

# 弾性基礎にある四辺、四隅自由な矩形板の 曲げについて

正 員 能 町 純 雄\*

## ON THE BENDING OF PLATES ON ELASTIC FOUNDATION WHOSE FOUR SIDES AND CORNERS ARE COMPLETELY FREE FROM ANY STRESS

(Trans. of JSCE, No.32, March 1956)  
Sumio Nōmachi, C.E. Member

**Synopsis** This paper expands H. Kiess's investigation of "endliche Fourier Transformation" to the biharmonic differential equation by means of Green's formula for the same equation, and gives the solution for the bending of the rectangular plate on elastic subgrade, whose four sides and corners are completely free from any stress.

**要 旨** 常微分方程式の境界値問題について、有限なフーリエ変換による H.Kiess の広汎な研究<sup>1)</sup>がある。これを重調和微分方程式に拡張し、かつ求めべき函数の有限フーリエ変換の誘導は重調和微分式の "Green の積分" を媒介とすれば、簡単に矩形平板の一般解を求めうる。本文はこの一応用として、弾性基礎にある四辺、四隅自由な矩形板の曲げを解いたものである。

### 1. 有限なフーリエ正弦変換

いま 
$$S_m[f(x)] = \int_0^a f(x) \sin \frac{m\pi}{a} x dx \dots\dots\dots (1)$$

とおけば、 
$$f(x) = \frac{2}{a} \sum_m S_m[f(x)] \sin \frac{m\pi}{a} x,$$

ただし  $m=1, 2, 3, \dots, 0 < x < a$

の関係がある。  $S_m[f(x)]$  は H. Kiess のいわゆる "Endliche Sinustransformation" で  $a$  及び自然数  $n$  によつて定まる量である。同様の意味において  $(0 \cdot a), (0 \cdot b)$  なる矩形領域で積分可能な函数  $W_{xy}$  について次のごとく定める。

$$S_m S_n[W_{xy}] = \int_0^a \int_0^b W_{xy} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dx \cdot dy \dots\dots\dots (2)$$

$(m, n=1, 2, 3, \dots, a > x > 0, b > y > 0)$

### 2. 重調和微分式の Green 積分<sup>2)</sup>

前記の  $W$  の重調和微分式に対する Green の積分は、次の様に書くことができる。

$$\int_0^a \int_0^b \{ (\Delta^2 W) \cdot u - (\Delta^2 u) \cdot W \} dx dy = R(W \cdot u) \dots\dots\dots (3)$$

ただし

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$R(W \cdot u) = \int_0^b \left[ \left\{ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x y^2} \right\} u \right]_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^b \left[ \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right\} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=a} dy + \int_0^b \left[ \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} \frac{\partial W}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^b \left[ \left\{ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right\} W \right]_{x=0}^{x=a} dy + \int_0^a \left[ \left\{ \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right\} u \right]_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \left[ \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=b} dx + \int_0^a \left[ \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial W}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \left[ \left\{ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right\} W \right]_{y=0}^{y=b} dx - 2(1-\nu) \left[ \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} u - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} W \right]_0^a \right]_0^b \dots\dots (4)$$

### 3. 弾性基礎にある四辺四隅自由な矩形板

タワミを  $W$ 、板の曲げ剛性を  $N (= Eh^3/12(1-\nu^2))$ 、 $E$ : 弾性係数、 $h$ : 厚さ、 $\nu$ : ポアソン比、 $K$  を地盤の反力係数、及び荷重の分布を  $q \cdot f_{xy}$  とすれば、弾性基礎上の板の基本微分方程式は

$$\Delta^2 W = \frac{q}{N} f_{xy} - \frac{K}{N} W \dots\dots\dots (5)$$

\* 室蘭工業大学助教授、工学部土木教室

である。またこの場合の境界条件は

$x=0, x=a$  で

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$y=0, y=b$  で

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

$(0,0), (a,0), (0,b), (a,b)$  の四隅点で

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

さて Green の積分式 (3) 中  $u = \sin m \pi x/a \cdot \sin n \pi y/b$  及び右辺に (5) の関係を代入すれば

$$\frac{q}{N} S_m S_n [f_{xy}] - S_m S_n [W] \cdot \left\{ \pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{K}{N} \right\} = R(W \cdot u) \dots\dots\dots (11)$$

上式中、左辺に境界条件 (6), (8) を代入し、さらに

$$\begin{aligned} S_n [W_{ay}] &= -\frac{b}{n\pi} \{ (-1)^n W_{ab} - W_{a0} \} - \left( \frac{b}{n\pi} \right)^2 S_n \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{ay} \right], \\ S_n [W_{oy}] &= -\frac{b}{n\pi} \{ (-1)^n W_{ob} - W_{o0} \} - \left( \frac{b}{n\pi} \right)^2 S_n \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{oy} \right], \\ S_m [W_{xb}] &= -\frac{a}{m\pi} \{ (-1)^m W_{ab} - W_{ob} \} - \left( \frac{a}{m\pi} \right)^2 S_m \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{xb} \right], \\ S_m [W_{xo}] &= -\frac{a}{m\pi} \{ (-1)^m W_{a0} - W_{o0} \} - \left( \frac{a}{m\pi} \right)^2 S_m \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{xo} \right] \end{aligned}$$

