

曲げ剛性を考慮したケーブルの面内線形自由振動*

FREE IN-PLANE VIBRATION OF A CABLE
WITH BENDING RIGIDITY山口 宏 樹**・宮 田 利 雄***・伊 藤 学****
By Hiroki YAMAGUCHI, Toshio MIYATA and Manabu ITO

1. はじめに

ケーブルはその径に比べて十分細い素線の集合体であって、その変形、および対応する剛性は大変に複雑であるが、曲げ剛性、およびねじれ剛性は全般に小さく、構造システム全体におけるケーブルの挙動を問題とするときにはそれらを無視し、引張材として扱うのが普通である。しかし、このようにケーブルを材軸引張力のみによって力の伝達される部材、つまり完全可撓性を有する 1 次元部材として扱うことに対して十分な検討がなされているわけではなく、曲げ剛性を無視したことによる影響がどの程度なのかははっきりしていないのが現状であろう。また、近年ケーブル部材の適用範囲は拡大され、たとえばプレストレストコンクリート斜張橋の斜張ケーブル、下路アーチ橋の吊材等、径に比して長さの短い使われ方も少なくないため、曲げ剛性が有意となる場合がいかなる場合であるかを知っておく必要があるように思われる。とはいってもケーブルは引張材としての機能を十分に活用する部材であるわけで、フレキシブルであることに変わりはなく、その動的問題が設計上重みを占めると考えられる。したがってケーブルの曲げ抵抗がその挙動にどの程度影響するかを知っておくことは、特にケーブルの動特性を論ずるうえで検討しておくべき問題であるといえる。

このような観点から、本論文では曲げ抵抗がケーブルの固有振動特性にいかに影響するかを論ずる。ケーブルはその曲げ剛性が無視し得ないとしてもやはりフレキシブルな部材を意味し、ケーブルの動特性としては 3 次元

空間での挙動を問題とすべきであるが、その扱いは大変に複雑となるため本論文では面内問題に限定している。まず、ケーブルを伸び、曲げ 2 方向、ねじれの 4 つの変形パラメーターを有する充実断面 1 次元部材として考えたときの基礎方程式から、面内曲げ振動の支配方程式を導く。そして、最も基本的な動特性としての面内線形固有振動特性について、断面の伸び剛性、曲げ剛性、および問題とする現象の代表長によって定義する曲げ抵抗比が、固有振動数、および固有モードに及ぼす影響を数値パラメーター解析によって示す。

曲げ剛性を考慮したケーブルの動特性に関する研究としては弦について固有振動数に及ぼす曲げ剛性の影響を扱った Ramberger の研究¹⁾、偏平ケーブルのそれを扱った Bauer の研究²⁾、そして振動法によるケーブル張力算定問題に関連した新家らの研究³⁾が挙げられる。特に新家らの研究はケーブル張力の实用算定式に着目しているものの、実験および有限要素法による固有振動解析により曲げ剛性がケーブルの固有振動数と張力との関係に及ぼす影響を明らかにしており興味深い。また曲げ剛性を考慮したケーブルの運動は結局はアーチと同様の支配方程式で表わされ、軸力の作用が逆ではあるもののケーブルの動特性は基本的にはアーチのそれと類似しており、アーチの面内自由振動解析に関する数多くの研究⁴⁾から曲げ剛性を考慮したケーブルの線形固有振動特性の推定がある程度可能であるといえよう。このようなことを踏まえたうえで、本論文は完全可撓性を仮定したケーブルの 3 次元線形自由振動特性に関する著者らの研究⁵⁾と対応させるべく、ケーブルの動特性を支配する 3 つの無次元パラメーター、つまりサグ比、支点間傾斜角、および伝播速度比で整理した面内線形自由振動特性について曲げ抵抗の影響を明らかにするものである。

なお、ケーブルの曲げ剛性はケーブルが素線の集合体であるがために普通の棒材のようにヤング率と断面性状とから一義的に決定され得るものではなく、実験的にも

* 本論文は、第 26 回構造工学シンポジウムにおける論文¹⁾に固有振動解析法および数値パラメーター解析 (パラメーターの追加) を加え、まとめたものである。

** 正会員 工博 東京大学講師 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 横浜国立大学教授 工学部土木工学科

**** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

データがあまり得られていないのが現状であるが、本論文では簡単のためケーブルを均質な曲線棒として扱い、その換算剛性が与えられるものとして考えている。

2. 曲げを考慮したケーブルの支配方程式

(1) 軸力, 曲げ, およびねじりを受ける1次元部材

ケーブルを軸力, 曲げ, およびねじりを受ける1次元部材として考え, 次のような仮定を設ける。

- (i) ケーブルの断面は平面を保持する。
- (ii) ケーブル断面には面内ひずみは生じない。
- (iii) せん断変形, および曲げによる回転慣性は無視する。
- (iv) ねじりに関しては St. Venant のねじりのみを考える。
- (v) ひずみは1に対して十分小さな微小ひずみとする。

