \left\{ F\left(\frac{z}{h}\right) - F(0) \right\} \frac{\partial h}{\partial t} \dots\dots\dots (5)$$

一般に $F(0) = 0$ となることは明らかであるが、Boussinesq⁴⁾ は (4) 式の代りに次式を仮定している。

$$w = \frac{u \cdot z}{h} \left(\frac{1}{u_m} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \dots\dots\dots (5)$$

この (5) 式は定常流では常に成立しているが、不定流では一般的に成立せず、とくに流速分布が水深に無関係ないわゆる移動波型流速分布をもつときにはのみ正しいということを証明できる。従つてここでは (4) 式を用いて一般的に解析を進めるが、圧力 p の分布は

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \cos \theta - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (6)$$

で与えられる。ここに ρ は流体密度、 g は重力加速度、 θ は水路床の傾斜角である。この (6) 式に (2) および (4) 式を代入して、 z かな h まで積分して圧力を求めると、

$$\begin{aligned} p = & \rho g \cos \theta (h - z) + \rho h u_m^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \int_n^1 m f^2(m) dm + \rho h u_m \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \int_n^1 \{ m f(m) + f(m) F(m) \} dm \\ & + \rho h \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \int_n^1 F(m) dm + \rho h \frac{\partial u_m}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} \int_n^1 m f(m) dm + \rho u_m \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} \int_n^1 \{ f(m) F(m) \\ & + m f'(m) F(m) - m f(m) - m^2 f'(m) - m f^2(m) \} dm - \rho u_m^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \int_n^1 m f^2(m) dm \\ & + \rho \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 \int_n^1 \{ f(m) F(m) - m f(m) \} dm \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

となる。ここに m および n は z/h をあらわし、 $f'(m)$ は $f(m)$ の微分函数である。なお上式では $-T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ で表わされる表面張力による影響は無視している。(7) 式を用いると運動量およびエネルギーの關係に従つてつぎの鉛直加速度を考慮した基礎運動方程式をうる事ができる。

運動量の關係：

$$\left. \begin{aligned} h \frac{\partial u_m}{\partial t} + u_m \frac{\partial h}{\partial t} + g \frac{\partial M}{\partial x} &= gh \sin \theta - \frac{\tau}{\rho}, \\ gM &= \alpha_m h u_m^2 + \frac{gh^2 \cos \theta}{2} + r h^2 u_m^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + (\beta + \varepsilon) h^2 u_m \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + \delta h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \\ &+ \beta h^2 \frac{\partial u_m}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} + (\varepsilon + \eta - \beta - r - \zeta) h u_m \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} - r h u_m^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \\ &+ (\varepsilon - \beta) h \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \right\} (8)$$

エネルギーの關係：

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{\alpha_m - \alpha_e}{2} \frac{u_m}{h} \frac{\partial h}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} &= g \sin \theta - \frac{\tau}{\rho h}, \\
 gH &= \frac{\alpha_e}{2} u_m^2 + gh \cos \theta + r' h u_m^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + (\beta' + \varepsilon') h u_m \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + \delta' h \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \\
 &+ (\varepsilon' + \eta' + \alpha_e'' - \beta' - \zeta' - r') u_m \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} + \beta' h \frac{\partial u_m}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\alpha_e''' - 2r'}{2} u_m^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \\
 &+ \frac{\alpha_e' + 2\varepsilon' - 2\beta'}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)^2
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに、流速分布による補正係数 $\alpha_m, \alpha_e, \dots$ はつぎのようにあらわされる。

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_m &= \int_0^1 f^2(m) dm, \quad \alpha_e = \int_0^1 f^3(m) dm, \quad \alpha_e' = \int_0^1 f(m) F^2(m) dm, \\
 \alpha_e'' &= \int_0^1 m f^2(m) F(m) dm, \quad \alpha_e''' = \int_0^1 m^2 f^3(m) dm, \quad \beta = \int_0^1 \int_n^1 m f(m) dmdn, \\
 r &= \int_0^1 \int_n^1 m f^2(m) dmdn, \quad \delta = \int_0^1 \int_n^1 F(m) dmdn, \quad \varepsilon = \int_0^1 \int_n^1 f(m) F(m) dmdn, \\
 \zeta &= \int_0^1 \int_n^1 m^2 f'(m) dmdn, \quad \eta = \int_0^1 \int_n^1 m f'(m) F(m) dmdn, \quad \beta' = \int_0^1 f(n) \int_n^1 m f(m) dmdn, \\
 r' &= \int_0^1 f(n) \int_n^1 m f^2(m) dmdn, \quad \delta' = \int_0^1 f(n) \int_n^1 F(m) dmdn, \quad \varepsilon' = \int_0^1 f(n) \int_n^1 f(m) F(m) dmdn, \\
 \zeta' &= \int_0^1 f(n) \int_n^1 m^2 f'(m) dmdn, \quad \eta' = \int_0^1 f(n) \int_n^1 m f'(m) F(m) dmdn
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

