走行荷重による矩形板の振動に関する一研究

正員 工学博士　成 岡 昌 夫*
准員　平 井 一 男**

A STUDY ON THE FORCED VIBRATION OF RECTANGULAR PLATES UNDER THE ACTION OF MOVING LOADS

(Trans. of JSCE, No.32, March 1956)

By Dr. Eng., Masao Naruoka, Member and, Itsuo Hirai, Assoc. Member

Synopsis The dynamic behaviour of the bridges under the force of moving load is of great importance. Many engineers have investigated this problem in the case of the simple beam, and they could analyse almost perfectly this case. In the highway plate girder bridges, we can not see them as beam, but from many experimental stress analysis, it can be said that the highway plate girder bridges can be thought as the orthotropic rectangular plate. Taking the idea that the moving load on a rectangular plate is the load travelling on the distributed spring constants of different value, the authors obtained the fundamental equation and could determine the deflection curve of rectangular plate under a moving load.

要旨 走行荷重が橋桁に作用する影響は重要であり，橋桁を両端単純支持のハリとして考えた場合は，ほとんど完全に究明されているが，道路橋構造をハリとして考えることは，あまりにも単純化しており，むしろ板として考えた方が適当であり，このような考え方による解析は行われていない。

著者は，板が荷重を受けてタワむのは，ちようどスプリング上に荷重がかかつたとき，スプリングがタワむのと同じであるから，走行荷重が板上を移動する問題を，異なつたバネ常数が分布している上を，荷重が移動するという問題におきかえて，運動方程式をたて，板の自重を無視した場合について，板のタワミを解析的に求めた。

1. 緒　言

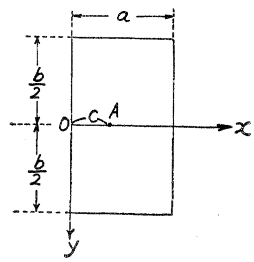
橋梁に作用する活荷重の影響は，橋梁工学上きわめて重要な問題であり，現在までに多くの学者によつて，理論的にも実験的にも研究されてきた。現在においては，橋桁を両端単純支持として考えた場合の理論的解法は，三瀬幸三郎，国井修二郎，Inglis, S. Timoshenko, Stokes によつて，ほとんど完全に究明されたといつてもよい。しかし，これらの解法はすべて桁に対する解法であり，単線鉄道プレートガーダー橋ならば，三瀬・国井の解法で完全である。しかし，道路橋は鉄道橋のように構造が簡単でなく，最近における実験応力解析学的研究によれば，道路橋はむしろ，直交異方性板とみなして解析する方が実際とよくあうといわれている。従つて，走行荷重を受ける道路橋の強制振動を論ずるには，桁としての取扱よりも，板としての取扱が適当であると思う。

走行荷重による橋桁の強制振動論は，多くの人々によつて論じられているが，ある幅員を持つた道路橋の取扱いは，著者の知るかぎりではないように思う。この意味で，ある幅員をもつた道路橋を直交異方性板と考え，この直交異方性板の走行荷重による強制振動を研究すべく，まず第一歩として，等方性矩形板の走行荷重による強制振動を研究したわけである。この考え方を進めてゆけば，もちろん異方性板にも適用できるものである。

ただ本論文においては板の自重を無視している。この点は問題が大きいので，さらに研究したいと考えている。

2. 基礎方程式並びに近似解

図—1



等方性薄板のタワミ曲面の基礎微分方程式は，次の式 (1) で表わされる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{p}{D} \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに，$D=Eh^3/\{12(1-\nu^2)\}$，E：ヤング率，ν：ポアソン比，w：板のタワミ，p：分布荷重，h：板の厚さ。

いま，図—1 のように座標をとり，矩形板の周辺が単純支持されているという境界条件のもとで式 (1) を解くと，点 A$(x=c,\ y=0)$ に荷重 P がかかつたときの $y=0$ 上の任意の点 x におけるタワミ w は，

$$(w)_{y=0}=\frac{Pa^2}{2D\pi^3}\Sigma\frac{\sin(m\pi c/a)}{m^3}\left(\tanh\alpha_m-\frac{\alpha_m}{\cosh^2\alpha_m}\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \quad (2)$$