仮定 (i)~(iii) はケーブルの断面寸法が部材長に比べて十分に小さい場合に設定され得るものであるが, 波動を論ずる場合には仮定 (iii) による誤差が大きくなり得ることに注意する必要がある。また, 仮定 (iv) はケーブルを円形に近い充実断面の棒として扱うことによるものである。

図-1 に示すように, 任意時刻におけるケーブル重心軸は滑らかな空間曲線と与えられるものとし, その重心線の位置を空間に固定した右手系直交単位ベクトル i_1, i_2, i_3 で分解した成分 $\{x^1, x^2, x^3\}$ で規定するものとする。一方, 任意時刻でのケーブル重心線に沿う長さで定義する曲線座標 (物体固定座標) を s とすれば, 任意時刻 t におけるケーブル重心線上の状態量はパラメーター s , および t を独立変数として表わされる。

また, ケーブル重心線上の任意点での単位接線ベクトル, 単位法線ベクトル, および単位倍法線ベクトルをそれぞれ λ, μ, ν で表わす。

さらに重心軸に直角な断面の主軸2方向に重ねて直交

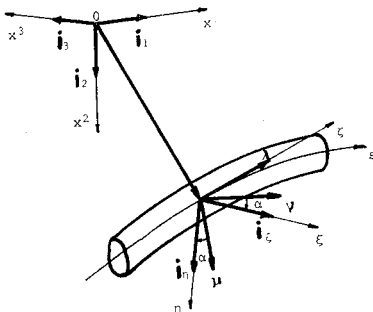


図-1 座標系

直線座標 ξ, η を定め, 重心軸に沿う曲線座標 s を $\{\xi, \eta, s\}$ が右手系となるように選んで物体固定座標を定義する。その単位基ベクトルを i_ξ, i_η, i_s とし, ケーブル断面のねじれ回転を規定するパラメーター α を図-1 のように導入する。

以上のような座標系を用い, 前述の仮定のもとにケーブルの支配方程式を求めると次のようになる^{1), 7)}。

(i) 運動方程式

(たわみ振動)

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{Q_v}{\kappa} e_{ijk} \frac{\partial^2 x^j}{\partial s^2} \frac{\partial x^k}{\partial s} + \frac{Q_\mu}{\kappa} \frac{\partial^2 x^i}{\partial s^2} + T \frac{\partial x^i}{\partial s} \right) - \rho \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} + \bar{X}^i = 0 \quad i=1, 2, 3 \dots (1 \cdot a)$$

(ねじれ振動)

$$\frac{\partial M_T}{\partial s} - \kappa M_\mu - m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \dots (1 \cdot b)$$

(ii) 断面力-変形関係式

$$M_v = -(EI_\xi \kappa \cos^2 \alpha + EI_\eta \kappa \sin^2 \alpha) \dots (2 \cdot a)$$

$$M_\mu = (-EI_\xi + EI_\eta) \kappa \sin \alpha \cos \alpha \dots (2 \cdot b)$$

$$M_T = EJ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} + \tau \right) \dots (2 \cdot c)$$

$$Q_v = - \left(\frac{\partial M_\mu}{\partial s} + \tau M_v + \kappa M_T \right) \dots (2 \cdot d)$$

$$Q_\mu = \frac{\partial M_v}{\partial s} - \tau M_\mu \dots (2 \cdot e)$$

$$T = EA \epsilon \dots (2 \cdot f)$$

(iii) 変形-変位関係式

$$(1 + \epsilon)^2 = \frac{\partial x^j}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial s_0} \dots (3 \cdot a)$$

$$\kappa^2 = \frac{\partial^2 x^j}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial^2 x^j}{\partial s^2} \dots (3 \cdot b)$$

$$\tau = \frac{1}{\kappa^2} e_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 x^j}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial^2 x^k}{\partial s^2} \dots (3 \cdot c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \tau \dots (3 \cdot d)$$

ここで, Q_v, Q_μ はせん断力を ν, μ で分解した成分, T は軸力 (ケーブル張力), また M_v, M_μ は曲げモーメントを ν, μ で分解した成分, M_T はねじりモーメントでありそれぞれケーブルの断面力である。また, ϵ, κ, τ はそれぞれケーブル重心線の伸び率, 曲率, およびねじれ率であり, ρ および m はケーブルの単位長さ当たり質量および極慣性モーメント, EI_ξ, EI_η はケーブル主軸2方向の曲げ剛性, EJ はねじれ剛性, EA は伸び剛性であり, \bar{X}^i は分布外力成分である。さらに, θ はケーブルのねじれ角であって, 式 (3. d) よりわかるようにねじれパラメーター α のみならず, 空間位置 $\{x^1, x^2, x^3\}$ にも関係する。

なお, s_0 は無応力状態のケーブルの重心線に沿う長さで定義する曲線座標を意味し, 添字については総和規約に従うものとする。

(2) 面内曲げ問題

ケーブルは初期状態において i_1-i_2 面内に静止しているものとし、 i_3 方向への変位は i_1, i_2 方向の変位に影響することなく拘束されているものとする。さらにねじれ剛性 EJ を無視し、ねじれに関するパラメーター α を取り除くと、面内曲げ問題の支配方程式が次のように導かれる。

