

積分方程式法による固有振動問題の解析

ANALYSIS OF EIGENFREQUENCY PROBLEMS
BY THE INTEGRAL EQUATION METHOD

丹羽 義 次*・小林 昭 一**・北原 道 弘***

By Yoshiji NIWA, Shoichi KOBAYASHI and Michihiro KITAHARA

1. はじめに

弾性体の固有値問題を積分方程式法により解析する方法およびこの方法による固有値解析の特徴が明らかにされつつあり、ある種の積分方程式を用いた場合の固有値の精度はかなりよいことがわかっている¹⁾²⁾。一口に積分方程式といっても、定式化によりさまざまな積分方程式が構成されるわけであって、各種積分方程式による固有値の精度および固有密度、固有モードの精度を統一的に確認しておくことが数値解析の観点から必要と思われる。また、内部固有値の存在は定常外部場の積分方程式の可解性に関係しており、外部場に対しいかなる積分方程式を組み立てればよいかという定式化の観点から、各種定式化により得られる積分方程式の固有値と解表現の関係を確認しておくことも必要と思われる。

これらの問題の一部については前論文¹⁾において、定常弾性問題における固有値決定積分方程式としてまとめられたが、そこでは第一種（変位）、第二種（応力）問題に対し、層ポテンシャル表示による積分方程式の構成においては慣例に従い第二種積分方程式を構成していた³⁾。しかし、本手法による固有値問題の解析においては、数値解析の観点から、ある問題については第一種積分方程式の方がより有効であることがわかってきた。また、第三種（混合）問題に対する Green 表示による積分方程式の構成においては、変位表示式に境界条件を課すことにより境界積分方程式を構成していた。この場合、いま一つの方法として、変位表示式および応力表示式、あるいは応力表示式に境界条件を課すことにより積

分方程式を構成することができる。本論文においては、新たにこれら 2 つの方法により得られる固有値決定積分方程式を前に得た結果¹⁾に加えて拡張整理する。さらに、これらすべての積分方程式により得られる固有値の精度を比較することにより、数値解析的にどの積分方程式が固有値解析に最も有効であるかを検討する。

また、前論文¹⁾においては、積分作用素の一般の性質から各種積分方程式の固有値の相互関係を明らかにしたが、簡単な形状（たとえば円形）に対しては積分方程式を解析的に積分することが可能であり、これにより各種積分方程式の固有値と解表現の関係をより具体的に明らかにすることができる。本論文では、面外定常弾性問題の積分方程式を解析的に積分する。これにより、各種積分方程式の固有値相互の関係、なかんずく、外部定常波動問題を積分方程式法により解析する場合にしばしば問題となる対応した内部問題の固有値との関連が明確にされる。

最後に、積分方程式法による固有密度、固有モードの求め方を簡単に述べ、これらの精度について検討を加えた後、任意形状問題への一適用例として、面外問題について、三角形の混合境界値問題の固有振動モードの解析例を示す。

2. 積分方程式と固有値決定積分方程式

1. に述べたように、ここでは層ポテンシャル表示による第一種積分方程式および Green 表示を用いた 3 種類の方法による積分方程式を構成し、これらにより得られる固有値決定積分方程式を前に得た結果¹⁾に加えて拡張整理し、後にこれらすべての積分方程式により得られる固有値の精度を検討するための準備とする。

(1) 積分方程式の構成

三次元 Euclid 空間 R^3 を考え、Fig. 1 に示すよう

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学科

注 1) 境界値問題を第一種非同次積分方程式に変換した場合、その積分作用素の平滑化性に起因する数値的取扱いの困難性はよく知られている³⁾。

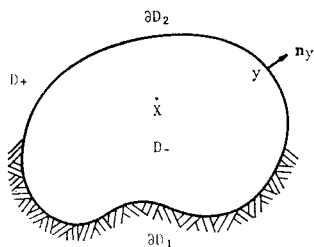


Fig. 1 Domain, mixed boundary and normal vector.

に滑らかな曲面 ∂D に囲まれた領域の内部，外部をそれぞれ D_-, D_+ とし，変位 ($u=f$)，応力 ($t=g$) ベクトルが与えられた境界をそれぞれ $\partial D_1, \partial D_2$ ($\partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2$) とする．また第一種，第二種問題に対してはそれぞれ $\partial D = \partial D_1, \partial D = \partial D_2$ と考える．