で表わされる。ただし $\alpha_m=m\pi b/2a$ である。荷重のかかつた点のタワミ w は，

$$(w)_{y=0}=\frac{Pa^2}{2D\pi^3}\Sigma\frac{1}{m^3}\left(\tanh\alpha_m-\frac{\alpha_m}{\cosh^2\alpha_m}\right)\sin^2\frac{m\pi x}{a} \quad \cdots\cdots(3)$$

* 京都大学教授，　**

式 (3) の両辺を P で割ると，

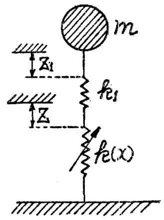
$$f(x)=\frac{1}{k(x)}=\frac{w}{P}=\frac{a^2}{2D\pi^3}\Sigma\frac{1}{m^3}\left(\tanh\alpha_m-\frac{\alpha_m}{\cosh^2\alpha_m}\right)\sin^2\frac{m\pi x}{a}\cdots\cdots(4)$$

となる。式 (4) は，変位を荷重で割つたものであるから，$f(x)$ は $y=0$ 上の x 方向のバネ常数の逆数の函数を表わすことになる。従つて，式 (4) より $y=0$ 上の任意の点のバネ常数の値を決定することができるので，矩形板上を走行荷重が移動する問題を，板の自重を無視できる場合には，異なつたバネ常数が分布している上を荷重が移動する問題に置きかえることができ，3次元の問題を2次元の問題に簡単化することができる。

式 (4) より，矩形板のバネ常数の逆数の函数をフーリエ級数，または，べき級数で近似し，その函数を $f(x)$ とする。

また，一般に走行荷重はスプリングの上に乗つているので，そのバネ常数を k_1 とする。いま走行荷重の質量を m とし，荷重がかからない位置から荷重がかかつた場合のスプリングの変形量を z_1, z とし (図—2 参照)，運動方程式をたてると，次のようになる。

図—2



$$m\frac{d^2z_1}{dt^2}=-k_1(z_1-z)+mg\cdots\cdots(5)'$$

$$k_1(z_1-z)=kz\cdots\cdots(6)$$

荷重が $x=vt$ なる関係で移動している場合には，式 (5)′ は，

$$mv^2\frac{d^2z_1}{dx^2}=-k_1(z_1-z)+mg\cdots\cdots(5)$$

となる。式 (5), (6) より z_1 を消去すれば，

$$\frac{mv^2}{k_1}[f^2+k_1f^3]z''-\frac{2mv^2}{k_1}ff'z'+\left(f^2-\frac{mv^2}{k_1}ff''+\frac{2mv^2}{k_1}f'^2\right)z=f^3mg\cdots\cdots(7)$$

をうる。

特別な場合として，$k_1\to\infty$ の場合には，式 (6) は

$$mv^2\frac{d^2z}{dx^2}+k(x)z=mg\cdots\cdots(8)$$

となる。両端単純支持のハリの場合には，$k(x)=3EIl/\{x^2(l-x)^2\}$ であるから，式 (7) は

$$mv^2\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{3EIlz}{x^2(l-x)^2}=mg\cdots\cdots(9)$$

となり，ハリの自重を無視した場合について Stokes のたてた基礎方程式と一致する。

式 (5), (6) より z_1 について式をたてると，

$$mv^2\frac{d^2z_1}{dx^2}+\frac{k_1}{1+k_1f(x)}z_1=mg\cdots\cdots(10)$$

を得る。式 (10) の z_1 の係数 $k_1/\{1+k_1f(x)\}$ において，$k_1f(x)$ は，道路橋の場合普通1に比較して非常に小さく，$f(x)$ が最大値をとる場合でも 1/100～1/30 ぐらいの値を示すものであるから，十分な精度をもつて省略することができて，式 (10) は次のようになる。