(i) 運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial M}{\partial s} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 x^i}{\partial s^2} + T \frac{\partial x^i}{\partial s} \right) - \rho \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} + \bar{X}^i = 0 \quad i=1, 2 \dots\dots\dots(4)$$

(ii) 断面力-変形関係式

$$T = EA\epsilon, \quad M = -EI\kappa \dots\dots\dots(5 \cdot a, b)$$

(iii) 変形-変位関係式

$$(1+\epsilon)^2 = \frac{\partial x^j}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial s_0}, \quad \kappa^2 = \frac{\partial^2 x^j}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial^2 x^j}{\partial s^2} \dots\dots\dots(6 \cdot a, b)$$

なお、式 (4) は一般的なアーチ (曲線棒) の面内曲げに関する運動方程式として知られている⁵⁾。

3. 面内線形自由振動に及ぼす曲げ抵抗の影響

(1) 面内線形自由振動の支配方程式

あるつり合い状態を基準状態とし、そこからの外力の微小増分、あるいは変位の微小増分を考え、それらによるつり合い状態の変化を表わす線形化された支配方程式、すなわち増分形の支配方程式を導く。変位、断面力、変形、外力の各増分量を δ を付して表わすものとするれば、式 (4) から増分形の運動方程式として次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\partial \delta M}{\partial s} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 x^i}{\partial s^2} + \frac{\partial M}{\partial s} \delta \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 x^i}{\partial s^2} \right) + \delta T \frac{\partial x^i}{\partial s} + T \frac{\partial \delta x^i}{\partial s} \right\} - \rho \frac{\partial^2 \delta x^i}{\partial t^2} + \delta \bar{X}^i = 0 \quad i=1, 2 \dots\dots\dots(7)$$

また式 (5・a, b) から増分形の断面力-変形関係式は、

$$\delta T = EA\delta\epsilon \dots\dots\dots(8 \cdot a)$$

$$\delta M = -EI\delta\kappa \dots\dots\dots(8 \cdot b)$$

さらに式 (6・a, b) から増分形の変形-変位関係式は、

$$\delta\epsilon = \frac{1}{1+\epsilon} \frac{\partial x^j}{\partial s_0} \frac{\partial \delta x^j}{\partial s_0} \doteq \frac{\partial x^j}{\partial s_0} \frac{\partial \delta x^j}{\partial s_0} \dots\dots\dots(9 \cdot a)$$

$$\delta\kappa = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 x^j}{\partial s^2} \frac{\partial^2 \delta x^j}{\partial s^2} \dots\dots\dots(9 \cdot b)$$

したがって式 (9・a, b) を式 (8・a, b) に代入して断面力増分を変位増分で表わし、さらにそれを増分形運動方程式 (7) に代入すれば、変位表示の増分形支配方程式が次のように導かれる。

式が次のように導かれる。

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial^2 \delta x^i}{\partial t^2} + EI \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 x^k}{\partial s^2} \frac{\partial^3 x^k}{\partial s^3} \right) \frac{\partial^2 \delta x^i}{\partial s^2} \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 x^j}{\partial s^2} \left(\frac{\partial^3 x^j}{\partial s^3} - \frac{2}{\kappa^2} \frac{\partial^2 x^k}{\partial s^2} \frac{\partial^3 x^k}{\partial s^3} \frac{\partial^2 x^j}{\partial s^2} \right) \right\} \right. \\ & \left. \cdot \frac{\partial^2 \delta x^i}{\partial s^2} + \left(\frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 x^i}{\partial s^2} \frac{\partial^2 x^j}{\partial s^2} \right) \frac{\partial^3 \delta x^j}{\partial s^3} \right] \\ & - EA \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \epsilon \frac{\partial \delta x^i}{\partial s} + \left(\frac{\partial x^i}{\partial s_0} \frac{\partial x^j}{\partial s_0} \right) \frac{\partial \delta x^j}{\partial s_0} \right\} = \delta \bar{X}^i \end{aligned} \quad i=1, 2 \dots\dots\dots(10)$$

ここで基準状態として静的につり合った初期状態をとる、その位置からの微小振動を考えれば、増分形の線形化された支配方程式から面内線形振動の支配方程式が導かれる。

ケーブルは初期状態において x - y 面内 (鉛直面内) に静止しているものとし、そのつり合い形状を (x_e, y_e) で表わす。またそのつり合い位置からの動的変位を (u, v) で表わすものとする。つまり、

$$x^1 = x_e(s_e), \quad x^2 = y_e(s_e) \dots\dots\dots(11 \cdot a, b)$$

$$\delta x^1 = u(s_e, t), \quad \delta x^2 = v(s_e, t) \dots\dots\dots(12 \cdot a, b)$$