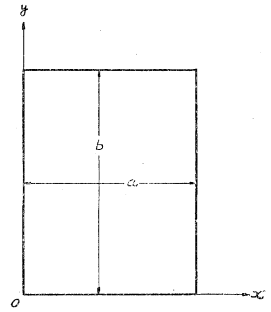
の関係を適用すれば

$$\begin{aligned} R(W \cdot u) &= \pi \left( \frac{m^3}{a^3} + (2-\nu) \frac{mn^2}{ab^2} \right) \left( \frac{b}{n} \right)^2 \left\{ S_n \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{ay} \right] (-1)^m - S_n \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{oy} \right] \right\} \\ &\quad + \pi \left( \frac{n^3}{b^3} + (2-\nu) \frac{m^2 n}{a^2 b} \right) \left( \frac{a}{m} \right)^2 \left\{ S_m \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{xb} \right] (-1)^n - S_m \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{xo} \right] \right\} \\ &\quad + \pi^2 \frac{ab}{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \{ W_{ab} (-1)^{m+n} - W_{a0} (-1)^m - W_{ob} (-1)^n + W_{o0} \} \end{aligned}$$

上式 (11) から  $S_n S_m [W]$  を求めて、その逆変換を作り

$$\begin{aligned} S_n \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{oy} \right] &= \frac{b}{4a^2} (A_n - A_n'), & S_n \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{ay} \right] &= \frac{b}{4a^2} (A_n + A_n') \\ S_m \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{xo} \right] &= \frac{a}{4b^2} (B_m - B_m'), & S_m \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{xb} \right] &= \frac{a}{4b^2} (B_m + B_m') \\ \alpha_n &= \frac{b}{a} n, & \beta_m &= \frac{a}{b} m, & c^4 &= \frac{a^4 K}{\pi^4 N}, & C'^4 &= \frac{b^4 K}{\pi^4 N}, \\ \rho_m(\alpha_n) &= (m^2 + \alpha_n^2)^2 + C^4, & \rho_n(\beta_m) &= (n^2 + \beta_m^2)^2 + C'^4 \\ \left. \begin{aligned} r_n \Big\} &= \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\alpha_n^4 + C^4} \pm \alpha_n^2)}, & r_m \Big\} &= \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\beta_m^4 + C'^4} \pm \beta_m^2)} \\ r_n' \Big\} & & r_m' \Big\} & \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} \sum_m \frac{1 - (-1)^m}{1 + (-1)^m} \frac{m}{\rho_m(\alpha_n)} \sin m \pi \xi &= \frac{\pi}{2 C^2} \begin{Bmatrix} P_{n\xi}^{(1)} \\ P_{n\xi}^{(2)} \end{Bmatrix}, \\ \sum_m \frac{1 - (-1)^m}{1 + (-1)^m} \frac{m(m^2 + \alpha_n^2)}{\rho_m(\alpha_n)} \sin m \pi \xi &= \frac{\pi}{2} \begin{Bmatrix} Q_{n\xi}^{(1)} \\ Q_{n\xi}^{(2)} \end{Bmatrix}, \\ \frac{P_{n\xi}^{(1)}}{P_{n\xi}^{(2)}} \Big\} &= \frac{\sinh \pi r_n (1 - \xi) \cdot \sin \pi r_n' \xi \pm \sinh \pi r_n \xi \cdot \sin \pi r_n' (1 - \xi)}{\cosh \pi r_n \pm \cos \pi r_n'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)^{3)} \end{aligned}$$

図-1



$$Q_n^{(1)} \Big\} = \frac{\cosh \pi r_n (1-\xi) \cdot \cos \pi r_n' \xi \pm \cosh \pi r_n \xi \cdot \cos \pi r_n' (1-\xi)}{\cosh \pi r_n \pm \cos \pi r_n'}$$

$$R_{mn} = \frac{4}{ab} S_m S_n [f_{xy}], \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}$$

とにおいて整理すれば、タワミの解式は

$$W = \frac{qa^4}{N} \sum_m \sum_n \frac{R_{mn}}{\pi^4 \rho_m(\alpha_n)} \sin m \pi \xi \cdot \sin n \pi \eta$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2 C^2} \left[ \left\{ (1-\nu) P_n^{(1)} + \frac{C^2}{\alpha_n^2} Q_n^{(1)} \right\} A_n + \left\{ (1-\nu) P_n^{(2)} + \frac{C^2}{\alpha_n^2} Q_n^{(2)} \right\} A_n' \right] \sin n \pi \eta$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2 C'^2} \left[ \left\{ (1-\nu) P_{m\eta}^{(1)} + \frac{C'^2}{\beta_m^2} Q_{m\eta}^{(1)} \right\} B_m + \left\{ (1-\nu) P_{m\eta}^{(2)} + \frac{C'^2}{\beta_m^2} Q_{m\eta}^{(2)} \right\} B_m' \right] \sin m \pi \xi$$

