

調和型集中外力を受ける矩形板の強制振動について

FORCED VIBRATION OF RECTANGULAR PLATES SUBJECTED
TO A HARMONIC CONCENTRATED FORCE

石川清志*・夏目正太郎**・谷本勉之助***

By Kiyoshi ISHIKAWA, Shotaro NATSUME and Bennosuke TANIMOTO

1. はじめに

静止している板に急激な衝撃力を加えたとき、これ以後に誘起される自由振動が介在する振動開始時付近の過渡現象、あるいは時間に関して周期性をもつ外力が作用することによってみられる共振現象は板の破壊に関連して工学上重要な研究課題であろう。

板の曲げたわみ振動問題において、固有振動数に関する研究はきわめて多い。これらは与えられた板の形状、材料の特性、および境界条件に対する固有振動数の報告、またはそれらを求める解法の報告である。しかし、われわれが知る限りにおいて、板の動的応答についての研究は意外に少ないようである。無限帯板について Fourier-Laplace 変換を用いて解析された渋谷らの研究がある^{2),3)}。これは、時間変動に一定なステップ形集中衝撃荷重が作用した無限帯板の一般解の誘導を明らかにし、その動的挙動を調べたものである。このなかで、集中衝撃荷重に依存する特解（集中静荷重による無限帯板の静たわみ解）は、集中衝撃荷重を Dirac のデルタ関数で表わし、デルタ関数は便宜 Fourier 積分と Fourier 級数の 2 重線形結合によって表示し、級数公式¹⁾を用いることにより 1 重 Fourier 積分形式で誘導されている。また、解析的に類似した研究としては対応原理による矩形板および無限帯板の準静的問題について解析された園田らの研究がある⁴⁾。ここでの集中荷重は、Navier の解¹⁾にみられるような板の自由振動に現われる固有関数と Fourier 級数（無限帯板は Fourier 積分）の 2 重線形結合によって表示され、これに伴って解も 2 重線形結合の形式で誘導されている。いずれも非同次方程式を直接解

いたものである。

本研究は板の曲げたわみに関する強制振動の一解析方法を提案するものである。板は 1 組の対向 2 辺が単純支持された矩形板、および無限帯板を対象とする。これらに作用する強制外力は、時間に依存して周期性をもつ正弦波状の調和型外力、および衝撃荷重を表わす時間変動に一定なステップ形外力とし、座標に関してすべて集中外力の形態とする。

解析のおもな特徴は次のとおりである。

(1) 外力が作用した板の運動方程式は線形の非同次方程式に表わされるが、非同次方程式を直接解くことなく、Lévy の解と同様に、この解は重ね合わせの原理が有効で同次解と特解の和で表わす。それらはそれぞれ別々に境界条件を扱うことにより、固有値問題と境界値問題として独立的に解析される。最後に同次解と特解を合わせて初期条件が満足される解の誘導を明らかにした。

(2) 強制外力に依存する特解の誘導は、外力が時間項をもつことから、与えられた境界条件のもとで共通に時間項を取り除くように特解の微分方程式を解くことになる。この結果、特解は外力に依存した時間項の影響を含み、なおかつすべての境界条件を満足する既知関数として得られる。ただし、単独で特解は初期条件を満足しない。

(3) (2) において、特解を支配する微分方程式はすべて外力項を零とおいた同次方程式と同じ式形より出発する。そして点で表示された集中外力は、Navier の解にみられる 2 重線形結合によって面表示するものと異なり、集中外力の作用線上で板の連続条件^{5),6)}を考慮することにより、1 重 Fourier 級数（帯板は積分形式）で表示する。これに伴って特解も 1 重級数で誘導するものである。

* 正会員 信州大学技官 工学部土木工学科

** 正会員 信州大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博、理博 金沢工業大学教授 土木工学科
(1981 年 5 月 8 日逝去)

2. 運動方程式の解

均質等方性板の曲げたわみに関する運動方程式は次式である。

$$D\nabla^4 w + c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 w ：板の曲げたわみ、 q ：分布外力、 D ：板の曲げ剛性、 c ：質量密度、 $\nabla^4 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)^2$ 、 x, y ：座標、 t ：時間である。板の諸物理量をベクトル表示した状態ベクトル： \mathbf{W} は、

$$\mathbf{W}(x, y, t) = \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ S_x \\ S_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ -D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \\ -D\left(\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \\ D(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \\ -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \end{bmatrix} w \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 θ_x, θ_y ：たわみ角、 M_x, M_y, M_{xy} ：曲げモーメント、 S_x, S_y ：せん断力、 ν ：ポアソン比である。

式 (1) の解 w は w_h と w_p の和で表わすものとす。

$$w = w_h + w_p \dots\dots\dots (3)$$

w_h は式 (1) の同次方程式の同次解、 w_p は外力の影響を受ける特解であって、それぞれ次式を満たす解である。

$$D\nabla^4 w_h + c \frac{\partial^2 w_h}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$D\nabla^4 w_p + c \frac{\partial^2 w_p}{\partial t^2} = q \dots\dots\dots (5)$$

(1) 同次解の誘導

式 (4) の解 w_h は板の自由振動の解であって固有値問題の解析となる。本研究では矩形板の x に関する両縁の支持条件を単純支持に限定して解析する。矩形板の座標は 図-1 にとる。いま次式の無次元量

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{b} (0 < \xi < 1), \quad \eta = \frac{y}{a} (0 < \eta < 1) \\ \tau &= \frac{t}{T} (0 < \tau) : T = \sqrt{\frac{ca^4}{D}} \text{ (時間の単位)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

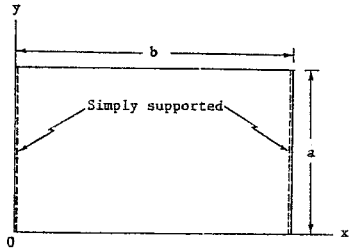


図-1 対向 2 辺が単純支持された矩形板

を導入して、 x に関する境界条件： $[w_h, \partial^2 w_h / \partial \xi^2]_{\xi=0,1} = 0$ を満たし、なおかつ式 (4) を満足する w_h は次式に得る。

$$w_h(\xi, \eta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(\eta, \tau) \sin r_m \xi \dots\dots\dots (7)$$

ここに、

$$r_m = m\pi$$

$$F_m(\eta, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \cos \alpha \eta & \sin \alpha \eta \\ \text{ch } \beta \eta & \text{sh } \beta \eta \end{bmatrix} N_{mn} N_{mn} e^{i\omega_{mn}\tau}$$

$$\alpha_{mn} = \sqrt{\omega_{mn} - \kappa^2 r_m^2}, \quad \beta_{mn} = \sqrt{\omega_{mn} + \kappa^2 r_m^2}$$

$$\kappa = \frac{a}{b}$$

また、 ω_{mn} は無次元円振動数、 N_{mn} は 4 行 1 列 (4-b η -1) の列マトリックスで表示される未定定数、 $\text{ch } \beta \eta = \cosh \beta \eta$, $\text{sh } \beta \eta = \sinh \beta \eta$ 、記号「 \dots 」は行マトリックスを意味する。

(2) 特解の誘導

作用する外力はすべて集中外力を対象にしていることから、外力の作用しない点で成立する特解の微分方程式は式 (5) から

$$D\nabla^4 w_p + c \frac{\partial^2 w_p}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

いま、図-2 に示すように、集中外力： $P(t)$ が板の任意点 (\bar{x}, \bar{y}) に作用した場合、 y 方向に注目して、式 (8) の w_p は $y = \bar{y}$ 線上を境界にして領域に従って定義する。

$$w_p = \begin{cases} w_p^0 (0 < y < \bar{y}) \\ w_p^1 (\bar{y} < y < a) \end{cases} \dots\dots\dots (9)$$

さらに、 $P(t)$ が作用したことによる $y = \bar{y}$ 線上で板の

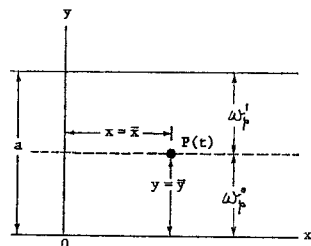


図-2 集中外力が作用した w_p^0, w_p^1 の領域

連続条件は次式である^{5),6)}.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ -D\left(\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \\ -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \end{bmatrix} [w_p^1 - w_p^0]_{y=\bar{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