以上の関係式において鉛直加速度の影響による項を省略すれば、一般に用いられる開水路基礎方程式となることとはいうまでもない。

開水路の水流ではもちろん流速は水深とともに変化する。しかしながら移動波においては各断面内の流速分布の一樣性を仮定しているから、 $f(m)=1, f'(m)=0$ および $F(m)=m$ となり、(10) 式の補正係数はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_m &= \alpha_e = 1, \\
 \alpha_e' &= \alpha_e'' = \alpha_e''' = \beta = r = \delta = \varepsilon = \beta' = r' = \delta' = \varepsilon' = 1/3, \\
 \zeta &= \eta = \zeta' = \eta' = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

という一定の値をもつ。この (11) 式で示される補正係数値をもつた (8) および (9) 式がここで取扱うクノイド波の基本方程式である。

3. クノイド波

permanent 型の進行波は一定の伝播速度 v_w で動く座標系より見れば定常化されるから、この座標系に変換して考察を進める。従つて下流に伝わる波に対して

$$\left. \begin{aligned}
 u_m(x, t) &= u_m(x - v_w t) = u_m(\zeta) \\
 h(x, t) &= h(x - v_w t) = h(\zeta)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

であり、これより得られる $\frac{\partial u_m}{\partial x} = \frac{du_m}{d\zeta}, \frac{\partial u_m}{\partial t} = -v_w \frac{du_m}{d\zeta}, \dots$ の関係を (1) 式に代入すれば、

$$(u_m - v_w) \frac{dh}{d\zeta} + h \frac{du_m}{d\zeta} = 0, \dots\dots\dots (13)$$

すなわち著者らが転波列の水利学的特性を考察したときと同様な進行流量に関する次式が得られる。

$$(v_w - u_m)h = K \dots\dots\dots (14)$$

また波の速さ c を導入すると、この場合には $v_w = u_m + c$ であるから、上式はつぎのようにあらわされる。

$$c = K/h \dots\dots\dots (15)$$

同様な計算を (8) 式について行い、 u_m を消去すると、

$$\frac{K^2}{3} \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{d^2 h}{d\zeta^2} - \frac{1}{h} \left(\frac{dh}{d\zeta} \right)^2 \right] + \left(gh \cos \theta - \frac{K^2}{h^2} \right) \frac{dh}{d\zeta} = gh \sin \theta - \frac{\tau}{\rho} \dots\dots\dots (16)$$

となる。この式の解が permanent 型の移動波の波形を示すはずであるが、一般に解くことは困難である。またこの式は鉛直加速度を考えた不等流の水面形を与えるものと同様であつて、これを線型化するときわめて興味のある種々の水面形が得られるが、これらは改めて論ずるつもりである。ここでは上式の特殊の場合として $gh \sin \theta - \tau/\rho = 0$ なる条件で考察するが、これは水平底では摩擦力を無視した場合に相当する。この場合無限遠でもなお

擾乱が存在するものと仮定すれば, $\frac{dh}{d\zeta}$ および $\frac{d^2h}{d\zeta^2}$ は消えないから, (16) 式は

$$\frac{d^2h}{d\zeta^2} - \frac{1}{h} \left(\frac{dh}{d\zeta}\right)^2 = \frac{3C_m}{2K^2} - \frac{3}{h} - \frac{3g \cos \theta}{2K^2} \cdot h^2 \dots\dots\dots (17)$$

となる。ここに C_m は積分常数である。さらに一度積分すれば

$$\left(\frac{dh}{d\zeta}\right)^2 = -\frac{3g \cos \theta}{K^2} \left[h^3 - \frac{C_m K^2}{g \cos \theta} h^2 + \frac{2C_m}{g \cos \theta} h - \frac{K^2}{g \cos \theta} \right] \dots\dots\dots (18)$$