$$+ W_1 \left[ 1 + \frac{2C^2}{\pi} \sum_n \frac{1-(-1)^n}{n(\alpha_n^4+C^4)} \{ \alpha_n^2 P_n^{(1)} + C^2 Q_n^{(1)} - C^2 \} \sin n \pi \eta \right]$$

$$+ W_2 \left[ (1-2\eta) + \frac{2C^2}{\pi} \sum_n \frac{1+(-1)^n}{n(\alpha_n^4+C^4)} \{ \alpha_n^2 P_n^{(1)} + C^2 Q_n^{(1)} - C^2 \} \sin n \pi \eta \right]$$

$$+ W_3 \left[ (1-2\xi) + \frac{2C^2}{\pi} \sum_n \frac{1-(-1)^n}{n(\alpha_n^4+C^4)} \{ \alpha_n^2 P_n^{(2)} + C^2 Q_n^{(2)} - C^2 (1-2\xi) \} \sin n \pi \eta \right]$$

$$+ W_4 \left[ (1-2\xi)(1-2\eta) + \frac{2C^2}{\pi} \sum_n \frac{1+(-1)^n}{n(\alpha_n^4+C^4)} \{ \alpha_n^2 P_n^{(2)} + C^2 Q_n^{(2)} - C^2 (1-2\xi) \} \right]$$

$$\sin n \pi \eta \quad (13)$$

たゞし

$$4W_1 = W_{ab} + W_{a0} + W_{0b} + W_{00}, \quad 4W_2 = -W_{ab} + W_{a0} - W_{0b} + W_{00},$$

$$4W_3 = -W_{ab} - W_{a0} + W_{0b} + W_{00}, \quad 4W_4 = W_{ab} - W_{a0} - W_{0b} + W_{00}$$

4. 境界値方程式

(13) 式中  $A_n, A_n', B_m, B_m', W_1, W_2, W_3, W_4$  は未知数<sup>(1)</sup> でそれぞれ境界条件 (7), (9), (11) によつて求められるが、計算の便宜のため各未知数に対する方程式は、二つの中心線  $x=a/2, y=b/2$  に関する対称性と逆対称性ととの組合せによる4つの場合に分けて、おのおの独立に求めることとする。

(1) 二つの中心線  $x=a/2, y=b/2$  に関して対称的な場合 この場合は (13) 式中  $m, n=1, 3, 5, \dots$  となり境界条件 (7), (9), (11) をこれに適用すれば次の3方程式をうる。

$$H_n^{(1)} A_n - \frac{4}{\pi} \frac{a^3}{b^3} \sum_r \frac{n \beta_r \{ (1-\nu)^2 n^2 + (\nu-2) C'^4 / \beta_r^2 \}}{(n^2 + \beta_r^2)^2 + C'^4} B_r + 8\pi C^2 I_n^{(1)} W_1$$

$$= \frac{2qa^4}{N} \sum_r \frac{R_{rn} \{ r^3 + (2-\nu)r\alpha_n^2 \}}{\pi^2 \{ (r^2 + \alpha_n^2)^2 + C^4 \}} \dots (14)$$

$$H_m^{(1)} B_m - \frac{4}{\pi} \frac{b^3}{a^3} \sum_s \frac{m \alpha_s \{ (1-\nu)^2 m^2 + (\nu-2) C^4 / \alpha_s^2 \}}{(m^2 + \alpha_s^2)^2 + C^4} A_s + 8\pi C'^2 I_m^{(1)} W_1$$

$$= \frac{2qb^4}{N} \sum_s \frac{R_{ms} \{ s^3 + (2-\nu)s\beta_m^2 \}}{\pi^2 \{ (s^2 + \beta_m^2)^2 + C'^4 \}} \dots (15)$$

$$\frac{qa^4}{N} \sum_r \sum_s \frac{rs R_{rs}}{\pi^2 \rho_r(\alpha_s)} + \frac{1}{2C^2} \sum_s \frac{s H_s^{(1)'}}{\alpha_s^2} A_s + \frac{1}{2C'^2} \sum_r \frac{r H_r^{(1)'}}{\beta_r^2} B_r$$

$$= 4\pi C^2 W_1 \sum_s \frac{I_s^{(1)'}}{s \sqrt{\alpha_s^4 + C^4}} \dots (16)$$