とする。ここで s_e は初期状態でのケーブル重心線に沿う長さで定義する曲線座標である。式 (11・a, b), (12・a, b) を式 (10) に代入し、外力を 0 として整理すれば、曲げ抵抗を考慮したケーブルの面内線形自由振動に関する支配方程式が次のように導かれる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(c_0^2 \frac{1}{x_e'} + c_1^2 x_e'^2 \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} \right. \\ & \left. - c_2^2 \frac{1}{\kappa^2} \left\{ 2 x_e'' x_e''' + y_e'' y_e''' \right\} \right. \\ & \left. - \frac{2}{\kappa^2} (x_e'' x_e''' + y_e'' y_e''') x_e'^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial s_e^2} \\ & \left. - c_2^2 \frac{1}{\kappa^2} x_e''^2 \frac{\partial^3 u}{\partial s_e^3} \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial s_e} \left[c_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} - c_2^2 \frac{1}{\kappa^2} x_e'' \left\{ y_e''' \right\} \right. \\ & \left. - \frac{2}{\kappa^2} (x_e'' x_e''' + y_e'' y_e''') y_e'' \right] \frac{\partial^2 v}{\partial s_e^2} \\ & \left. - c_2^2 \frac{1}{\kappa^2} x_e'' y_e'' \frac{\partial^3 v}{\partial s_e^3} \right] = 0 \dots\dots\dots(13 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(c_0^2 \frac{1}{x_e'} + c_1^2 y_e'^2 \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} \right. \\ & \left. - c_2^2 \frac{1}{\kappa^2} \left\{ x_e'' x_e''' + 2 y_e'' y_e''' \right\} \right. \\ & \left. - \frac{2}{\kappa^2} (x_e'' x_e''' + y_e'' y_e''') y_e'^2 \right] \frac{\partial^2 v}{\partial s_e^2} \\ & \left. - c_2^2 \frac{1}{\kappa^2} y_e''^2 \frac{\partial^3 v}{\partial s_e^3} \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial s_e} \left[c_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} - c_2^2 \frac{1}{\kappa^2} y_e'' \left\{ x_e''' \right\} \right. \end{aligned}$$

$$\frac{-2}{\kappa^2} (x_e'' x_e''' + y_e'' y_e''') x_e'' \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial s_e^2} - c_2^2 \frac{1}{\kappa^2} x_e'' y_e'' \frac{\partial^3 u}{\partial s_e^3} \right\} = 0 \dots\dots\dots (13 \cdot b)$$

ただし、

$$c_0^2 = \frac{H_e}{\rho}, \quad c_1^2 = \frac{EA}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{EI}{\rho} \dots\dots\dots (14 \cdot a, b, c)$$

$$H_e = \frac{EA\epsilon}{x_e'} \dots\dots\dots (15)$$

であり、 c_0 、および c_1 は弦の横波、および縦波の伝播速度である。また $'$ は s_e に関する常微分を意味し、式 (13・a, b) を導くにあたっては微小ひずみの仮定から $ds \doteq ds_e \doteq ds_0$ としている。

なお、式 (13・a, b) で --- 部が曲げ剛性を考慮したことによる付加項で、これを無視すれば完全可撓性ケーブルの面内線形自由振動の支配方程式⁶⁾と一致する。

(2) 固有振動解析

ケーブルの曲げ剛性を考慮した場合、境界条件の固有振動特性に及ぼす影響は大きいと考えられ、前述の Ramberger²⁾、Bauer³⁾ の研究においてもその点に注意を払い、いくつかの境界条件について考察が加えられている。このように曲げ剛性を考慮したケーブルの動特性を考える場合、境界条件は一つのパラメーターとして重要なものとなるが本論文では完全可撓性ケーブルとの対応を考え、境界条件の影響の入らない両端ピン支持の場合を考えた。このときこの境界条件を考慮して面内線形自由振動の解を次のような級数に展開する。

$$u(s_e, t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_x^i(t) \sin \frac{i\pi s_e}{l^*} \dots\dots\dots (16 \cdot a)$$

$$v(s_e, t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_y^i(t) \sin \frac{i\pi s_e}{l^*} \dots\dots\dots (16 \cdot b)$$

ここで p_x^i 、 p_y^i は x 、 y 方向の一般化変位、 l^* は初期ケーブル長である。長さ l^* の弦、あるいは単純はりの n 次基準関数は $\sin \frac{n\pi s_e}{l^*}$ であるから、式 (16・a, b) は曲げを考慮したケーブルの固有振動を弦、あるいは単純はりの基準関数で展開することを意味する。

式 (16・a, b) を支配方程式 (13・a, b) に代入して Galerkin 法を適用する。さらに適当な無次元化を行えば次式を得る。

$$\frac{1}{\frac{\pi^2}{l^2} c_0^2 \cos \theta} \ddot{p}_x^j + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{2ij}{\sigma_i^3 \cos \theta} I_1^* + \frac{2i^2 j \pi}{\sigma_i^4 \cos \theta} r k^2 I_2^* + \frac{2i^3 j \pi^2}{\sigma_i^5 \cos \theta} r k^2 I_3^* \right] p_x^i + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{2ij}{\sigma_i^3 \cos \theta} k^2 I_4^* + \frac{2i^2 j \pi}{\sigma_i^4 \cos \theta} r k^2 I_5^* + \frac{2i^3 j \pi^2}{\sigma_i^5 \cos \theta} r k^2 I_6^* \right] p_y^i = 0$$