いま、板に作用する外力は時間に関して正弦波状の調和型外力とする。ここでは式(10)の $P(t)$ を無次元時間 τ で与える。

$$P(\tau) = P_0 \sin p\tau \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 P_0 : 振幅、 p : 無次元円振動数である。

時間に依存して正弦波状の形態を表わし、さらに x に関する境界条件: $[w_p, \partial^2 w_p / \partial \xi^2]_{\xi=0,1} = 0$ および式(8)を満足する解は次式に得る。

$$w_p(\xi, \eta, \tau) = \begin{Bmatrix} w_p^0 \\ w_p^1 \end{Bmatrix} = \sin p\tau \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} G^0(\eta) \\ G^1(\eta) \end{Bmatrix}_m \sin r_m \xi \dots\dots\dots (12)$$

関数 $G_m^0(\eta)$, $G_m^1(\eta)$ は式(9)に定義された領域に従うもので

$$\begin{Bmatrix} G_m^0(\eta) \\ G_m^1(\eta) \end{Bmatrix} = Y_m(\eta) \begin{Bmatrix} M_m^0(0 < \eta < \bar{\eta}) \\ M_m^1(\bar{\eta} < \eta < 1) \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\eta} = \frac{\bar{y}}{a} (0 < \bar{\eta} < 1) \dots\dots\dots (13)$$

と表わされる。ここに、 $Y_m(\eta)$ は $(1-by-4)$ の行マトリックスで表わされる次式のものである。

- (i) $p > \kappa^2 r_m^2$ の場合
 $Y_m(\eta) = \begin{bmatrix} \cos \lambda \eta & \sin \lambda \eta & \text{ch } \mu \eta & \text{sh } \mu \eta \end{bmatrix}_m$
 $\lambda_m = \sqrt{p - \kappa^2 r_m^2}, \mu_m = \sqrt{p + \kappa^2 r_m^2}$
- (ii) $p = \kappa^2 r_m^2$ の場合
 $Y_m(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \eta & \text{ch } \lambda \eta & \text{sh } \lambda \eta \end{bmatrix}_m, \lambda_m = \sqrt{2\kappa^2 r_m^2}$
- (iii) $p < \kappa^2 r_m^2$ の場合
 $Y_m(\eta) = \begin{bmatrix} \text{ch } \lambda \eta & \text{sh } \lambda \eta & \text{ch } \mu \eta & \text{sh } \mu \eta \end{bmatrix}_m$
 $\lambda_m = \sqrt{-p + \kappa^2 r_m^2}, \mu_m = \sqrt{p + \kappa^2 r_m^2}$

また、 M_m^0, M_m^1 はそれぞれ $(4-by-1)$ の列マトリックスで表わされる未定定数である。

次に、 x 方向に関する外力の形態について述べる。一般に式(10)の $P(t)$ は $y = \bar{y}$ 線上に分布した線外力であるから、これを x 方向に関して、 $x = \bar{x}$ 点で集中外力の形態に表わすために、式(11)の $P(\tau)$ を次式に表わす。

$$P(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin r_m \xi, p_m = 2P(\tau) \sin r_m \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}}{b} (0 < \bar{x} < 1) \dots\dots\dots (14)$$

式(12), (14)を(10)に代入し、 $P(\tau) = P_0 \sin p\tau$ を考慮すれば、式(13)の M_m^0 と M_m^1 の間で次式の関

係が得られる^{8),9)}。

$$M_m^1 = M_m^0 + K_m(\bar{x}, \bar{\eta}) \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $K_m(\bar{x}, \bar{\eta})$ は $(4-by-1)$ の列マトリックスで表示される次式のものである。

(i) $p > \kappa^2 r_m^2$ の場合

$$K_m(\bar{x}, \bar{\eta}) = \frac{P_0 a^3}{p \lambda_m \mu_m D} \begin{bmatrix} \mu \sin \lambda \bar{\eta} \\ -\mu \cos \lambda \bar{\eta} \\ -\lambda \text{sh } \mu \bar{\eta} \\ \lambda \text{ch } \mu \bar{\eta} \end{bmatrix}_m \sin r_m \bar{x}$$

(ii) $p = \kappa^2 r_m^2$ の場合

$$K_m(\bar{x}, \bar{\eta}) = \frac{2P_0 a^3}{\lambda_m^3 D} \begin{bmatrix} \lambda \bar{\eta} \\ -1 \\ -\text{sh } \lambda \bar{\eta} \\ \text{ch } \lambda \bar{\eta} \end{bmatrix}_m \sin r_m \bar{x}$$

(iii) $p < \kappa^2 r_m^2$ の場合

$$K_m(\bar{x}, \bar{\eta}) = \frac{P_0 a^3}{p \lambda_m \mu_m D} \begin{bmatrix} \mu \text{sh } \lambda \bar{\eta} \\ -\mu \text{ch } \lambda \bar{\eta} \\ -\lambda \text{sh } \mu \bar{\eta} \\ \lambda \text{ch } \mu \bar{\eta} \end{bmatrix}_m \sin r_m \bar{x}$$

M_m^0 は y に関する境界条件が与えられると決定される。したがって式(15)の関係を用いることにより、式(12)の特解 w_p は決定することができる。

時間に関して一定なステップ形集中外力(集中衝撃荷重)に対する特解を誘導する。いま、ステップ形外力は次式のもとする。

$$P(\tau) = P_0 \dots\dots\dots (16)$$

外力は時間変動に一定であることから、特解の微分方程式は板の静たわみにおける重調和方程式を扱えばよい¹⁰⁾。

$$F^4 w_p = 0 \dots\dots\dots (17)$$

x に関する境界条件: $[w_p, \partial^2 w_p / \partial \xi^2]_{\xi=0,1} = 0$ および式(17)を満足する w_p は式(9)の領域に従って次式に表わす。

$$w_p(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} w_p^0 \\ w_p^1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} G^0(\eta) \\ G^1(\eta) \end{Bmatrix}_m \sin r_m \xi \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 $G_m^0(\eta)$, $G_m^1(\eta)$ は式(13)に定義されるもので、 $Y_m(\eta)$ の内容が異なる次式のものである。

$$Y_m(\eta) = \begin{bmatrix} \text{ch } \lambda \eta & \text{sh } \lambda \eta & \lambda \eta \text{ch } \lambda \eta & \lambda \eta \text{sh } \lambda \eta \end{bmatrix}_m$$

$$\lambda_m = \kappa r_m \dots\dots\dots (19)$$

この場合も式(10)の関係から式(15)が成立し、 $K_m(\bar{x}, \bar{\eta})$ は次式に表わされる。

$$K_m(\bar{x}, \bar{\eta}) = \frac{P_0 a^3}{\lambda_m^3 D} \begin{bmatrix} \text{sh } \lambda \bar{\eta} - \lambda \bar{\eta} \text{ch } \lambda \bar{\eta} \\ -\text{ch } \lambda \bar{\eta} + \lambda \bar{\eta} \text{sh } \lambda \bar{\eta} \\ \text{ch } \lambda \bar{\eta} \\ -\text{sh } \lambda \bar{\eta} \end{bmatrix}_m \sin r_m \bar{x}$$

表-2 B⁰ および B¹ マトリックス

		B ⁰	B ¹
Type of harmonic force	(i)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \mu \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & \operatorname{ch} \mu & \operatorname{sh} \mu \\ -\lambda \sin \lambda & \lambda \cos \lambda & \mu \operatorname{sh} \mu & \mu \operatorname{ch} \mu \end{bmatrix}$
	(ii)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \operatorname{ch} \lambda & \operatorname{sh} \lambda \\ 0 & 1 & \operatorname{sh} \lambda & \operatorname{ch} \lambda \end{bmatrix}$
	(iii)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \mu \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \operatorname{ch} \lambda & \operatorname{sh} \lambda & \operatorname{ch} \mu & \operatorname{sh} \mu \\ \lambda \operatorname{sh} \lambda & \lambda \operatorname{ch} \lambda & \mu \operatorname{sh} \mu & \mu \operatorname{ch} \mu \end{bmatrix}$
Type of step force		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \operatorname{ch} \lambda & \operatorname{sh} \lambda & \lambda \operatorname{ch} \lambda & \lambda \operatorname{sh} \lambda \\ \operatorname{sh} \lambda & \operatorname{ch} \lambda & \operatorname{ch} \lambda + \lambda \operatorname{sh} \lambda & \operatorname{sh} \lambda + \lambda \operatorname{ch} \lambda \end{bmatrix}$