上式中

$$m, r, n, s = 1, 3, 5, \dots$$

$$H_n^{(1)} = \frac{1}{\cosh \pi r_n + \cos \pi r_n'} \left[ \left\{ \frac{\sqrt{\alpha_n^4 + C^4}}{\alpha_n^2 C^2} (r_n' C^2 - r_n \alpha_n^2 (1-2\nu)) - \nu^2 r_n \frac{\alpha_n^2}{C^2} \right\} \sin \pi r_n' \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{\sqrt{\alpha_n^4 + C^4}}{\alpha_n^2 C^2} (r_n C^2 + r_n' \alpha_n^2 (1-2\nu)) - \nu^2 r_n' \frac{\alpha_n^2}{C^2} \right\} \sinh \pi r_n \right],$$

$$I_n^{(1)} = \frac{\{ r_n' C^2 - r_n \alpha_n^2 (1-\nu) \} \sin \pi r_n' + \{ r_n C^2 + r_n' \alpha_n^2 (1-\nu) \} \sinh \pi r_n}{n \sqrt{\alpha_n^4 + C^4} (\cosh \pi r_n + \cos \pi r_n')},$$

$$H_s^{(1)'} = \frac{r_s (\sqrt{\alpha_s^4 + C^4} - \nu \alpha_s^2) \sin \pi r_s' - r_s' (\sqrt{\alpha_s^4 + C^4} + \nu \alpha_s^2) \sinh \pi r_s}{\cosh \pi r_s + \cos \pi r_s'}$$

$$(17)$$

$$I_s^{(1)'} = \frac{\tau_s' \sinh \pi \tau_s - \tau_s \sin \pi \tau_s'}{\cosh \pi \tau_s + \cos \pi \tau_s'}$$

なお、 $H_m^{(1)}, I_m^{(1)}$  は  $H_n^{(1)}, I_n^{(1)}$  中の  $\tau_n, \tau_n', \alpha_n, C, n$  を  $\tau_m, \tau_m', \beta_m, C, m$  におきかえ、 $H_r^{(1)'}$  は  $H_s^{(1)'}$  中の  $\tau_s, \tau_s', \alpha_s, C$  を  $\tau_r, \tau_r', \beta_r, C'$  におきかえたものである。ただし

$$\left. \begin{matrix} \tau_s \\ \tau_s' \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\alpha_s^4 + C^4} \pm \alpha_s^2)}, \quad \left. \begin{matrix} \tau_r \\ \tau_r' \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\beta_r^4 + C'^4} \pm \beta_r^2)}$$

(2) 中心線  $x=a/2$  に関して対称的、 $y=b/2$  に関して逆対称的な場合 この場合は、(3)式中  $m=1, 3, 5, \dots$   $n=2, 4, 6, \dots$  となり境界条件 (7), (9) 及び (11) を適用した結果は次の 3 方程式となる。

$$\begin{aligned} H_n^{(1)} A_n - \frac{4}{\pi} \frac{a^3}{b^3} \sum_r \frac{n \beta_r \{ (1-\nu)^2 n^2 + (\nu-2) C'^4 / \beta_r^2 \}}{(n^2 + \beta_r^2)^2 + C'^4} B_r' + 8 \pi C^2 I_n^{(1)} W_2 \\ = \frac{2 q a^4}{N} \sum_r \frac{R_{rn} \{ r^3 + (2-\nu) r \alpha_n^2 \}}{\pi^2 \{ (r^2 + \alpha_n^2)^2 + C^4 \}} \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_m^{(2)} B_m' - \frac{4}{\pi} \frac{b^3}{a^3} \sum_s \frac{m \alpha_s \{ (1-\nu)^2 m^2 + (\nu-2) C^4 / \alpha_s^2 \}}{(m^2 + \alpha_s^2)^2 + C^4} A_s + 8 \pi C'^2 I_m^{(2)} W_2 \\ - \frac{16(2-\nu) C'^4 \beta_m W_2}{\beta_m^4 + C'^4} = \frac{2 q b^4}{N} \sum_s \frac{R_{ms} \{ s^3 + (2-\nu) s \beta_m^2 \}}{\pi^2 \{ (s^2 + \beta_m^2)^2 + C'^4 \}} \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{q a^4}{N} \sum_r \sum_s \frac{r s R_{rs}}{\pi^2 \rho_r(\alpha_s)} + \frac{1}{2 C^2} \sum_s \frac{s H_s^{(1)'}}{\alpha_s^2} A_s + \frac{1}{2 C'^2} \sum_r \frac{r H_r^{(2)'}}{\beta_r^2} B_r' \\ = 4 \pi C^2 W_2 \sum_s \frac{I_s^{(1)'}}{\alpha_s^4 + C^4} \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