$$\frac{1}{\frac{\pi^2}{l^2} c_0^2 \cos \theta} \ddot{p}_y^j + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{2ij}{\sigma_i^3 \cos \theta} I_1^* + \frac{2i^2 j \pi}{\sigma_i^4 \cos \theta} r k^2 I_3^* + \frac{2i^3 j \pi^2}{\sigma_i^5 \cos \theta} r k^2 I_5^* \right] p_y^i + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{2ij}{\sigma_i^3 \cos \theta} k^2 I_4^* + \frac{2i^2 j \pi}{\sigma_i^4 \cos \theta} r k^2 I_10^* + \frac{2i^3 j \pi^2}{\sigma_i^5 \cos \theta} r k^2 I_6^* \right] p_x^i = 0 \quad j=1, 2, \dots \dots\dots (17 \cdot a, b)$$

ここで、 l はスパン長、 θ は支点間傾斜角、 σ_l は無次元ケーブル長 ($=l^*/l$)、 k は伝播速度比 ($=c_1/c_0$) で、 $\ddot{}$ は時間 t に関する 2 階常微分を意味する。また $I_1^* \sim I_{10}^*$ は Galerkin 法による積分項で初期形状に依存する無次元定数である (補遺)。さらに r は曲げ抵抗を考慮したことにより生ずる無次元パラメーターで、次式で表わされる。

$$r = \frac{EI}{l^2} / EA \dots\dots\dots (18)$$

ここではこの r を曲げ抵抗比とよぶことにする。

式 (17・a, b) において級数を有限項で打ち切り、マトリックス表示すれば、

$$\frac{1}{\frac{\pi^2}{l^2} c_0^2 \cos \theta} [I] \{\ddot{p}\} + [A] \{p\} = \{0\} \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 $\{p\}$ は一般化変位ベクトル、 $[I]$ は単位マトリックス、 $[A]$ は係数マトリックスである。

式 (19) に $\{p\} = \{\varphi\} \exp(i\omega t)$ (i : 虚数単位) を代入すれば、

$$\left[[A] - \frac{\omega^2}{\frac{\pi^2}{l^2} c_0^2 \cos \theta} [I] \right] \{\varphi\} = \{0\} \dots\dots\dots (20)$$

となる。したがって $[A]$ の固有値として無次元固有振動数 ω^* が求まる。 ω^* は固有振動数 ω を弦の基本振動数 $\frac{\pi}{l} c_0 \sqrt{\cos \theta}$ で無次元化したものである。

(3) 解析結果、および考察

ケーブルの初期形状をカタナリーとして与え数値パラメーター解析を行った。計算にはすべて 10 項までの級数近似を用いたが、級数項数については完全可撓性ケーブルの場合の考察⁹⁾から 10 項である程度の精度が得られるものと判断した。

a) モード形依存性

$k^2=900$ 、 $\theta=0^\circ$ の場合、 $r=10^{-7}$ 、0.026、0.1 の各サグ比を有するケーブルの低次 5 つの固有振動数 ω^* について、曲げ抵抗比 r の影響をみたものが 図-2 である。横軸が曲げ抵抗比 r 、縦軸は完全可撓性ケーブルの固有振動数 ω_0^* との差を ω_0^* で無次元化した百分率： $\{(\omega^* - \omega_0^*)/\omega_0^*\} \times 100(\%)$ で、両軸とも対数目盛である。

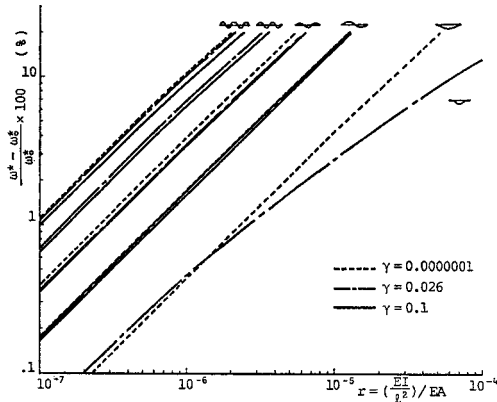


図-2 曲げ抵抗比に対する固有振動数の変化 ($k^2=900, \theta=0^\circ$)

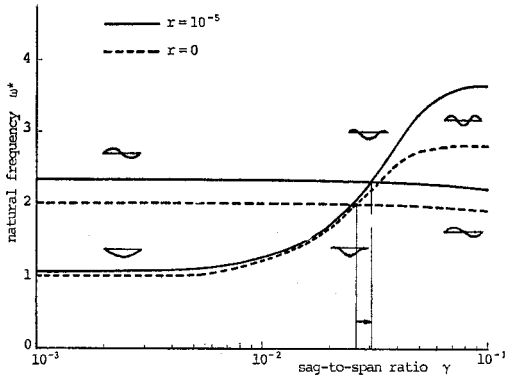
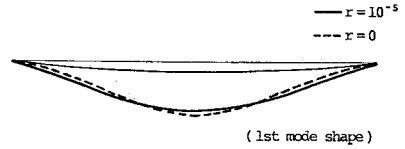