(Note: $\lambda = \lambda_x, \lambda_y, \mu = \mu_x, \mu_y$; α : rectangular plate, γ : infinitely long plate)

3. y 方向に関する境界条件

同次解および特解は y に関する境界条件を満足する自由度をもつ。たとえば、y 方向に関する板の両縁の支持条件は固定とする。

$$\left[\frac{w}{\partial \eta} \right]_{\eta=0,1} = 0, \text{ または}$$

$$\left[\frac{w}{\partial \eta} \right]_{\eta=0,1}^h + \left[\frac{w}{\partial \eta} \right]_{\eta=0,1}^p = 0 \dots (20)$$

これより、同次解、特解に関する境界条件を別々に扱う⁷⁾。すなわち、

$$\left[\frac{w}{\partial \eta} \right]_{\eta=0,1}^h = 0 \dots (21)$$

$$\left[\frac{w}{\partial \eta} \right]_{\eta=0,1}^p = 0 \dots (22)$$

式 (7) を式 (21) に代入すると、4 個の未定定数から構成される N_{mn} は次元数を減じて 1 個の未定定数: Ω_{mn} に従属して表わされる。

$$N_{mn} = P_{mn} \Omega_{mn}$$

$$P_{mn} = \begin{bmatrix} \beta \sin \alpha - \alpha \operatorname{sh} \beta \\ -\beta (\cos \alpha - \operatorname{ch} \beta) \\ -\beta \sin \alpha + \alpha \operatorname{sh} \beta \\ \alpha (\cos \alpha - \operatorname{ch} \beta) \end{bmatrix}_{mn} \dots (23)$$

式 (23) は次式の固有値方程式を満足するときのみ成立する。

$$2 \alpha_{mn} \beta_{mn} (1 - \cos \alpha \operatorname{ch} \beta)_{mn}$$

表-1 式 (24) を満足する固有振動数 ω_{mn}

	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
$l/x = b/a = 1$					
a=1	28.950 850 4	54.743 070 7	102.216 191	170.346 463	258.613 571
a=2	69.327 013 7	94.585 278 2	140.204 505	206.697 098	293.755 685
a=3	129.095 537	154.775 704	199.810 532	265.196 386	351.113 690
a=4	208.391 720	234.585 453	279.651 236	344.537 856	429.678 929
a=5	307.316 149	333.953 184	379.268 447	444.036 623	528.753 911
$l/x = b/a = 2$					
a=1	23.815 626 1	28.950 850 4	39.089 246 6	54.743 070 7	75.841 649 0
a=2	63.534 500 9	69.327 013 7	79.525 120 3	94.585 278 2	114.779 599
a=3	122.929 631	129.095 537	139.622 346	154.775 704	174.785 849
a=4	201.981 598	208.391 720	219.207 156	234.585 453	254.687 567
a=5	300.739 475	307.316 149	318.354 521	333.953 184	354.222 441
$l/x = b/a = 3$					
a=1	22.993 766 7	25.043 584 4	28.950 850 4	35.103 814 5	43.692 169 6
a=2	62.495 527 9	65.007 865 4	69.327 013 7	75.604 983 2	83.987 220 4
a=3	121.802 035	124.516 029	129.095 537	135.612 349	144.146 749
a=4	200.801 690	203.637 317	208.391 720	215.103 206	223.818 075
a=5	299.525 649	302.441 009	307.316 149	314.173 647	323.047 000

(Rectangular plate with two opposite edges simply supported and the other two edges clamped)

$$-(\alpha^2 - \beta^2)_{mn} \sin \alpha_{mn} \operatorname{sh} \beta_{mn} = 0 \dots (24)$$

式 (7), (23) から、すべての境界条件を満足する w_h は次式に得る。

$$w_h(\xi, \eta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(\eta) \Omega_{mn} e^{i\omega_{mn}\tau} \sin r_m \xi \dots (25)$$

$Y_{mn}(\eta)$ は固有関数であり次式のものである。

$$Y_{mn}(\eta) = \begin{bmatrix} \cos \alpha \eta & \sin \alpha \eta & \operatorname{ch} \beta \eta & \operatorname{sh} \beta \eta \end{bmatrix}_{mn} P_{mn}$$

式 (24) は ω_{mn} に対する固有値方程式である。したがって式 (7) から明らかなように、式 (24) が成立する ω_{mn} の取り得る範囲は常に $\omega_{mn} > \kappa^2 r_m^2$ である。この範囲において $r_m (m=1, 2, \dots)$ に対応する式 (24) が満足される ω_{mn} は求め得られる²⁾。Newton 法によって求めた ω_{mn} を表-1 に示す。

次に、式 (22) が満足する w_p を誘導する。式 (22) は式 (9) の関係から、次式に書き換えられる。

$$\left[\frac{w^0}{\partial \eta} \right]_{\eta=0}^p = 0, \quad \left[\frac{w^1}{\partial \eta} \right]_{\eta=1}^p = 0$$

式 (12) あるいは (18) から、上式はすべて次の方程式に表わされる。

$$B_m^0 M_m^0 = 0, \quad B_m^1 M_m^1 = 0 \dots (26)$$

ここに、 B_m^0, B_m^1 はそれぞれ (2-by-4) マトリックスであり表-2 に示す。式 (15) より M_m^0 は次式に決定される。

$$M_m^0 = - \begin{bmatrix} B^0 \\ B^1 \end{bmatrix}_m^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_m \cdot K_m(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \dots (27)$$

M_m^0 が決定されると、式 (15) の関係から M_m^1 も既知となり、結局式 (12) あるいは (18) の w_p は集中外力の作用した形態を含み

得るすべての境界条件を満足する既知関数となる。それゆえ、特解に関しては境界値問題の解析となる。

調和型外力が作用する場合、外力の振動数 p が自由振動における ω_{mn} に合致あるいはこれに近い値を与えるなら、 $p > \kappa^2 r_m^2$ の場合において、板の曲げ振動は共振現象を生じる。すなわち、 $p = \omega_{mn}$ の場合式 (27) における次式の行列式が式 (24) の固有値方程式と合致し零：

$$\det \begin{bmatrix} B^0 \\ B^1 \end{bmatrix}_m = 0$$

となり、 w_p を無限大にしてしまうからである。

4. 初期条件

板の初期条件は静止状態とする。すなわち、

$$\begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial \tau} \end{bmatrix}_{\tau=0} = 0, \text{ または } \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial \tau} \end{bmatrix}_{\tau=0}^h + \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial \tau} \end{bmatrix}_{\tau=0}^p = 0 \dots\dots\dots (28)$$

式 (25) および (12) または (18) を式 (28) に代入すると、次式の方程式を得る。

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(\eta) \begin{bmatrix} 1 \\ i\omega \end{bmatrix}_{mn} \Omega_{mn} + Q G_m(\eta) = 0 \dots\dots (29)$$

ここに、 Q および関数 $G_m(\eta)$ は、

(a) 調和型外力： $Q = \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix}$

(b) ステップ形外力： $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$G_m(\eta) = \begin{cases} G_m^0(\eta) & (0 < \eta < \bar{\eta}) \\ G_m^1(\eta) & (\bar{\eta} < \eta < 1) \end{cases} \dots\dots\dots (30)$$

である。 $Y_{mn}(\eta)$ は固定 ($\eta=0, 1$) を含めた通常の境界条件に対して直交性を有し直交関数である^{(4), (11)}。

$$\int_0^1 Y_{mn}(\eta) Y_{m'n'}(\eta) d\eta = 0, \omega_{mn} \neq \omega_{m'n'} \dots\dots (31)$$

さらに Ω_{mn} は複素未定定数であるから、次式のように書き換えられる。

$$\Omega_{mn} = [1 \quad i] X_{mn}, X_{mn} = \begin{bmatrix} X^i \\ X^r \end{bmatrix}_{mn} \dots\dots\dots (32)$$

したがって X_{mn} は 2 個の実数から構成される未定定数マトリックスである。式 (31), (32) から、式 (29) は、

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ i\omega & -\omega \end{bmatrix}_{mn} X_{mn} + Q H_{mn} = 0 \dots\dots\dots (33)$$