上式中

$$\left. \begin{aligned} I_m^{(2)} &= \frac{\{ \tau_m C'^2 + \tau_m' \beta_m^2 (1-\nu) \} \sinh \pi \tau_m - \{ \tau_m' C'^2 - \tau_m \beta_m^2 (1-\nu) \} \sin \pi \tau_m'}{m \sqrt{\beta_m^4 + C'^4} (\cosh \pi \tau_m - \cos \pi \tau_m')} \\ H_m^{(2)} &= \frac{1}{\cosh \pi \tau_m - \cos \pi \tau_m'} \left[ \left\{ \frac{\sqrt{\beta_m^4 + C'^4}}{\beta_m^2 C'^2} (\tau_m C'^2 + \tau_m' \beta_m^2 (1-2\nu)) - \frac{\nu^2 \beta_m^2 \tau_m'}{C'^2} \right\} \sinh \pi \tau_m \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{\sqrt{\beta_m^4 + C'^4}}{\beta_m^2 C'^2} (\tau_m' C'^2 - \tau_m \beta_m^2 (1-2\nu)) - \frac{\nu^2 \beta_m^2 \tau_m}{C'^2} \right\} \sin \pi \tau_m' \right] \\ H_r^{(2)'} &= - \frac{\tau_r (\sqrt{\beta_r^4 + C'^4} - \nu \beta_r^2) \sin \pi \tau_r' + \tau_r' (\sqrt{\beta_r^4 + C'^4} + \nu \beta_r^2) \sinh \pi \tau_r}{\cosh \pi \tau_r - \cos \pi \tau_r'} \end{aligned} \right\} (21)$$

(3) 中心線  $x=a/2$  に関して逆対称的、 $y=b/2$  に関して対称的な場合 この場合は (3) 式中  $m=2, 4, 6, \dots$   $n=1, 3, 5, \dots$  となるから、3 境界条件 (7), (9) 及び (11) を適用すれば、次の諸式が得られる。

$$\begin{aligned} H_n^{(2)} A_n' - \frac{4}{\pi} \frac{a^3}{b^3} \sum_r \frac{n \beta_r \{ (1-\nu)^2 n^2 + (\nu-2) C'^4 / \beta_r^2 \}}{(n^2 + \beta_r^2)^2 + C'^4} B_r + 8 \pi C^2 I_n^{(2)} W_3 \\ - \frac{16(2-\nu) C^4 \alpha_n W_3}{\alpha_n^4 + C^4} = \frac{2 q a^4}{N} \sum_r \frac{R_{rn} \{ r^3 + (2-\nu) r \alpha_n^2 \}}{\pi^2 \{ (r^2 + \alpha_n^2)^2 + C^4 \}} \dots \dots \dots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_m^{(1)} B_m - \frac{4}{\pi} \frac{b^3}{a^3} \sum_s \frac{m \alpha_s \{ (1-\nu)^2 m^2 + (\nu-2) C^4 / \alpha_s^2 \}}{(m^2 + \alpha_s^2)^2 + C^4} A_s' + 8 \pi C'^2 I_m^{(1)} W_3 \\ = \frac{2 q b^4}{N} \sum_s \frac{R_{ms} \{ s^3 + (2-\nu) s \beta_m^2 \}}{\pi^2 \{ (s^2 + \beta_m^2)^2 + C'^4 \}} \dots \dots \dots (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{q a^4}{N} \sum_r \sum_s \frac{r s R_{rs}}{\pi^2 \rho_r(\alpha_s)} + \frac{1}{2 C^2} \sum_s \frac{s H_s^{(2)'}}{\alpha_s^2} A_s' + \frac{1}{2 C'^2} \sum_r \frac{r H_r^{(1)'}}{\beta_r^2} B_r \\ = 4 \pi C'^2 W_3 \sum_r \frac{I_r^{(1)'}}{\beta_r^4 + C'^4} \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

上式中、 $H_n^{(2)}$  及び  $I_n^{(2)}$  は公式 (21) に示す  $H_m^{(2)}, I_m^{(2)}$  の  $C', \beta_m, \tau_m, \tau_m'$  の代わりに  $C, \alpha_n, \tau_n, \tau_n'$  とおいたもので、 $H_m^{(1)}, I_m^{(1)}$  及び  $H_r^{(1)'}, I_r^{(1)'}$  は、それぞれ公式 (17) によつて、 $H_s^{(2)'}$  は公式 (21) によつて与えられる。

(4) 二つの中心線  $x=a/2, y=b/2$  に関して余対称的な場合 この場合は、(13) 式中  $m, n=2, 4, 6, \dots$  であるから境界条件 (7), (9) 及び (11) によつて次の方程式をうる。

$$\begin{aligned} H_n^{(2)} A_n' - \frac{4}{\pi} \frac{a^3}{b^3} \sum_r \frac{n \beta_r \{ (1-\nu)^2 n^2 + (\nu-2) C'^4 / \beta_r^2 \}}{(n^2 + \beta_r^2)^2 + C'^4} B_r' + 8 \pi C^4 I_n^{(2)} W_4 \\ - \frac{16(2-\nu) C^4 \alpha_n W_4}{\alpha_n^4 + C^4} = \frac{2 q a^4}{N} \sum_r \frac{R_{rn} \{ r^3 + (2-\nu) r \alpha_n^2 \}}{\pi^2 \{ (r^2 + \alpha_n^2)^2 + C^4 \}} \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