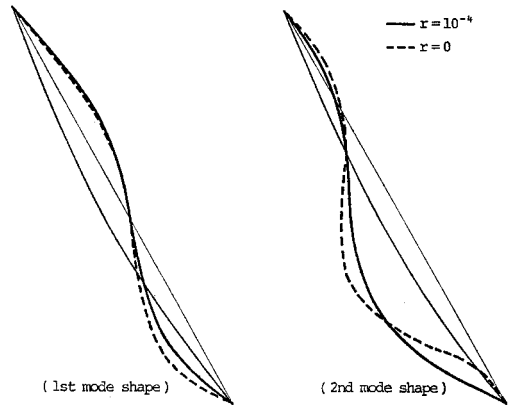
図-3 サグ比に対する固有振動数の変化 ($k^2=900, \theta=0^\circ$)

図-2 で r を固定し、各次振動数への曲げ抵抗の影響に着目すると、曲げを考慮したケーブルの固有振動数 ω^* は完全可撓性ケーブルの振動数 ω_0^* より大きく、その差は振動モードの曲率変化の多い高次振動ほど大きいことがわかる。しかもその割合はサグ比に依存していない。また r を変化させた場合の固有振動数の変化率に着目すると、 $r=0.026$ の場合の1次振動を除いて、振動次数、サグ比によらずほぼ一定であることがいえる。

図-3 には $r=10^{-5}$ の場合の固有振動数曲線(サグ比に対する固有振動数の変化)を完全可撓性ケーブルの場合のそれとともに示した。これをみると、対称モードに対応する固有振動数 ω^* では、サグ比の増加に伴ったモード形の遷移によって曲げ抵抗の影響が次第に大きくなっている。ただ、モード遷移領域内のサグ比では逆に曲げ抵抗の影響は小さい。一方、逆対称モードではサグ比に依存せずに曲げ抵抗の影響はほぼ一定である。その結果、固有振動数曲線の交点が曲げを考慮したことによってサグ比の大きな方へと移動している。したがって、モード遷移領域内のサグ比 ($r=0.026$ はその一例) の場合には、曲げ抵抗比 r の増加に伴ってモード形の変化し



(a) $k^2=900, \theta=0^\circ, \gamma=0.026$



(b) $k^2=900, \theta=60^\circ, \gamma=0.2$

図-4 曲げ抵抗のモード形への影響

ていることが考えられ、モード形が一定と考えられる $r=10^{-7}, 0.1$ の場合と違った変化率を図-2 で示しているといえる。実際モード形を見てみると、 $r=10^{-7}, 0.1$ の場合にはほとんど差がないのに対し、 $r=0.026$ の場合には図-4 (a) に示すように曲げ抵抗を考慮したケーブルのモード形の方が完全可撓性ケーブルのそれより曲率変化が少なくなっている。

一方、傾斜ケーブルの場合 ($\theta=60^\circ$)、完全可撓性ケーブルではサグ比の増加に伴うモード形の遷移がどの振動次数に対しても認められる。モード遷移領域内のサグ比を有するケーブルでは曲げ抵抗比 r の増加に伴ってモード形の変化することが考えられるから、固有振動数 ω^* の r に対する変化率はサグ比、および振動次数によって変化する(図-5, 6)。実際図-4 (b) に示すように、 $r=0.2$ の場合のモード形は1次、2次両振動とも、曲げ抵抗を考慮した場合に曲率変化が少なくなる方向にかなり変化している。なお、図-5 に示した3つのサグ比を有するケーブルは各次振動でモード形が少しずつ異なるため、水平ケーブルの場合の図-2 のように各振動次数での曲げ効果がサグ比に依存しないということはない。また、水平ケーブルの場合と比較して曲げ抵抗の影響が小さいのは、同スパンの傾斜ケーブルの方が支点間距離が長くなることによるといえる。

b) 初期張力依存性

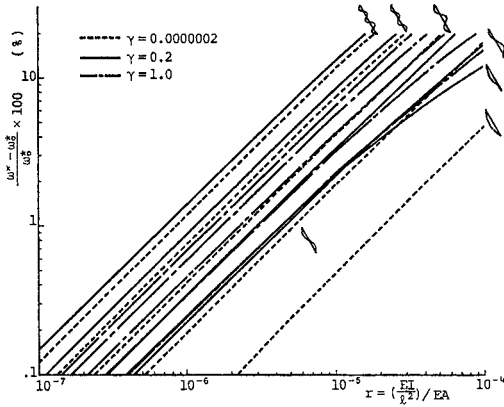


図-5 曲げ抵抗比に対する固有振動数の変化 ($k^2=900, \theta=60^\circ$)

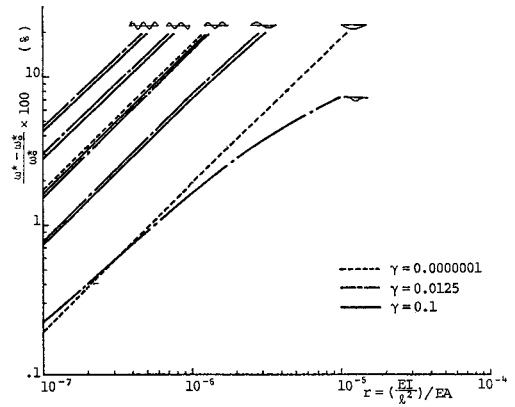


図-7 曲げ抵抗比に対する固有振動数の変化 ($k^2=4\,000, \theta=0^\circ$)