ここに、 H_{mn} は式 (30), (31) の関係から、

$$H_{mn} = \frac{\int_0^1 Y_{mn}(\eta) G_m(\eta) d\eta}{\int_0^1 Y_{mn}^2(\eta) d\eta} = \frac{1}{\int_0^1 Y_{mn}^2(\eta) d\eta} \cdot \left[\int_0^{\bar{\eta}} Y_{mn}(\eta) G_m^0(\eta) d\eta + \int_{\bar{\eta}}^1 Y_{mn}(\eta) G_m^1(\eta) d\eta \right]$$

式 (33) において、 X_{mn} , QH_{mn} はともに実数であり、しかも X_{mn} を求めることに目的をおいているから、虚数項を零とおいても方程式の性質は変わらない。結局 X_{mn} は、

$$X_{mn} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega} \end{bmatrix}_{mn} QH_{mn} \dots\dots\dots (34)$$

のように決定され、矩形板の動的応答問題は完全に解決される。したがって、すべての境界条件および初期条件を満足する w は次式に得る。

$$\left. \begin{aligned} \text{(a) 調和型外力} \\ w(\xi, \eta, \tau) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(\eta) [\cos \omega \tau, -\sin \omega \tau]_{mn} \\ &\quad \cdot X_{mn} \sin \tau_m \xi + \sin p \tau \sum_{m=1}^{\infty} G_m(\eta) \sin \tau_m \xi \\ \text{(b) ステップ形外力} \\ w(\xi, \eta, \tau) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(\eta) [\cos \omega \tau, -\sin \omega \tau]_{mn} \\ &\quad \cdot X_{mn} \sin \tau_m \xi + \sum_{m=1}^{\infty} G_m(\eta) \sin \tau_m \xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

式 (35) を式 (2) に代入することによって矩形板の状態ベクトル： W は得られる。

以上は y の境界条件を固定とした場合の解析であるが、固定以外の境界条件に対しても同様に解析され、式 (23) の P_{mn} , 式 (24) の固有値方程式、および式 (27) の B_m^0 , B_m^1 の内容が異なるだけで w はすべて式 (35) のように表わされる。

5. 無限帯板の動的問題

無限帯板の動的問題は矩形板の場合とまったく同様に解析される。いま、無限帯板の座標を 図-3 にとり、 y に関する両縁の支持条件は固定とする。次の無次元量

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a} \quad (-\infty < \xi < \infty), \quad \eta = \frac{y}{a} \quad (0 < \eta < 1) \\ \tau &= \frac{t}{T} \quad (0 < \tau) : T = \sqrt{\frac{ca^4}{D}} \end{aligned} \right\}$$

を導入して、式 (4) およびすべての境界条件を満足する w_h は次式に得る。

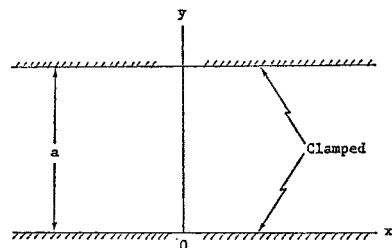


図-3 無限帯板の座標

$$w_b(\xi, \eta, \tau) = \int_0^\infty F_r(\eta, \tau) \begin{bmatrix} \cos r\xi \\ \sin r\xi \end{bmatrix} dr \dots\dots (36)$$

ここに、 $F_r(\eta, \tau)$ は $(1-by-2)$ の行マトリックスで表わされる次式のものである。

$$F_r(\eta, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{rn}(\eta) \Omega_{rn} e^{i\omega_{rn}\tau} \dots\dots (37)$$

Ω_{rn} は 2 個の複素未定定数からなる $(1-by-2)$ の行マトリックス、 $Y_{rn}(\eta)$ は固有関数：

$$Y_{rn}(\eta) = \begin{bmatrix} \cos \alpha\eta & \sin \alpha\eta & \operatorname{ch} \beta\eta & \operatorname{sh} \beta\eta \\ \alpha \cos \alpha\eta & \alpha \sin \alpha\eta & \beta \operatorname{ch} \beta\eta & \beta \operatorname{sh} \beta\eta \end{bmatrix} P_{rn} \dots\dots (38)$$

であり、 ω_{rn} ：無次元円振動数を固有値とした次式の固有値方程式を満足する。

$$2 \alpha_{rn} \beta_{rn} (1 - \cos \alpha \operatorname{ch} \beta)_{rn} - (\alpha^2 - \beta^2)_{rn} \sin \alpha_{rn} \operatorname{sh} \beta_{rn} = 0 \dots\dots (39)$$

なお、 α_{rn} 、 β_{rn} は、

$$\alpha_{rn} = \sqrt{\omega_{rn}^2 - r^2}, \quad \beta_{rn} = \sqrt{\omega_{rn}^2 + r^2}$$

である。そして、 P_{rn} は式 (23) の P_{mn} に対して m を r に置き換えたものである。すなわち、

$$P_{rn} = \begin{bmatrix} \beta \sin \alpha - \alpha \operatorname{sh} \beta \\ -\beta (\cos \alpha - \operatorname{ch} \beta) \\ -\beta \sin \alpha + \alpha \operatorname{sh} \beta \\ \alpha (\cos \alpha - \operatorname{ch} \beta) \end{bmatrix}_{rn}$$

式 (36) は無限 Fourier 積分を零から与えた積分上限値の定積分に置き換えて、Simpson 数値積分を用いて行う。表-3 は、Newton 法を用いて、数値積分の分割ステップ： $\Delta r=0.5$ とした場合の r に対応した式 (39) を満足する ω_{rn} である。さらに Δr を細分割してこの関係を調べると、 ω_{rn} は r の関数として 図-4 のように表わされる。

いま、式 (11) の調和型集中外力が帯板の任意点 (\bar{x}, \bar{y}) に作用するものとすると式 (8) の解 w_p は、

$$w_p(\xi, \eta, \tau) = \sin p\tau \int_0^\infty G_r(\eta) \begin{bmatrix} \cos r\xi \\ \sin r\xi \end{bmatrix} dr \dots\dots (40)$$

ここに、 $G_r(\eta)$ は $(1-by-2)$ の行マトリックスであり、式 (9) の w_p^0 、 w_p^1 に対応する次式のものである。

$$G_r(\eta) = \begin{Bmatrix} G^0(\eta) \\ G^1(\eta) \end{Bmatrix}_r = Y_r(\eta) \begin{Bmatrix} M_r^0 (0 < \eta < \bar{\eta}) \\ M_r^1 (\bar{\eta} < \eta < 1) \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\eta} = \frac{\bar{y}}{a} (0 < \bar{\eta} < 1) \dots\dots (41)$$

ここに、 $Y_r(\eta)$ は $(1-by-4)$ の行マトリックスで表わさ

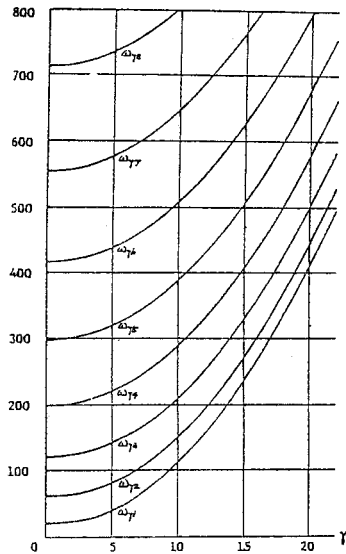


図-4 式 (39) を満足する ω_{rn} と r の関係

れる

(i) $p > r^2$ の場合

$$Y_r(\eta) = \begin{bmatrix} \cos \lambda\eta & \sin \lambda\eta & \operatorname{ch} \mu\eta & \operatorname{sh} \mu\eta \end{bmatrix}_r$$

$$\lambda_r = \sqrt{p - r^2}, \quad \mu_r = \sqrt{p + r^2}$$

(ii) $p = r^2$ の場合

$$Y_r(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda\eta & \operatorname{ch} \lambda\eta & \operatorname{sh} \lambda\eta \end{bmatrix}_r, \quad \lambda_r = \sqrt{2} r^2$$

(iii) $p < r^2$ の場合

$$Y_r(\eta) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \lambda\eta & \operatorname{sh} \lambda\eta & \operatorname{ch} \mu\eta & \operatorname{sh} \mu\eta \end{bmatrix}_r$$

$$\lambda_r = \sqrt{-p + r^2}, \quad \mu_r = \sqrt{p + r^2}$$

である。 M_r^0 、 M_r^1 は $(4-by-2)$ で表わされる未定定数である。また、式 (16) のステップ形集中外力が (\bar{x}, \bar{y}) 点に作用した場合の式 (17) の解 w_p は、

$$w_p(\xi, \eta) = \int_0^\infty G_r(\eta) \begin{bmatrix} \cos r\xi \\ \sin r\xi \end{bmatrix} dr \dots\dots (42)$$