となり, ここに再び C_m' は積分常数である。

同様にエネルギー方程式 (9) より

$$\left(\frac{dh}{d\zeta}\right)^2 = -\frac{3g \cos \theta}{K^2} \left[h^3 - \frac{C_e}{g \cos \theta} h^2 - \frac{K^2 C_e'}{g \cos \theta} h - \frac{K^2}{g \cos \theta} \right] \dots\dots\dots (19)$$

が得られる。ここに C_e および C_e' は積分常数である。

いずれの場合においても上式のカッコ内を0とした方程式は3根をもち, その点で水面形は水路床と平行になる。いまこの根を大きさの順に h_1, h_2, h_3 とすると, いずれも正でなければならぬし, また最小根は $h_3 = K^2/(gh_1 h_2 \cos \theta)$ という関係をもっている。従つて (18) あるいは (19) 式は

$$\left(\frac{dh}{d\zeta}\right)^2 = \frac{3g \cos \theta}{K^2} (h_1 - h)(h - h_2) \left(h - \frac{K^2}{gh_1 h_2 \cos \theta} \right) \dots\dots\dots (20)$$

となる。いま Keulegan と同様に

$$h = h_1 \cos^2 x + h_2 \sin^2 x \dots\dots\dots (21)$$

とおき, 変数変換を行えば, (20) 式は

$$d\zeta = d \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \dots\dots\dots (22)$$

となり, ここに

$$d = \frac{2K}{\sqrt{3g \cos \theta \{h_1 - K^2/(gh_1 h_2 \cos \theta)\}}} \dots\dots\dots (23)$$

および

$$k^2 = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - K^2/(gh_1 h_2 \cos \theta)} \leq 1 \dots\dots\dots (24)$$

である。いま $h_1 = h_1, \zeta = 0$ なる点に原点を選ぶと, (21) 式は Jacobi の cn 函数を用いて, 容易に

$$h = h_2 + (h_1 - h_2) \text{cn}^2(\zeta/d, k) \dots\dots\dots (25)$$

と表わすことができる。上式を初めの座標系に移せば,

$$h = h_2 + (h_1 - h_2) \text{cn}^2 \left[\frac{\sqrt{3g \cos \theta \{h_1 - K^2/(gh_1 h_2 \cos \theta)\}}}{2K} (x - v_w t), \sqrt{\frac{h_1 - h_2}{h_1 - K^2/(gh_1 h_2 \cos \theta)}} \right] \dots\dots\dots (26)$$

である。これは波頂を通る垂直面に対称な, 大きさおよび形の一定である進行波列を表わしている。この波が上に示したように Jacobi の cn 函数で表わされるから, 正弦波と同様にクノイド波といわれ, h_1 および h_2 はそれぞれ波頂および波底の水深を示している。なお h_3 はすでに示したように $K^2/(gh_1 h_2 \cos \theta)$ で表わされる長さのデメンションをもつ量である。これは Keulegan¹⁾ の h_3 とは違つているが, 基礎方程式の形が違う以上当然のことである。

つぎに (26) 式と Keulegan ら¹⁾ の結果とを比較しよう。Keulegan らの符号に従つて, 各水深の等流水深 h_0 よりの変位をダッシュをつけて示せば, $h = h_0 + h', h_1 = h_0 + h_1', h_2 = h_0 - h_2'$ および $h_3 = h_0 - h_3'$ であるから, $h_3 = K^2/(gh_1 h_2 \cos \theta)$ を考え合わせて, 結局,

$$h' = -h_2' + (h_1' + h_2') \text{cn}^2 \left[\sqrt{\frac{3(h_1' + h_2')}{4(h_0 + h_1')(h_0 - h_2')(h_0 - h_3')}} (x - v_w t), \sqrt{\frac{h_1' + h_2'}{h_1' + h_3'}} \right] \dots\dots\dots (27)$$

をうる事ができる。Keulegan らは

$$h' = -h_2' + (h_1' + h_2') \text{cn}^2 \left[\sqrt{\frac{3(h_1' + h_3')}{4h_0^3}} (x - v_w t), \sqrt{\frac{h_1' + h_2'}{h_1' + h_3'}} \right] \dots\dots\dots (28)$$