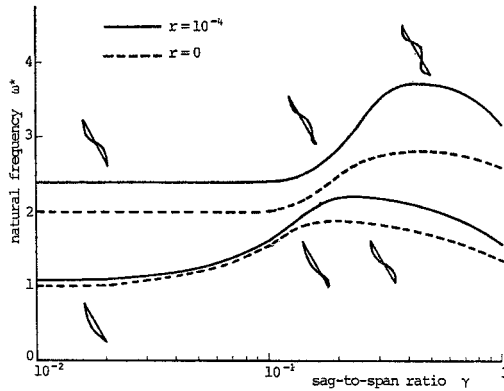


図-6 サグ比に対する固有振動数の変化 ($k^2=900, \theta=60^\circ$)

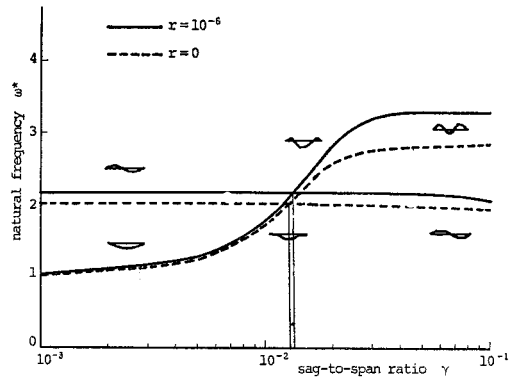


図-8 サグ比に対する固有振動数の変化 ($k^2=4\,000, \theta=0^\circ$)

曲げを考慮したケーブルのたわみに対する剛性は、線形理論では曲げ抵抗パラメーター EI/l^2 、伸び剛性 EA 、それに初期水平張力 H_0 によって決定される。したがって曲げ抵抗の影響は初期水平張力を表わす無次元パラメーター k^2 (伝播速度比 k の2乗、つまり伸び剛性-水平張力比) にも依存するであろうことが予想される。

$k^2=4\,000, \theta=0^\circ$ の場合の低次5つの固有振動数について曲げ抵抗比 r の影響をみたものが図-7、 $r=10^{-6}$ のときの固有振動数曲線を示したものが図-8である。この場合と $k^2=900$ の場合である図-2とを比較すれば、初期水平張力の小さな場合に相当する $k^2=4\,000$ (図-7)の方が固有振動数 ω^* に及ぼす曲げ抵抗の影響が大きいことがわかる。各次振動のモード形を調べるとパラメーター k^2 によってはほとんど変化がみられないことから、このことは a) で述べたモード形依存性とは異なるものであると考えられる。つまり、曲げ抵抗の固有振動数に及ぼす影響は初期水平張力にも依存するといえる。このことは、軸引張力が作用する直棒の曲げ剛性が見かけ上大きくなるという事実から類推できる結果であ

る。

c) 曲げ抵抗比 r

完全可撓性ケーブルとの比較において曲げ抵抗比 r ($=EI/l^2/EA$) の固有振動数に及ぼす影響を図-2、図-5、図-7でみた。ここで示した計算例では $r=10^{-7} \sim 10^{-4}$ に対する結果を与えているが、これまでの一般的な使用例ではさらに小さな 10^{-8} 程度の曲げ抵抗比を有するのではないと思われる。この 10^{-8} という値はPWS 91について、曲げ剛性 EI については新家ら⁹⁾による静的曲げ試験結果から得られた値を、スパン長 l についてはPWSの使用実績⁹⁾から類推した値をそれぞれ用いて概略計算したものである。種々のケーブルについての曲げ剛性の測定値があまりないために一般的な議論は困難であるが、過去のケーブル使用例に関しては低次固有振動に及ぼす曲げ抵抗の影響はそれほど有意でなく、無視できるものと思われる。

なお、計算例の $r=10^{-7} \sim 10^{-4}$ は実際のケーブルでの値よりかなり大きな値であるわけで、特に図-3、4、6に示した $r=10^{-4}, 10^{-5}$ のケーブルは大変に太短いケー

プルとなると思われるが、これはあくまでも完全可撓性ケーブルとの比較において曲げ効果の傾向をはっきり示すことを考えたためであることを断っておく。

4. 結 論

ケーブルの最も基本的な動特性としての面内線形自由振動特性について、曲げ抵抗比 r 、つまり曲げ抵抗パラメーター EI/l^2 と伸び剛性 EA との比を主とした数値パラメーター解析を行った。その結果、次のことが明らかとなった。

(1) 固有振動数に及ぼす曲げ抵抗の影響は振動モード形に大きく依存する。曲げ抵抗を考慮したケーブルの固有振動数は完全可撓性ケーブルのそれより大きく、その差は高次振動ほど大きい。