ここに、 $G_r(\eta)$ は式 (41) で表わされるもので、 $Y_r(\eta)$ の内容が異なる次式のものである。

$$Y_r(\eta) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} r\eta & \operatorname{sh} r\eta & r\eta \operatorname{ch} r\eta & r\eta \operatorname{sh} r\eta \end{bmatrix}$$

式 (10) の板の連続条件から、式 (41) の M_r^0 と M_r^1 の間で次式の関係が成立する。

$$M_r^1 = M_r^0 + K_r(\bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad \bar{\xi} = \frac{\bar{x}}{a} (-\infty < \bar{\xi} < \infty) \dots\dots (43)$$

表-3 式 (39) を満足する固有振動数 ω_{rn}

	$\gamma=0.0$	$\gamma=0.5$	$\gamma=1.0$	$\gamma=1.5$	$\gamma=2.0$	$\gamma=2.5$	$\gamma=3.0$	$\gamma=3.5$	$\gamma=4.0$
$n=1$	22.373 286	22.511 682	22.937 727	23.682 041	24.789 550	26.311 655	28.298 000	30.789 980	33.817 400
$n=2$	61.672 823	61.859 697	62.422 732	63.368 958	64.709 434	66.458 354	68.631 956	71.247 377	74.321 581
$n=3$	120.903 39	121.107 98	121.722 73	122.750 48	124.195 83	126.064 84	128.364 81	131.103 89	134.290 76
$n=4$	199.859 45	200.074 12	200.718 61	201.794 31	203.303 51	205.249 28	207.635 41	210.466 25	213.746 63
$n=5$	298.555 54	298.776 62	299.440 14	300.546 88	302.098 13	304.095 66	306.541 65	309.438 69	312.789 67
$n=6$	416.990 79	417.216 31	417.893 06	419.021 51	420.602 47	422.637 03	425.126 57	428.072 72	431.477 36
$n=7$	555.165 25	555.394 04	556.080 51	557.224 98	558.827 99	560.890 26	563.412 71	566.396 44	569.842 72

(Infinitely long plate with clamped edges)

$K_r(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ は (4-by-2) で表わされる次式のものである。

(i) $p > r^2$ の場合

$$K_r(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{P_0 a^3}{2 p \lambda_r \mu_r \pi D} \begin{bmatrix} \mu \sin \lambda \bar{\eta} \\ -\mu \cos \lambda \bar{\eta} \\ -\lambda \operatorname{sh} \mu \bar{\eta} \\ \lambda \operatorname{ch} \mu \bar{\eta} \end{bmatrix} \lfloor \cos r \bar{\xi} \quad \sin r \bar{\xi} \rfloor_r$$

(ii) $p = r^2$ の場合

$$K_r(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{P_0 a^3}{\lambda_r^3 \pi D} \begin{bmatrix} \lambda \bar{\eta} \\ -1 \\ -\operatorname{sh} \lambda \bar{\eta} \\ \operatorname{ch} \lambda \bar{\eta} \end{bmatrix} \lfloor \cos r \bar{\xi} \quad \sin r \bar{\xi} \rfloor_r$$

(iii) $p < r^2$ の場合

$$K_r(\bar{\xi}, \eta) = \frac{P_0 a^3}{2 p \lambda_r \mu_r \pi D} \begin{bmatrix} \mu \operatorname{sh} \lambda \bar{\eta} \\ -\mu \operatorname{ch} \lambda \bar{\eta} \\ -\lambda \operatorname{sh} \mu \bar{\eta} \\ \lambda \operatorname{ch} \mu \bar{\eta} \end{bmatrix} \lfloor \cos r \bar{\xi} \quad \sin r \bar{\xi} \rfloor_r$$

また、ステップ形外力の場合は

$$K_r(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{P_0 a^3}{2 r^3 \pi D} \begin{bmatrix} \operatorname{sh} r \bar{\eta} - r \bar{\eta} \operatorname{ch} r \bar{\eta} \\ -\operatorname{ch} r \bar{\eta} + r \bar{\eta} \operatorname{sh} r \bar{\eta} \\ \operatorname{ch} r \bar{\eta} \\ -\operatorname{sh} r \bar{\eta} \end{bmatrix} \lfloor \cos r \bar{\xi} \quad \sin r \bar{\xi} \rfloor_r$$

である。なお、式 (10) の $P(\tau)$ は $\xi = \bar{\xi}$ 点で集中外力の形態を表わすように、 $P(\tau)$ を Fourier 積分で表わすことはいうまでもない¹²⁾。

無限帯板の y に関する両縁の支持条件は固定であるから、式 (41) の M_r^0 は次式に決定される。

$$M_r^0 = - \begin{bmatrix} B^0 \\ B^1 \end{bmatrix}_r^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B^1 \end{bmatrix}_r K_r(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \dots \dots \dots (44)$$

ここに、 B_r^0, B_r^1 は表-2 のものである。 M_r^0 が決定されたことにより、式 (41), (43) から、 w_p はすべての境界条件を満足する既知関数になる。

調和型外力が作用する場合、与える外力の円振動数が約 $p \geq 22.373$ ($\omega_{r,n} : r=0, n=1$) の値に対して、無限帯板は共振現象を生じる。これは、表-3 および 図-4 から明らかのように、連続した r に対して式 (39) を満足する $\omega_{r,n}$ は n 次に対してそれぞれ指数関数的な特性をもつ連続関数として表わされるため、約 $p \geq 22.373$ に対して $p = \omega_{r,n}$ となり、式 (44) における次式の行列式が $p > r^2$ の場合において

$$\det \begin{bmatrix} B^0 \\ B^1 \end{bmatrix}_r = 0$$

となるからである。これは無限帯板に調和型外力が作用した強制振動の一つの特徴といえるであろう。

帯板の初期条件は静止状態とする。式 (36) および (40) または (42) を式 (28) に代入すると、次式の方程式が得られる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_{r,n}(\eta) \begin{bmatrix} 1 \\ i\omega \end{bmatrix}_{r,n} \Omega_{r,n} + Q G_r(\eta) = 0 \dots \dots \dots (45)$$

(1-by-2) の行マトリックスで表わされる $\Omega_{r,n}$ は、

$$\Omega_{r,n} = \lfloor 1 \quad i \rfloor X_{r,n}$$

に表わせる。ここに、 $X_{r,n}$ は (2-by-2) の実数の未定定数である。 $Y_{r,n}(\eta)$ の直交性を利用すると、式 (45) から $X_{r,n}$ は次式に決定される。

$$X_{r,n} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega} \end{bmatrix}_{r,n} Q H_{r,n}$$

$H_{r,n}$ は次式の (1-by-2) の行マトリックスである。

$$H_{r,n} = \frac{\int_0^1 Y_{r,n}(\eta) G_r(\eta) d\eta}{\int_0^1 Y_{r,n}^2(\eta) d\eta} = \frac{1}{\int_0^1 Y_{r,n}(\eta) d\eta} \cdot \left[\int_0^{\bar{\eta}} Y_{r,n}(\eta) G_r^0(\eta) d\eta + \int_{\bar{\eta}}^1 Y_{r,n}(\eta) G_r^1(\eta) d\eta \right]$$

これより、無限帯板の w は次式に表わされる。

(a) 調和型外力

$$w(\xi, \eta, \tau) = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{r,n}(\eta) \lfloor \cos \omega \tau, -\sin \omega \tau \rfloor_{r,n} \cdot X_{r,n} \begin{bmatrix} \cos r \xi \\ \sin r \xi \end{bmatrix} d\tau + \sin p \tau \int_0^{\infty} G_r(\eta) \begin{bmatrix} \cos r \xi \\ \sin r \xi \end{bmatrix} d\tau$$

(b) ステップ形外力

$$w(\xi, \eta, \tau) = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{r,n}(\eta) \lfloor \cos \omega \tau, -\sin \omega \tau \rfloor_{r,n} \cdot X_{r,n} \begin{bmatrix} \cos r \xi \\ \sin r \xi \end{bmatrix} d\tau + \int_0^{\infty} G_r(\eta) \begin{bmatrix} \cos r \xi \\ \sin r \xi \end{bmatrix} d\tau \dots \dots \dots (46)$$