$$H_m^{(2)} B_m' - \frac{4}{\pi} \frac{b^3}{a^3} \sum_s \frac{m \alpha_s \{ (1-\nu)^2 m^2 + (\nu-2) C^4 / \alpha_s^2 \}}{(m^2 + \alpha_s^2)^2 + C^4} A_s' + 8 \pi C^4 I_m^{(2)} W_4 - \frac{16(2-\nu) C^4 \beta_m}{\beta_m^4 + C^4} W_4 = \frac{2 q b^4}{N} \sum_r \frac{R_{ms} \{ s^3 + (2-\nu) s \beta_m^2 \}}{\pi^2 \{ (s^2 + \beta_m^2)^2 + C^4 \}} \dots (26)$$

$$\frac{q a^4}{N} \sum_r \sum_s \frac{r s R_{rs}}{\pi^2 \rho_r (\alpha_s)} + \frac{1}{2 C^2} \sum_s \frac{s H_s^{(2)'}}{\alpha_s^2} A_s' + \frac{1}{2 C'^2} \sum_r \frac{r H_r^{(2)'}}{\beta_r^2} B_r' = 4 \pi C^2 W_4 \sum_r \frac{I_r^{(2)'}}{\sqrt{\beta_r^4 + C'^4}} - \sqrt{2} \pi C W_4 \frac{\sinh \frac{\pi C}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\pi C}{\sqrt{2}}}{\cosh \frac{\pi C}{\sqrt{2}} - \cos \frac{\pi C}{\sqrt{2}}} \dots (27)$$

上式中

$$I_r^{(2)'} = \frac{\gamma_r \sin \pi \gamma_r' + \gamma_r' \sinh \pi \gamma_r}{\cosh \pi \gamma_r - \cos \pi \gamma_r'} \dots (28)$$

以上の各境界値方程式によつて  $A_n, A_n', B_m, B_m', W_1, W_2, W_3, W_4$  の値<sup>4)</sup> が求められる。

5. 未知数の計算

4組の未知数  $(A_n, B_m, W_1), (A_n', B_m, W_2), (A_n, B_m', W_3), (A_n', B_m', W_4)$  は前記のように、いずれも次のとき3方程式

$$A_n + \sum_r \phi_{rn}^{(1)} B_r + J_n^{(1)} W_0 = L_n^{(1)} \dots (a)$$

$$B_m + \sum_s \phi_{ms}^{(2)} A_s + J_m^{(2)} W_0 = L_m^{(2)} \dots (b)$$

$$\sum_s \psi_s^{(1)} A_s + \sum_r \psi_r^{(2)} B_r + J^{(3)} W_0 = L^{(3)} \dots (c)$$

で関係づけられている。従つて (a), (b) 両式から  $A_n, B_m$  を求め、次に (c) 式によつて  $W_0$  を決定するのであるが、 $A_n, B_m$  の算出には、井口鹿象博士の方法<sup>5)</sup> によることとする。すなわち (b) 式の両辺に  $\phi_{mn}^{(1)}$  を乗じて  $\sum_m$  とした

$$\sum_r \phi_{rn}^{(1)} B_r + \sum_i \sum_r \phi_{rn}^{(1)} \phi_{rs}^{(2)} A_s + W_0 \sum_r \phi_{rn}^{(1)} J_r^{(2)} = \sum_r \phi_{rn}^{(1)} L_r^{(2)}$$

と (a) 式から、 $\sum_r \phi_{rn}^{(1)} B_r$  を消去し、かつ

$$\sum_r \phi_{rn}^{(1)} \phi_{rs}^{(2)} = K_{ns}, \quad L_n^{(1)} - \sum_r \phi_{rn}^{(1)} L_r^{(2)} = L_n, \quad \sum_r \phi_{rn}^{(1)} J_r^{(2)} = J_n$$

とおいて  $A_n$  を

$$A_n = L_n + W_0 J_n + \sum_s K_{ns} A_s$$

のように表わし、上式の  $n$  を  $s$  とおいて  $A_n$  を  $A_s$  に代入し逐次計算して  $A_n$  の値を求める。

6. 数値計算

この応用としては、鋪装板、滑走路板等を考えることができるが板に浮き上りを生ずるとき荷重状態において実際と理論との間に次のような矛盾が存在する。それは 図-2 に示すように実際の場合には浮き上つた部分が基礎と絶縁して基礎反力は存在しないにもかかわらず、理論では負の基礎反力が荷重のごとく作用することであ

図-2

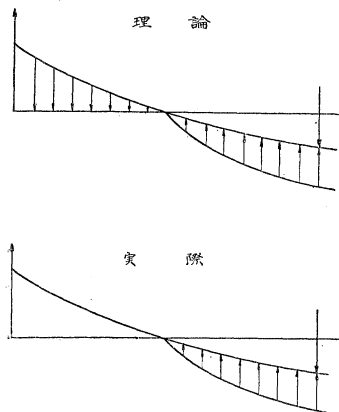
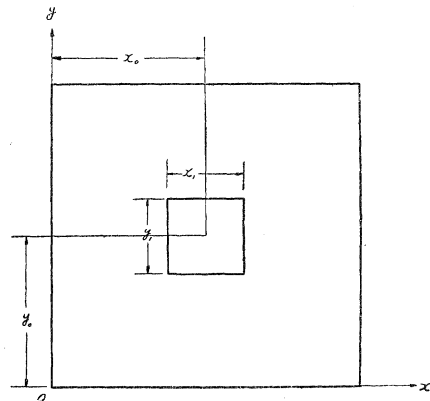