(2) 完全可撓性ケーブルの場合と同様に、サグ比の変化によるモード遷移領域が存在する。その領域内のサグ比を有するケーブルでは曲げ抵抗を考慮したことによりモード形が有意な変化を示すのに対し、領域外のサグ比を有するケーブルではほとんど変化しない。その結果、固有振動数に及ぼす曲げ効果がサグ比によって異なる。

(3) 傾斜ケーブルの場合はモード形の遷移が水平ケーブルの場合と異なるため、固有振動特性に及ぼす曲げ抵抗の影響も異なる。

(4) 曲げ抵抗の固有振動数に及ぼす影響は初期水平張力にも依存する。

(5) ケーブルの曲げ抵抗の影響が顕著に現われるのは非常に太く短いケーブルであり、既往のケーブル使用例に関しては曲げ抵抗の影響は大変小さく、無視し得る。

補遺 Galerkin 法による積分項

$$I_1^* = \int_0^{\sigma_l} \left(\frac{1}{\xi'} + k^2 \xi'^2 \right) \cos \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \cos \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma \dots\dots (A.1)$$

$$I_2^* = \int_0^{\sigma_l} \frac{1}{\xi''^2 + \eta''^2} \left\{ 2\xi''\xi''' + \eta''\eta''' - \frac{2}{\xi''^2 + \eta''^2} (\xi''\xi''' + \eta''\eta''') \xi''^2 \right\} \cdot \sin \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \cos \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma \dots\dots (A.2)$$

$$I_3^* = \int_0^{\sigma_l} \frac{1}{\xi''^2 + \eta''^2} \xi''^2 \cos \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \cos \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma \dots\dots (A.3)$$

$$I_4^* = \int_0^{\sigma_l} \xi' \eta' \cos \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \cos \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma \dots\dots (A.4)$$

$$I_5^* = \int_0^{\sigma_l} \frac{1}{\xi''^2 + \eta''^2} \xi'' \left\{ \eta''' - \frac{2}{\xi''^2 + \eta''^2} (\xi''\xi''') + \eta''\eta'''' \right\} \sin \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \cos \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma \dots\dots (A.5)$$

$$I_6^* = \int_0^{\sigma_l} \frac{1}{\xi''^2 + \eta''^2} \xi'' \eta'' \cos \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \cos \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma \dots\dots (A.6)$$

$$I_7^* = \int_0^{\sigma_l} \left(\frac{1}{\xi'} + k^2 \eta'^2 \right) \cos \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \cos \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma \dots\dots (A.7)$$

$$I_8^* = \int_0^{\sigma_l} \frac{1}{\xi''^2 + \eta''^2} \left\{ \xi''\xi''' + 2\eta''\eta''' - \frac{2}{\xi''^2 + \eta''^2} (\xi''\xi''' + \eta''\eta''') \eta''^2 \right\} \cdot \sin \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \cos \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma \dots\dots (A.8)$$

$$I_9^* = \int_0^{\sigma_l} \frac{1}{\xi''^2 + \eta''^2} \eta''^2 \cos \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \cos \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma \dots\dots (A.9)$$

$$I_{10}^* = \int_0^{\sigma_l} \frac{1}{\xi''^2 + \eta''^2} \eta'' \left\{ \xi''' - \frac{2}{\xi''^2 + \eta''^2} (\xi''\xi''') + \eta''\eta'''' \right\} \sin \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \cos \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma \dots\dots (A.10)$$

ここで、 $\xi = x_e/l$ 、 $\eta = y_e/l$ は初期座標の無次元量であり、ケーブルの初期形状を表す。また、ここでの'は無次元埋込座標 $\sigma (=s_e/l)$ に関する微分を意味する。

参 考 文 献

- 1) 山口宏樹・富田利雄・伊藤 学：ケーブルの動特性に及ぼす曲げ抵抗の影響，第26回構造工学シンポジウム概要集，1980年2月。
- 2) Ramberger, G.: Die Bestimmung der Normalkräfte in Zuggliedern über ihre Eigenfrequenz unter Berücksichtigung verschiedener Randbedingungen, der Biegesteifigkeit und der Dämpfung, Stahlbau 10/1978.
- 3) Bauer, F.: Näherungsweise Erfassung der Eigenschwingzahlen eines Spannbandes (flachen Seiles), Bauingenieur, 53, 1978.
- 4) 新家 徹・広中邦汎・頭井 洋・西村春久：振動法によるケーブル張力の実用算定式について，土木学会論文報告集，第294号，1980年2月。
- 5) たとえば，崎山 毅：初期荷重を有する変断面任意形アーチの面内自由振動解析，土木学会論文報告集，第287号，1979年7月。
- 6) 山口宏樹・伊藤 学：単一ケーブルの三次元線形自由振動，土木学会論文報告集，第286号，1979年6月。
- 7) 阿井正博：1次元構造要素の幾何学的非線形問題について，東京大学学位論文，1979年3月。
- 8) 日本鋼構造協会技術委員会安全性分科会吊構造小委員会ケーブル研究班：構造用ケーブル材料規格，JSSC, Vol. 14, No. 149, 1978年5月。

(1980.10.8・受付)