6. 数値計算結果

(1) 調和型集中外力を受ける矩形板

図-5 に示す正方形板の中央点 ($\bar{\xi}=0.5, \bar{\eta}=0.5$) に $P(\tau) = P_0 \sin p \tau$ が作用した場合の動的挙動を調べる。

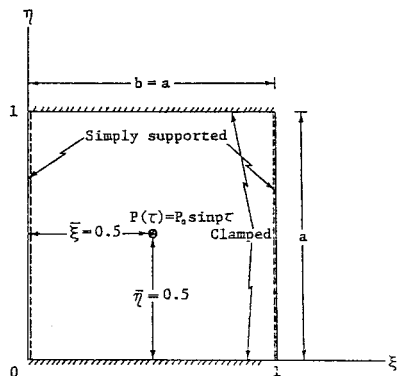


図-5 調和型集中外力が作用した正方形板

表-4 Fourier 級数および固有関数の展開次数による解の収束状態

(For the case $p=40$, Poisson's ratio $\nu=0.3$)
 (a) View point ($\xi=0.4, \eta=0.4$) of square plate

	$w \times D/P_0 a^3$	$M_x/P_0 a$	$M_y/P_0 a$	S_x/P_0	S_y/P_0
$\tau=0.1$					
$m=1, n=1$	0.006 146 9	0.088 92	0.112 36	0.158 04	0.008 18
$m=3, n=3$	0.005 976 6	0.074 06	0.105 82	-0.036 34	-0.218 30
$m=5, n=5$	0.005 976 0	0.074 00	0.105 66	39.690 74	-0.200 47
$\tau=0.2$					
$m=1, n=1$	-0.009 247 4	-0.133 80	-0.169 16	-0.237 89	-0.085 36
$m=3, n=3$	-0.009 083 0	-0.118 38	-0.167 47	-0.031 06	0.058 14
$m=5, n=5$	-0.009 083 8	-0.118 46	-0.167 72	59.704 56	0.085 77
$\tau=0.3$					
$m=1, n=1$	0.008 292 3	0.120 07	0.151 97	0.213 61	0.248 24
$m=3, n=3$	0.008 174 6	0.111 01	0.146 11	0.113 49	0.050 85
$m=5, n=5$	0.008 174 0	0.110 93	0.145 89	48.927 59	0.075 84
$\tau=0.4$					
$m=1, n=1$	-0.004 939 5	-0.071 67	-0.091 02	-0.127 74	-0.445 38
$m=3, n=3$	-0.005 051 5	-0.080 05	-0.097 19	-0.217 05	-0.587 45
$m=5, n=5$	-0.005 051 8	-0.080 08	-0.097 28	13.209 91	-0.576 36

(b) View point ($\xi=0.2, \eta=0.2$) of square plate

	$w \times D/P_0 a^3$	$M_x/P_0 a$	$M_y/P_0 a$	S_x/P_0	S_y/P_0
$\tau=0.1$					
$m=1, n=1$	0.001 809 4	0.018 82	0.008 56	0.091 08	0.675 23
$m=3, n=3$	0.001 848 7	0.019 54	0.004 56	0.113 32	0.700 79
$m=5, n=5$	0.001 849 6	0.019 63	0.004 83	-21.489 56	0.691 04
$\tau=0.2$					
$m=1, n=1$	-0.002 695 7	-0.027 68	-0.010 89	-0.127 62	-0.999 85
$m=3, n=3$	-0.002 727 3	-0.030 62	-0.005 01	-0.106 75	-1.017 83
$m=5, n=5$	-0.002 725 8	-0.030 48	-0.004 59	-32.363 10	-1.032 94
$\tau=0.3$					
$m=1, n=1$	0.002 355 1	0.022 68	0.005 09	0.092 35	0.859 05
$m=3, n=3$	0.002 417 8	0.025 32	0.007 59	0.117 18	0.875 59
$m=5, n=5$	0.002 419 1	0.025 45	0.007 96	-26.348 94	0.861 92
$\tau=0.4$					
$m=1, n=1$	-0.001 295 2	-0.010 11	0.005 08	-0.016 72	-0.446 67
$m=3, n=3$	-0.001 187 5	-0.002 78	0.012 60	-0.009 42	-0.406 80
$m=5, n=5$	-0.001 186 9	-0.002 72	0.012 77	-7.313 88	-0.412 87

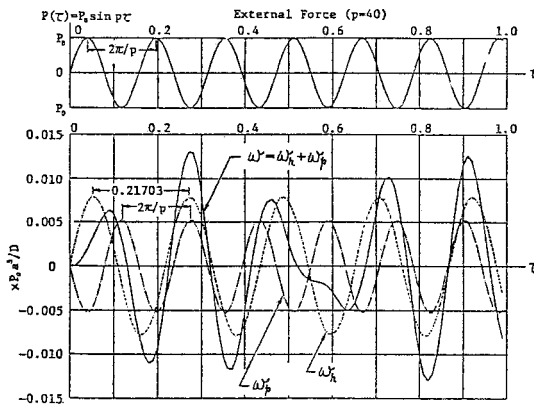
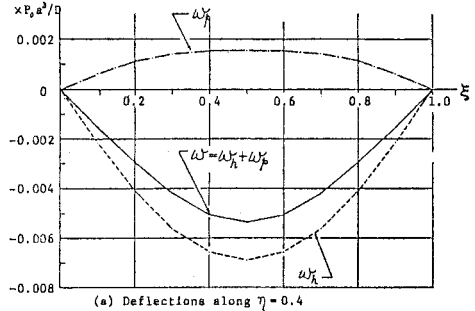
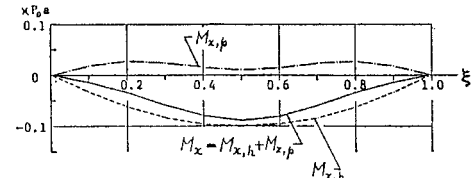


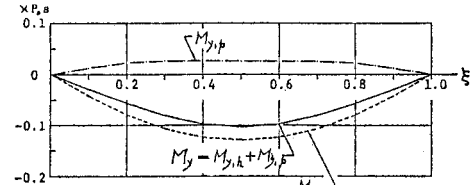
図-6 外力の入力に対する $w(0.4, 0.4, \tau)$ の応答およびこれを構成する w_h と w_p の関係