$$mv^2\frac{d^2z_1}{dz^2}+k_1z_1=mg\cdots\cdots(11)$$

いま，

$$z_1=z_{11}+mg/k_1\cdots\cdots(12)$$

とすると，

$$mv^2\frac{d^2z_{11}}{dx^2}+k_1z_{11}=0$$

となる。さらに $\omega_n{}^2=k_1/mv^2$ とすると，

$z_{11}=A\sin\omega_nx$，ここに A は常数

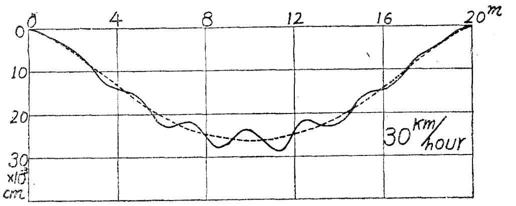
となり，式 (12) より，

$$z_1=A\sin\omega_nx+\frac{mg}{k_1}\cdots\cdots(13)$$

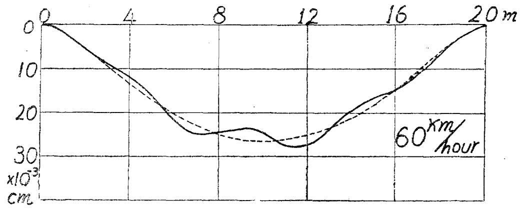
また式 (6) より $z=k_1f(x)z_1/\{1+k_1f(x)\}$ であるから，前と同様に $k_1f(x)$ は1に比較して非常に小さいので，$z\doteqdot(k_1/k)z_1$ とできる。従つて式 (13) より，

$$z=k_1f(x)A\sin\omega_nx+mgf(x)\cdots\cdots(14)$$

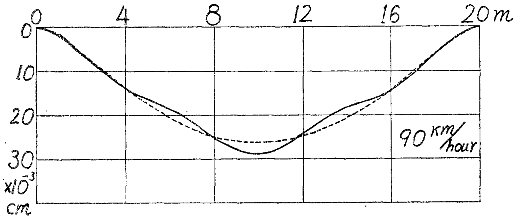
図—3　正方形板の $y=0$ のタワミ曲線
（点線は静的載荷の場合を示す）



図—4　正方形板の $y=0$ のタワミ曲線
（点線は静的載荷の場合を示す）



図—5　正方形板の $y=0$ のタワミ曲線
（点線は静的載荷の場合を示す）



となる。

以上によつて，v なる等速度をもつて走行荷重が矩形板上を移動するときの板のタワミ z を式（14）より算出することができる。

3．数値計算例

いま長さ 20 m，巾 20 m，厚さ 1 m，$E=2.1\times10^5$kg/cm²，$\nu=0$，四辺単純支持矩形の板の中心線（$y=0$）上を10トンの走行荷重が，バネ常数 1 000 kg/cm のスプリングの上に乗つて，毎時 30,60,90 km/h の速度で走る場合，板が $y=0$ どのようなタワミをうけるかを図—3,4,5 に示す。

ただし走行荷重の自由振動の振巾を 2 cm としている。

4．結　　論

以上述べたことを要約すれば，次のように結論できる。すなわち，矩形板上を走行荷重が移動する問題は，数式が複雑となるため，現在までほとんど研究されていないが，上に述べたような考え方をすることにより，板の自重を無視した場合には，式（5），(6) からわかるように，2階の線型微分方程式で表わされる基礎式をたてることができ，普通の道路橋の場合には，式（11）で表わされる常数係数の2階線型微分方程式となるので，その解は（14）式で示される簡単な初等函数で表わすことができた。従つてタワミ曲線を簡単に求めることができる。

式（10）の z の係数 $k_1/\{1+k_1f(x)\}$ において，$k_1f(x)$ を1に比較して非常に小さいとして省略できたのは，普通の道路橋においては，板をスプリングと考えたとき，そのバネ常数が走行荷重の載つているバネ常数の30倍から100倍ぐらいの値を示すからであつて，板がもつと薄くなり，板をスプリングと考えるときのバネ常数が小さくなり，走行荷重の載つているバネ常数と比較し得る程度になると，$k_1f(x)$ を無視することができなくて，式（10）は常数係数を持つ2階線型微分方程式とならないので，簡単に解くことができない。したがつてもつと複雑なタワミ曲線の式となると思われる。そのような場合についても，さらに研究を進めたいと考えている。

上に述べたのは，矩形板の四辺が単純支持されている場合の走行荷重による強制振動であるが，このような考え方により，矩形板に荷重がかかつたときの静的な板のタワミが計算できるならば，四辺固定の場合，二辺支持二辺自由の場合の走行荷重の強制振動にも適用できる。

以上は等方性板の場合であるが，直交異方性板の場合について同様にとけば，スラブを有する桁橋構造上を荷重が走行する場合の振動状態を解明することができると考えている。　（昭．30．8．20）