という結果をえているのであるから, h_0 に対する波高の変位 h_1', h_2' および h_3' の影響があまり大きくない場合には同じ結果となる。これは Keulegan らが (28) 式の結果を理論的に誘導する際に h_0 よりの変位の高次項を無視したからである。従つて, 波高の高い移動波では (26) あるいは (27) 式を用いた方がよいことは明らかで

ある。

4. クノイド波の特性

(1) クノイド波の成立条件 以上に述べたクノイド波の解析においては $h_1 \geq h_2 \geq h_3$ という仮定のもとに議論を進めてきた。この関係と進行流量の関係 $K^2 = (v_w - u_1)^2 h_1^2 = (v_w - u_2)^2 h_2^2 = (v_w - u_3)^2 h_3^2$ とを組み合わせると、

$$\left. \begin{aligned} 1 &\geq \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \geq F_1^2 = \frac{(v_w - u_1)^2}{gh_1 \cos \theta}, \\ \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 &\geq F_2^2 = \frac{(v_w - u_2)^2}{gh_2 \cos \theta} \geq \left(\frac{h_3}{h_2}\right)^2, \quad \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \geq 1, \quad \left(\frac{h_3}{h_2}\right)^2 \leq 1, \\ F_3^2 &= \frac{(v_w - u_3)^2}{gh_3 \cos \theta} \geq \left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2 \geq 1. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

ここに u_1, u_2 および u_3 は h_1, h_2 および h_3 における平均流速であり、 F_1, F_2 および F_3 は上に示したような相対 Froude 数である。これがクノイド波の成立するための必要条件である。すなわちクノイド波では伝播速度で動く座標系より見れば、波頂は常に常流領域に、波底では常流あるいは射流、仮想的水深 h_3 では常に射流領域にあるということである。この関係は水理的には十分に明瞭であるとはいえないが、後に示すようにクノイド波の特別な形である孤立波ではきわめて明らかに示される。

(2) クノイド波の特性 クノイド波の波長 L は (22) 式より、

$$L = 2A F_1(\pi/2, k) \dots\dots\dots (30)$$

で与えられる。ここに $F_1(\pi/2, k)$ は第1種完全楕円積分である。一方、1波長間における相変変位の和が0すなわち $\int_0^L h d\zeta = h_0 \cdot L$ という関係から、(21) および (30) 式を用いて、

$$gh_1 h_2 \cos \theta [h_0 F_1(\pi/2, k) - h_1 E_1(\pi/2, k)] = K^2 [F_1(\pi/2, k) - E_1(\pi/2, k)] \dots\dots\dots (32)$$

が得られる。ここに $E_1(\pi/2, k)$ は第2種完全楕円積分である。さらに進行流量の関係から、

$$v_w = u_0 + (K/h_0) \dots\dots\dots (33)$$

である。

最後に permanent 型の移動波では形を変えずに進むから、 T を波の周期とすれば

$$L = v_w \cdot T \dots\dots\dots (34)$$

である。

以上述べた諸関係式と k を定義した (24) 式を用いれば、定常等流における水理量、波の周期および最大水深が与えられた場合、流水上を伝播するクノイド波として表わされる移動波は完全に特性が決定され、波形を求めることができる。しかしながら実際には h_0 の決定は困難であるから、基本量としては h_0 の代りに最小水深 h_2 したがって波高 $(h_1 - h_2)$ を用いた方が便利である。図-1 はクノイド波の一例を示したもので、比較のために同一の無次元最大波高 $h'_1 = h_1/h_0$ で無次元周期 $T' = (L/v_w)\sqrt{g \cos \theta/h_0}$ の違った二つのクノイド波である。図より明らかなように波長の短い波ではその形が正弦波と非常によく似ているが、波長の長い波ではむしろ Gerstner のトロコイド波と似た形を示すようになる。図-2 は京都大学工学研究所水理実験室内の水路で行った実験結果を示したものであるが、丸印で示した実験値は理論曲線と非常によく一致している。図-3 は無次元波長 $L' = L/h_0$ と無次元波の速さ $c' = c/\sqrt{gh_0 \cos \theta}$ との関係を無次元最大水深をパラメーターとして示したものである。点線は Airy の微小振巾浅海波理論による結果を示し、 $c' = 1$ は長波の伝播速度である。図より明らかなようにクノイド波もやはり分散性であり、伝播速度は波長