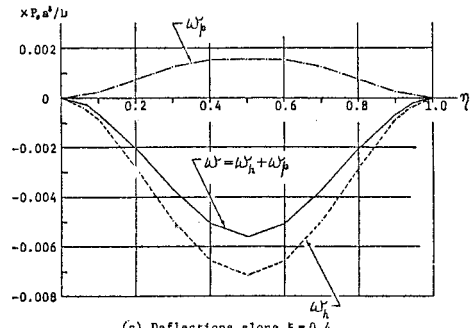
(a) Deflections along $\eta=0.4$



(b) Bending moments along $\eta=0.4$



(c) Deflections along $\xi=0.4$



(d) Bending moments along $\xi=0.4$

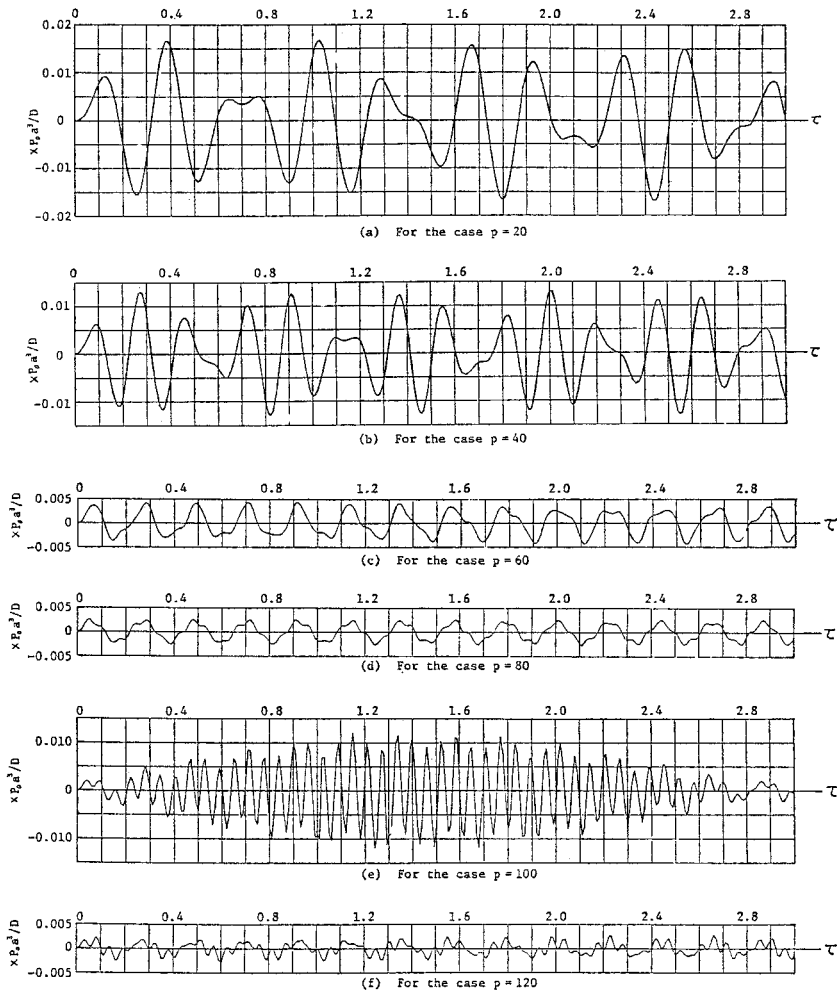
図-7 ξ および η 軸に分布した w, M_x および M_y ($p=40, \tau=0.4$)

表—4 は Fourier 級数 (m) および固有関数 (n) の展開次数に対する解の収束状態を数値で示したものである。載荷点で、 w は収束値の結果を得たが、力量 (M_x, M_y, \dots, S_y) については十分に収束した結果が得られなかった。しかし、載荷点以外で w, M_x, M_y は $m=5, n=5$ 程度で収束状態の結果を得ることができた。 S_x, S_y は w あるいは M_x, M_y と比較して収束が遅く、さらに高次展開を必要とするが、試みた結果、数値的に変動する度合は表—4 の値と同程度であった。特に S_x は m の展開次数に顕著な値動きを示し、この度合が載荷点近傍ほど激しく、収束状態の S_x を得ることができなかった。これに対して、 S_y は m, n に対して比較的数値の変動が少なく、収束状態の S_y を得ることが可能であることがわかった。解の収束状態は S_x を除外して表—4 程度で十分であろうと考える。なお、数値計算で用いたポアソン比は $\nu=0.3$ 、外力の円振動数は $p=40$ とした。

図—6 は外力 ($p=40$) の入力に対する $w(0.4, 0.4, \tau)$ の応答を示したもので、これを構成する w_k と w_p の関係を表わしたものである。表—4 から明らかのように、 $m=1, n=1$ で収束値に近い結果を得ることは式 (35) の X_{11} が支配的な値をもつことによるもので、 w_k は約 $2\pi/\omega_{11}=0.21703$ の周期をもつ自由振動の形態を示し、 w_p は外力の周期に合致した定常振動の形態を示す。 $p=\omega_{mn}$ の場合を除いて X_{11} が支配的な値をとることは板の境界条件および辺長比 $1/\kappa=b/a$ によるもので表—1 の ω_{mn} の値に起因する板固有の性質である。

図—7 は外力の円振動数: $p=40$ 、時間: $\tau=0.4$ に注目して、 ξ あるいは η 座標に分布した w, M_x, M_y を示し、これらを構成する同次解および特解の関係を表わした。当然のことながら、同次解、特解とも板の境界条件を満足する形態を示している。

図—8 は外力の円振動数: p を変化させた場合の $w(0.4, 0.4, \tau)$ の応答である。 $p=20(0.691\omega_{11})$ あるいは



図—8 p の変化に対する $w(0.4, 0.4, \tau)$ の応答

は $p=40$ ($1.382\omega_{11}$) のような ω_{11} に準拠した低振動数を与えた場合は、 w を構成する w_h, w_p が両者ともに対等的な値をもち、打ち消し合うところで波形が乱れ、全体的にゆっくりした振動形態を示す。これに対して、 p を順次大きく高振動数を与えるに従っては、 w の振幅が順次小さく、 w を構成する w_h が支配的な値をとり、 w_p が補正的に作用する。いずれも約 $2\pi/(p-\omega_{11})$ の周期で最大振幅を示す振動形態となる。しかし、 $p=100$ ($0.978\omega_{31}$) の場合は共振現象が現われ、約 $2\pi/(p-\omega_{31})$ の周期で最大振幅を示す。

図-9 は ($\xi=0.4, \eta=0.4$)、($\xi=0.4, \eta=0$) 点に注目した M_x, M_y の応答である。 $p=20$ あるいは $p=40$

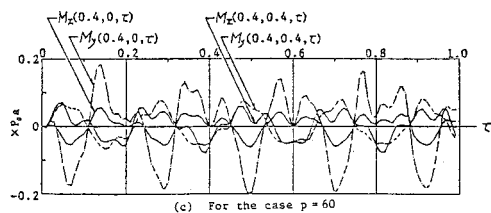
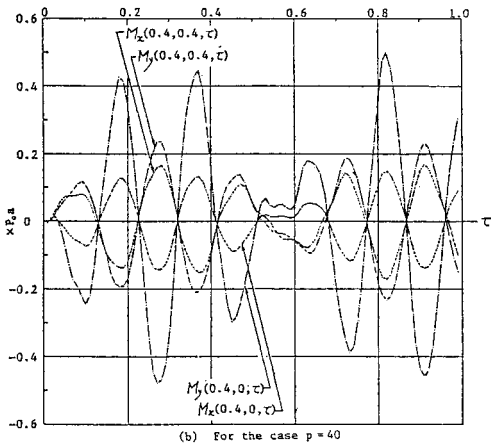
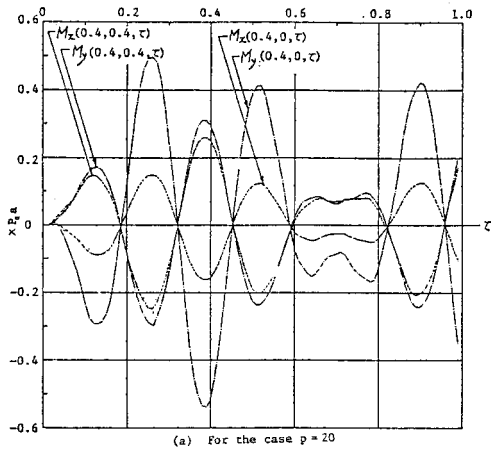


図-9 p の変化に対する M_x および M_y の応答

の場合、 M_x, M_y ($0.4, 0.4, \tau$) は図-8 の w ($0.4, 0.4, \tau$) の応答と同じ形態を示し、 M_y は M_x よりいくらか大きい振幅値をとる。 p を順次大きくとるに従って、 M_x, M_y は w と別な応答を示し、振幅も順次小さくなる。また縁モーメント： M_x, M_y ($0.4, 0, \tau$) は内部モーメント： M_x, M_y ($0.4, 0.4, \tau$) と比較して符号を変えた逆の応答を示し、 M_x と M_y の差が大きくなる。