図-3



る。しかし浮き上りは常に荷重の位置から離れた場所に生ずるから、最大曲げ応力や最大沈下に及ぼす影響は小さいと考えることができる。また、この理論では鋪装板のごとき四隅及び周辺の完全に自由な板は、その自重によつて等沈下をなすから<sup>9)</sup>、これを考慮すれば浮き上りはさらに小さくなる。

数値計算に対する諸係数は次の値である。

$$\begin{aligned}
 E &= 210\,000 \text{ kg/cm}^2, & a &= b = 400 \text{ cm} \\
 \nu &= 1/6, & K &= 10 \text{ kg/cm}^3 \\
 h &= 15 \text{ cm}, & N &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 60\,750\,000 \text{ kg}\cdot\text{cm} \\
 \frac{K}{N} &= 1.6461 \times 10^{-7}, & C^4 &= C'^4 = 43\,2652
 \end{aligned}$$

また荷重は 図-3 のとき中央正方形面内

$$x_1 = y_1 = 50 \text{ cm} \quad x_0 = y_0 = 200 \text{ cm}$$

に単位強度  $q$  が等分布する場合、二つの中心線  $x=a/2, y=b/2$  に関してともに対称的であるから、解式 (13) 中  $A_n', B_m', W_2, W_3, W_4$  はすべて消失し荷重項は

$$\begin{aligned}
 \sum_m \frac{R_{mn}}{\pi^4 \rho_m(\alpha_n)} \sin m \pi \xi = & - \frac{2 \sin n \pi/2 \cdot \sin n \pi/8}{\pi^2 n C^2 (\alpha_n^4 + C^4)} \{ \alpha_n^2 (P_{n \cdot (3/8+\xi)}^{(1)} - P_{n \cdot (3/8-\xi)}^{(1)}) \\
 & + C^2 (Q_{n \cdot (3/8+\xi)}^{(1)} - Q_{n \cdot (3/8-\xi)}^{(1)}) \} \dots \dots \dots (29)
 \end{aligned}$$

ただし  $0 < \xi < 3/8$

$$\begin{aligned}
 \sum_m \frac{R_{mn}}{\pi^4 \rho_m(\alpha_n)} \sin m \pi \xi = & - \frac{2 \sin n \pi/2 \cdot \sin n \pi/8}{\pi^2 n C^2 (\alpha_n^4 + C^4)} \{ \alpha_n^2 (P_{n \cdot (3/8+\xi)}^{(1)} + P_{n \cdot (\xi-3/8)}^{(1)}) \\
 & + C^2 (Q_{n \cdot (3/8+\xi)}^{(1)} + Q_{n \cdot (\xi-3/8)}^{(1)}) - C^2 \} \dots \dots \dots (30)
 \end{aligned}$$

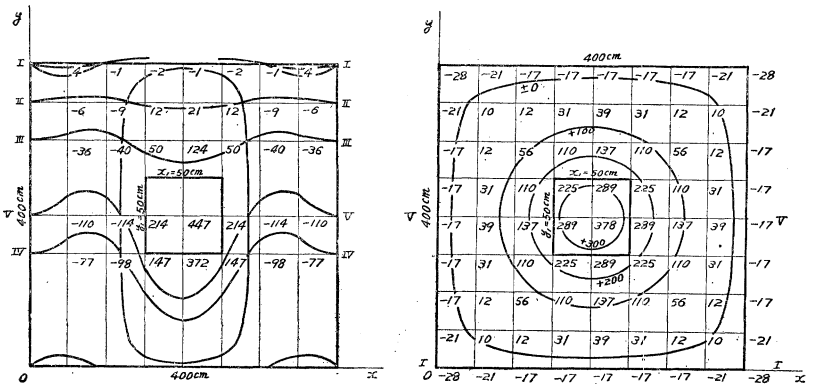
ただし  $3/8 < \xi < 5/8$

$5/8 < \xi < 1$  については、 $x=a/2$  に関する対称性に依つて (29) 式から求められる。また前記の (13) 式及び各境界条件式中、四隅の集中反力が 0 なる条件をはぶいて  $W_1, W_2, W_3, W_4$  を 0 とおけば、四隅点のみにて支えられる周辺自由板の公式をうる

- (1) 四辺、四隅とも完全に自由。
- (2) 四辺完全自由、四隅のみ支持。
- (3) 四辺単純支持。

なる 3 種の境界条件に対する  $x$  方向曲げモーメント、 $M_x$  及び沈下  $W$  の数値計算の結果<sup>1)</sup> を図示すれば、図-4~6 のとおりである。