図-1 クノイド波の1例
Fig. 1 Typical examples of cnoidal waves

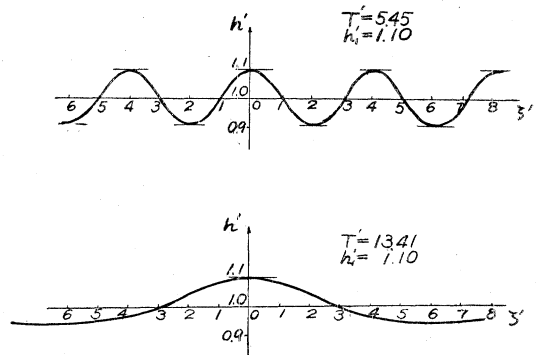
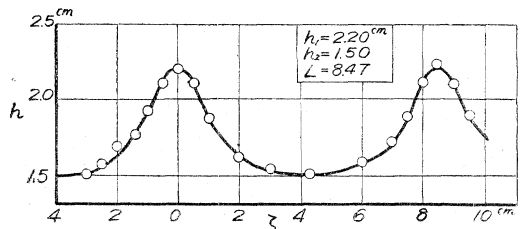


図-2 実験値と理論曲線との比較
Fig. 2 Experimental result compared with theoretical curve.



が長くなるに従い孤立波あるいは有限振巾の長波の伝播速度に近づき、波長が短くなれば反つて微小振巾波の速度より小さくなる。従つてこのクノイド波の適用範囲もおのづから制限があるわけであるが、初めに移動波と考えているから、波長に比べて水深が深くなり、波がむしろ表面波に属するような場合には不適當である。Keulegan はクノイド波の実験を行つて、 $L'=10$ が Stokes の有限振巾波理論とクノイド波理論との限界であり、それ以上の長い波長をもつ波ではクノイド波の理論結果がよく合うと結論づけているが、更に詳細な実験を行うことによつて、その適用範囲を決定しなければならない。

(3) Airy の微小振巾浅海波理論との関係 クノイド波では楕円函数で定義されるから、 k は 0 から 1 の範囲である。しかしながら k が 0 および 1 という極値をとると楕円函数はそれぞれ円函数および双曲線函数となる。ここでは前者の場合のみを考えると、 $K^2/(gh_1h_2\cos\theta)$ は 0 でないから (32) 式より $h_1 \rightarrow h_0$ となり、(24) 式より $h_2 \rightarrow h_1$, 結局 $h_2 \rightarrow h_1 \rightarrow h_0$ ということになる。従つて波長 L は

$$L = \frac{4(v_w - u_0)h_0}{\sqrt{3gh_0\cos\theta - 3(v_w - u_0)^2}} \frac{\pi}{2}$$

となり、波長が水深にくらべて比較的大きいと、すなわち、 $L' \geq 3.626 \dots$ であれば、上式を展開して

$$v_w = u_0 + \sqrt{gh_0\cos\theta \left\{ 1 - \frac{4\pi^2 h_0^2}{L^2} + \frac{16\pi^4 h_0^4}{9L^4} - \dots \right\}} \dots (35)$$

をうる。一方、 u_0 という平均流速をもつて流れている流体上を伝わる微小振巾浅海波の伝播速度は、

$$v_w = u_0 + \sqrt{\frac{g\cos\theta \cdot L}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h_0}{L}} = u_0 + \sqrt{gh_0\cos\theta \left\{ 1 - \frac{4\pi^2 h_0^2}{3L^2} + \frac{32\pi^4 h_0^4}{15L^4} - \dots \right\}} \dots (36)$$

によつて与えられる。(35) および (36) 式を比較すれば、カッコ内の 2 項までは完全に一致しており、従つて十分の精度をもつて波高の小きくなつたクノイド波の伝播速度は Airy の微小振巾波理論によるものと等しいといふことができる。