(2) 集中衝撃荷重を受ける無限帯板

本解析法の妥当性を証するために、渋谷ら²⁾が研究報告したのと同じ系について数値計算を行った。

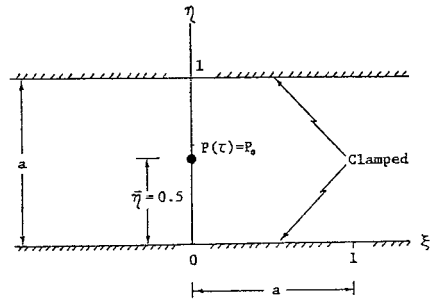


図-10 ステップ形集中外力が作用した無限帯板

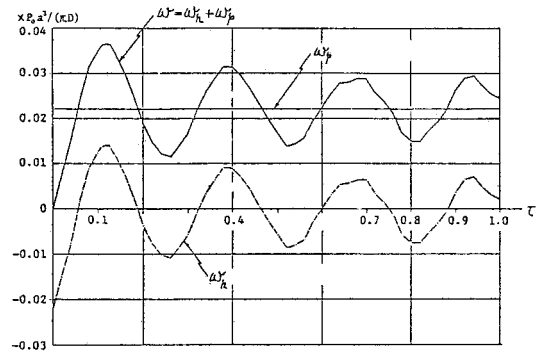


図-11 $w(0.5, \tau)$ の応答およびこれを構成する w_h と w_p の関係

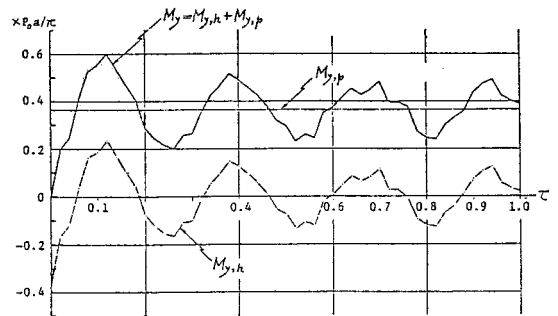


図-12 $M_y(0.4, \tau)$ の応答およびこれを構成する $M_{y,h}$ と $M_{y,p}$ の関係

表一五 積分上限値および積分分割ステップに対する $w_p(0, 0.5)$ の収束状態

Upper limits of Fourier integration γ	Steps of Simpson's rule $\Delta\gamma$	Shibuya's method $\omega_p \times \frac{\pi D}{B a^2}$	Present method $\omega_p \times \frac{\pi D}{B a^2}$
20.0	0.1	0.022 441 4	0.022 440 6
	0.2	0.022 442 6	0.022 440 6
	0.5	0.022 445 6	0.022 440 6
40.0	0.1	0.022 675 0	0.022 636 7
	0.2	0.022 675 2	0.022 637 6
	0.5	0.022 675 6	0.022 639 5

表一六 固有関数の展開次数に対する $w_h(0, \eta, 0)$ の収束状態

η	$\omega_p \times \frac{\pi D}{B a^2}$	$\omega_p \times \pi D / B a^2$			
		n=3	n=5	n=7	n=9
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.002 202 0	-0.002 043 0	-0.002 257 1	-0.002 185 6	-0.002 203 7
0.2	0.007 366 1	-0.007 262 1	-0.007 318 1	-0.007 394 6	-0.007 365 8
0.3	0.013 706 5	-0.013 960 4	-0.013 681 2	-0.013 665 4	-0.013 702 1
0.4	0.019 537 3	-0.019 682 3	-0.019 661 3	-0.019 596 8	-0.019 555 2
0.5	0.022 440 6	-0.021 945 8	-0.022 242 3	-0.022 343 2	-0.022 386 6
0.6	0.019 537 3	-0.019 682 4	-0.019 661 2	-0.019 596 9	-0.019 555 1
0.7	0.013 706 5	-0.013 960 5	-0.013 681 2	-0.013 665 2	-0.013 701 9
0.8	0.007 366 1	-0.007 262 2	-0.007 318 3	-0.007 394 6	-0.007 365 4
0.9	0.002 202 2	-0.002 043 1	-0.002 257 3	-0.002 185 9	-0.002 206 2
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

(Upper limit of Fourier integration: $\gamma=20.0$, step of Simpson's rule: $\Delta\gamma=0.5$)

表一五は、図一10に示す固定帯板の中央点に $P(r) = P_0$ ($\bar{\xi}=0, \bar{\eta}=0.5$) が作用した場合、積分上限値 r と、積分分割ステップ Δr に対する式(42)の解 w_p と渋谷らの解を比較したものである。表一六は式(28)の初期条件を調べるために、 η 軸 ($\bar{\xi}=0$) における w_h と w_p の関係を数値で表わしたものである。すなわち、 w は板全体にわたって、 $\tau=0$ のとき $w=w_h+w_p=0$ でなければならない(速度は理論的に満足する)。数値計算の結果、 w_h は固有関数の展開次数 $n=9$ 程度で十分 w_p (符号を変えて) に合致する結果を得た。さらに、図一11, 12は $w(0, 0.5, \tau)$, $M_y(0, 0.4, \tau)$ の応答を示し、これらを構成する同次解と特解の関係を表わしたものである。いずれも渋谷らが研究報告したものとまったく同じ動的挙動の形態を得、本解析法の正確性を確認した。

7. おわりに

板は対向2辺が単純支持された矩形板および無限帯板とし、これらに作用する強制外力は、時間に依存して調和型および一定なステップ形外力、座標に関してすべて集中外力の形態とした曲げたわみの一般解の誘導を詳細に示した。数値計算の結果、外力に依存した強制振動特有の動的挙動を得た。これらの結果を要約すると次のとおりである。

(1) 外力に依存する特解は、板の連続条件を導入することにより、座標に関する外力の形態が線外力を基準

にして、点で表示される集中外力の場合に効果のある解析となり、しかも2重級数で表わすことなく、特解が1重級数(無限帯板は1重積分形式)で表わされる。したがって、板の連続条件に関係して現われる w, θ_y, M_y の収束はむしろのこと S_y に至ってもある程度収束することが可能であることがわかった。

(2) 矩形板の同次解において、固有関数に現われる固有値方程式は、Fourier級数の変数 r_m に従属して表わし、これを満足するところの r_m と固有振動数 ω_{mn} の関係を具体的に数値で表わした。そして調和型外力が作用する場合、固有値方程式と特解における強制外力の振動数に関連させて共振現象の関係を明確に表わした。また無限帯板の場合は、連続した Fourier 積分変数 r に対して固有値方程式を満足する固有振動数 ω_{rn} も連続関数として表わされ、その関数形は n 次数に関して指数関数的な形状を示し、調和型外力の振動数が約 $p \geq 22.373$ に対して共振現象を生じる。

(3) 調和型外力が作用した矩形板において、固有振動数 ω_{11} に準拠した比較的低下振動数 p を与えると、 w を構成する w_h, w_p がともに対等的な値をもつものに対して、 p を順次大きく高次振動を与えるに従っては、 w の振幅が順次小さくなり、 w を構成する w_h が支配的な値をとり、 w_p が補正的に作用する。ただし、共振現象が生じる場合は w_h, w_p ともに大きな値をとる。

参考文献

- 1) Timoshenko, S.P., and S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y., pp. 108~124, 141~143, 1959.
- 2) 渋谷寿一・小泉 堯・依田裕明: 集中衝撃荷重を受ける両縁固定の無限帯板, 日本機械学会論文集(第1部), 40巻, 329号, pp. 105~124, 1974年1月.
- 3) Shibuya, T., T. Koizumi and H. Yoda: Flexural Stress Waves in an Infinitely Long Strip with Clamped Edges Subjected Stepwise to a Concentrated Transverse Load, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 54, No. 7, pp. 421~427, July, 1974.
- 4) Sonoda, K. and H. Kobayashi: Rectangular Plates on Linear Viscoelastic Foundations, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 106, No. EM 2, Proc. Paper 15307, pp. 323~338, April, 1980.
- 5) 1) の p. 137.
- 6) Tanimoto, B.: Eigen-Matrix Method for Beams and Plates, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 89, No. ST 5, Proc. Paper 3681, pp. 173~215, October, 1963.

- 7) Herrmann, L.R. : Bending Analysis for Clamped Rectangular Plates, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 90, No. EM 3, Proc. Paper 3934, pp. 71~86, June, 1964.
- 8) Tanimoto, B. : Some Improvements on Proposed Eigen-Matrix Method, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 92, No. ST 1, Proc. Paper 4667, pp. 101~119, February, 1966.
- 9) Tanimoto, B., K. Ishikawa and S. Natsume : Forced Vibration of Beams by Eigenmatrix Method, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 105, No. ST 12, Proc. Paper 15090, pp. 2725~2749, December, 1979.
- 10) 園田憲一郎・小林治俊・石尾年光 : 線形粘弾性基礎のはりの解析, 日本土木学会論文報告集, 第 247 号, pp. 1~8, 1976 年 3 月.
- 11) Timoshenko, S.P. : Vibration Problems in Engineering, 3rd ed., D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.Y., 1955.
(谷下市松・渡辺 茂訳 : 工業振動学, 東京図書, pp. 297~302, 1956 年)
- 12) Iyengar, S.R. and R.S. Alwar : Stresses in a Layered Half-Plane, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 90, No. EM 4, Proc. Paper 4004, pp. 79~96, August, 1964.

(1980.10.8・受付)