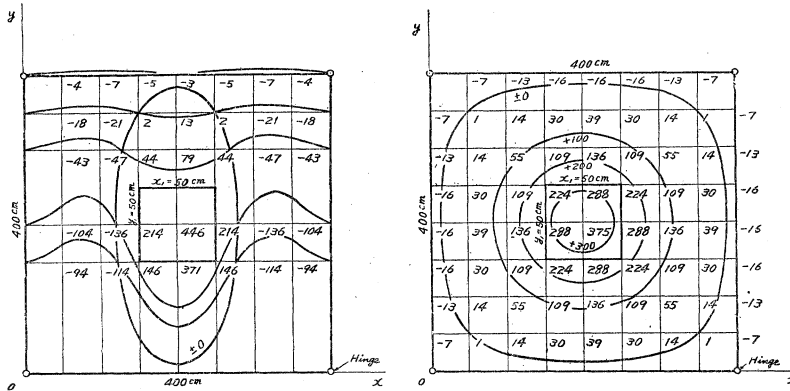
図-4 四辺、四隅とも自由な弾性基礎にある正方形板



$x$  方向各断面  $M_x$  線図 (cm·kg/cm)      等沈下曲線図 (cm)  $W = W' \times 10^{-4} q$   
 図は  $q$  を省略      図は  $W'$  を示す

この 3 種の境界条件につき比較すると、この場合荷重の位置が板の中心部にあるため、最大沈下及び最大曲げ応力に対する境界の影響は、僅少でいづれの最大値もほとんど等しく 1% 前後の差を示すにすぎない。ゆえにこの程度の地盤における板は、中心部の荷重に対して単純支持の板として計算し、その結果を他の二つの境界の板に対して十分適用できる。

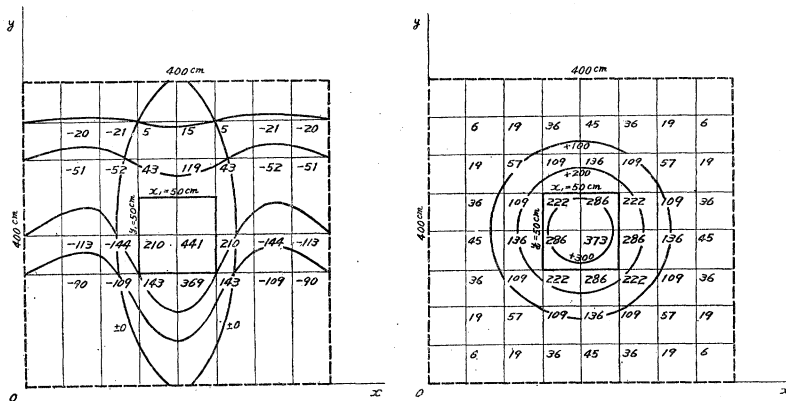
図-5 四辺自由, 四隅のみ支持された弾性基礎にある正方形板



x 方向各断面  $M_x$  線図 (cm·kg/cm)  
図は  $q$  を省略

等沈下曲線図 (cm)  $W = W' \times 10^{-4} q$   
図は  $W'$  を示す

図-6 四辺とも単純支持なる弾性基礎にある正方形板



x 方向各断面  $M_x$  線図 (cm·kg/cm)  
図は  $q$  を省略

等沈下曲線図 (cm)  $W = W' \times 10^{-4} q$   
図は  $W'$  を示す

7. むすび

以上, 有限なフーリエ変換によつて求めた矩形平板の一般解を 応用して従来全く解かれていない, 弾性基礎にある四辺, 四隅とも完全に自由な矩形板, すなわち舗装板のごときもの解を求め, 中心部荷重に対する一数值計算例を示したが, もつとも問題となる隅部荷重の場合については別の機会にゆづることとする。この論文を草するにあたって井口鹿象博士の御指導を頂いた。ここに感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) H. Knies : Lösung von Randwertprobleme bei Systemengewöhnlicher Differentialgleichungen vermittels der endlichen Fourier-Transformation, Math. Zeitsch, 44, S. 266-290 (1939)
- 2) 佐藤常三 : グリーン函数と積分方程式, p.310
- 3) この公式は井口鹿象博士によつて与えられたものである。
- 4)  $A_n, A_n'$  は  $x=0, x=a$  におけるタワミを,  $B_m, B_m'$  は  $y=0, y=b$  におけるタワミを表わす境界値であり,  $W_1$  は板を剛体と考えた場合の並進移動,  $W_2, W_3$  は回転移動,  $W_4$  は単純剪断を示めすものである。
- 5) S. Iguchi : Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platten, S.43, Berlin (1933)
- 6) Schleicher : Kreisplatten auf elastischer unterlage, Berlin (1926)
- 7) 数值計算には  $m$  及び  $n$  を 15 項迄とつて計算した。

(昭.30.7.30)