5. 孤立波

クノイド波では無限遠においてもなお流体の自由表面の勾配や曲率があるものと考えて理論を進めてきたのであるが、ここではその点では流れは完全に定常等流であるとする。すなわち、 $h=h_0$ で $dh/d\zeta$ および $d^2h/d\zeta^2$ は 0 であるとする、積分常数を含む (18) 式は

$$\left(\frac{dh}{d\zeta}\right)^2 = -\frac{3g\cos\theta}{K^2} \left[h^3 - \left(\frac{K^2}{gh_0^2\cos\theta} + 2h_0\right)h^2 + \left(\frac{2K^2}{gh_0\cos\theta} + h_0^2\right)h - \frac{K^2}{g\cos\theta} \right] \dots (37)$$

となる。この式は $h=h_0$ という等根をもち、かつ波は正であると考えれば、

$$\left(\frac{dh}{d\zeta}\right)^2 = \frac{3g\cos\theta}{K^2} (h-h_0)^2 \cdot \left(\frac{K^2}{gh_0^2\cos\theta} - h\right) \dots (38)$$

と書きかえることができる。ここに $K^2/(gh_0^2\cos\theta)$ は最大水深であり、これを h_1 と書き、更に上式を積分すれば、原点を $h=h_1$ とおくことにより

$$h = h_0 + (h_1 - h_0) \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{3g\cos\theta} (h_1 - h_0) / 2K \cdot (x - v_w t) \right] \dots (39)$$

が得られる。これは孤立波の波形を与えることは明らかであつて、波形は $\zeta=0$ における垂直面に対称であり、自由表面は一様に等流水深に近づくものである。

図-4 は孤立波の一例を示したものである。

これはまた前節において述べたように、クノイド波の極限を考えても誘導することができる。前節³⁾ では $k=0$ という場合であつたが、ここでは $k=1$ の場合を考えると、(32) 式より $K^2/(gh_1h_2\cos\theta) = h_0$ がえら

図-3 波の速さと波長との関係

Fig. 3 Relation between the dimensionless wave celerity and the dimensionless wave length.

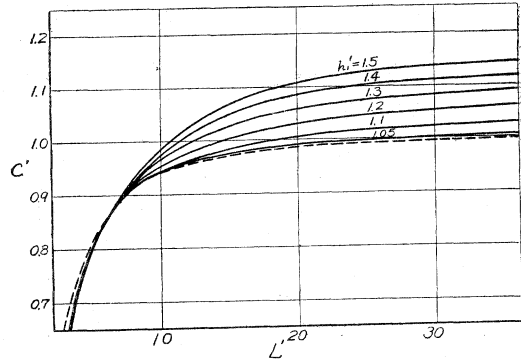
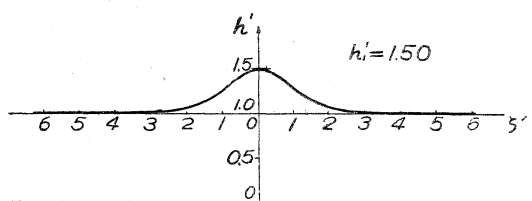


図-4 孤立波の1例

Fig. 4 Typical figure of the solitary wave.



れ、従つて (23) および (24) 式より $h_2 = h_0$, $d = 2K/\sqrt{3g \cos \theta (h_1 - h_0)}$ となることがわかる。この場合の cn 関数は sech 関数となるから、結局 (26) 式は (39) 式と同様に変換され、孤立波を表わすことがわかる。従つて孤立波はクノイド波の特殊な場合と考えることができる。この事実は古くより知られており、H. Lamb¹⁰⁾、Keulegan および Patterson¹⁾ がそれぞれ述べていることである。

孤立波に関する Keulegan¹⁾ らの結果は

$$h' = h_1' \operatorname{sech}^2[\sqrt{3h_1'/4h_0^3} \cdot (x - v_w t)] \dots \dots \dots (40)$$

である。また (39) 式を Keulegan らの符号に従つて書き直せば

$$h' = h_1' \operatorname{sech}^2[\sqrt{3h_1'/4h_0^3(h_0 + h_1')} \cdot (x - v_w t)] \dots \dots \dots (41)$$

となる。この式は Lord Rayleigh の与えた式と一致する。Keulegan らの (40) 式は Boussinesq の結果であつて、波形は (41) 式と少し異なつてくる。M.I.T. で行われた実験によれば Boussinesq, Keulegan および Patterson の結果と一番よく一致しているが、この点については詳細に実験を行つて検討したいと考えている。

すでに少し述べたように、クノイド波の成立条件と同様に孤立波の成立条件をうることができる。すなわち、最高波高の関係式 $h_1 = K^2/g h_0^2 \cos \theta \geq h_0$ および 進行流量の関係式 $K^2 = (v_w - u_0)^2 h_0^2 = (v_w - u_1)^2 h_1^2$ より、容易に

$$\left. \begin{aligned} F_{R0}^2 &= (v_w - u_0)^2 / (g h_0 \cos \theta) \geq 1 \\ F_{R1}^2 &= (v_w - u_1)^2 / (g h_1 \cos \theta) = (h_0/h_1)^2 \leq 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

をうる事ができる。ここに F_{R0} および F_{R1} は相対 Froude 数である。従つて孤立波は伝播速度で動く座標軸系より見れば、波頂は常に常流領域にあり、流れは射流領域にあるといふことができる。これが孤立波の成立条件であつて、特に (42) 式の初めの関係式については K.O. Friedlich および D.H. Heyers¹¹⁾ が非回転性孤立波の成立条件の議論中に指摘している事である。

伝播速度 v_w については、最大波高と進行流量との関係よりただちに

$$v_w = u_0 + \sqrt{g h_1 \cos \theta}, \text{ および } c = \sqrt{g h_1 \cos \theta} \dots \dots \dots (43)$$

が得られる。(43) 式は初めに S. Russell が経験的に得、理論的に Boussinesq や Rayleigh が誘導したきわめて有名な関係式であることはいうまでもない。

6. 結 論

本文においては鉛直加速度の影響を考慮に入れた高次の開水路水流の基礎方程式にもとづいて、permanent 型の移動波についてその特性の考察を進めたのである。その結果は Keulegan らの示している関係と似た Jacobi の cn 関数を用いて定義されるクノイド波がその波形であり、また Lamb などが指摘しているように孤立波はクノイド波の特殊の場合であること、およびクノイド波の結果が広く用いられている Airy の微小振巾理論による結果とも十分関係づけられるものであるということを確認することができた。もちろん、すでに述べたようにクノイド波はあまりよく知られたものではないが、開水路内を流れる流水上の波や海岸付近、とくに砕波帯に近いところにおける本質的な波を形成しているように思われる。クノイド波の特性がわれわれの容易に実測しうる量によつて決定されることがわかつたから、今後海岸工学の進展、とくに砕波帯附近の現象の解明が進むにつれて、クノイド波の理論結果は孤立波のそれとともにますます大きい意義をもつてあろう。

最後に本研究に対して終始御指導を仰いだ石原教授、岩垣助教授および中央大学林教授、実験および計算に助力された大学院学生松並仁茂君に深く感謝の意を表わす次第である。

参 考 文 献

- 1) G.H. Keulegan and G.W. Patterson: "Mathematical theory of irrotational translation waves", Jour. Res. of the NBS, RP 1273, Vol.24, 1940
- 2) P. Massé: Hydrodynamique fluviale regimes variables (Hermann, Paris, 1935)
- 3) T. Hayashi: "Mathematical study of the motion of intumescences in open channels of uniform slope", Trans. J.S.C.E., No.11, Dec., 1951.
- 4) J. Boussinesq: Eaux courantes, Paris, 1897.
- 5) 石原藤次郎・岩垣雄一・岩佐義朗: "急斜面上の層流における転波列の理論", 土木学会論文集, 第19号, 昭.29
- 6) 岩垣雄一・岩佐義朗: "転波列の水理学的特性について", 土木学会誌, 第40巻, 第1号, 昭.30.1.
- 7) F. Serre: "Contribution à l'etude des écoulements parmanents et variables dans les canaux", La Houille Blanche, Juin-Juillet, 1953.
- 8) A.T. Ippen and D.R.F. Harleman: "Verification of theory for oblique standing waves", Proc. A.S.C.E., Vol.80, Separate No.526, Oct., 1954.
- 9) Y. Iwasa: "The undular jump and its limiting condition for existance", Proc. of the 5th National Congress for Appl. Mech., 1955 (in printing).
- 10) H. Lamb: Hydrodynamics, 6th edition, Cambridge, 1932.
- 11) K.O. Friedlich and D.H. Heyers: "The existence of solitary waves", Comm. on Pure and Appl. Math., Vol.7, No.3, Aug., 1954. (昭. 30. 8. 24)