前論文¹⁾との重複を避けるために，積分作用素の定義については誌面の都合で後述の **Table 2** の下部に略記しておいたが，その性質については前論文²⁾を参照されたい．ここでは例として，前論文では示さなかった層ポテンシャル表示による第一種積分方程式と，Green 表示による第三種問題に対する積分方程式を構成してみる．

a) 層ポテンシャル表示による第一種積分方程式の構成

一重層ポテンシャル

$$u(X) = (S\mu)(X) \quad X \in R^3 \dots \dots \dots (1)$$

二重層ポテンシャル

$$u(X) = (D\mu)(X) \quad X \in R^3 \dots \dots \dots (2)$$

を用いれば，これらポテンシャルの性質より，第一種，第二種問題に対し，第一種積分方程式を構成できる．たとえば内部第一種問題の積分方程式を構成してみる．一重層ポテンシャル表現を考え，内部から境界への極限をとり，境界条件を考慮すれば次式を得る．

$$(S\mu)(x) = f(x) \quad x \in \partial D \dots \dots \dots (3)$$

他の問題に対しても同様に第一種方程式を構成できる．

b) Green 表示による第三種問題に対する積分方程式の構成

この場合，内部，外部問題に対し，それぞれ3つの方法により積分方程式を構成できる．そのために必要な変位および応力表示を物体力が存在しない場合について示しておく．

内部 Green 変位表示式

$$(St)(X) - (Du)(X) = F_1 u(X) \dots \dots \dots (4)$$

ここに， $F_1 = 1 \quad X \in D_-, 1/2 \quad X = x \in \partial D, 0 \quad X \in D_+$

外部 Green 変位表示式

$$(Du)(X) - (St)(X) = F_2 u(X) \dots \dots \dots (5)$$

ここに， $F_2 = 0 \quad X \in D_-, 1/2 \quad X = x \in \partial D, 1 \quad X \in D_+$

境界上の点 $x \in \partial D$ に対してはそれぞれ次のように書

ける．

$$\frac{1}{2} u(x) = (St)(x) - (\bar{K}^* u)(x), \quad x \in \partial D \dots (6)$$

$$\frac{1}{2} u(x) = (\bar{K}^* u)(x) - (St)(x), \quad x \in \partial D \dots (7)$$

内部 Green 応力表示式

$$\bar{T}^x(St)(X) - \bar{T}^x(Du)(X) = F_1 t(X) \dots \dots \dots (8)$$

外部 Green 応力表示式

$$\bar{T}^x(Du)(X) - \bar{T}^x(St)(X) = F_2 t(X) \dots \dots \dots (9)$$

境界上の点 $x \in \partial D$ に対してはそれぞれ次のように書ける．

$$\frac{1}{2} t(x) = (Kt)(x) - (D_n u)(x), \quad x \in \partial D \dots (10)$$

$$\frac{1}{2} t(x) = (D_n u)(x) - (Kt)(x), \quad x \in \partial D \dots (11)$$

いま，第三種問題に対し積分方程式を構成する場合，境界条件に関連して次の3つの方法が考えられる．

- (i) $\partial D_1, \partial D_2$ 上で共に変位表示を用いる方法．
- (ii) ∂D_1 上は変位表示， ∂D_2 上は応力表示を用いる方法．
- (iii) $\partial D_1, \partial D_2$ 上で共に応力表示を用いる方法．

たとえば，(ii)の方法により内部第三種問題に対する積分方程式を構成してみる．

$x \in \partial D_1$ の場合，内部変位表示式 (6) より，

$$\begin{aligned} & (St)_{\partial D_1}(x) - (\bar{K}^* u)_{\partial D_1}(x) \\ & = \left(\frac{1}{2} f + \bar{K}^* f \right)_{\partial D_1}(x) - (Sg)_{\partial D_1}(x), \quad x \in \partial D_1 \\ & \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

$x \in \partial D_2$ の場合，内部応力表示式 (10) より，

$$\begin{aligned} & (Kt)_{\partial D_1}(x) - (D_n u)_{\partial D_2}(x) \\ & = (D_n f)_{\partial D_1}(x) + \left(\frac{1}{2} g - Kg \right)_{\partial D_2}(x), \quad x \in \partial D_2 \\ & \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

ここに， $()_{\partial D_1}, ()_{\partial D_2}$ はそれぞれ $\partial D_1, \partial D_2$ 上での積分を表わしている．他の方法 (i), (iii) の場合も同様である．

Table 1 は後の数値計算の便宜上，前論文¹⁾において得た結果をも含め第一種，第二種問題の積分方程式をまとめたものであり，**Table 2** は第三種問題に対する積分方程式をまとめたものである．**Table 1** では， $L(S), L(D)$ はそれぞれ一重層，二重層ポテンシャル表示による定式化を， $G(u), G(t)$ はそれぞれ変位，応力表示を用いた Green 表示による定式化を表わしている．**Table 2** では， $G(u), G(u, t), G(t)$ はそれぞれ上に示した3つの定式化 (i), (ii), (iii) により得られた積分方程式であることを示している．

以後 **Table 1, 2** において，たとえば二重層ポテンシャルによる内部第一種問題の積分方程式を参照する場合には **F.I.L(D)** と略記することにする．

Table 1 Boundary integral equation and representation of solution (first and second problems).

Formulation of Problem	Integral Equation	O	I.P.	A.P.	Representation of Solution	U	
First Interior Problem, F.I.	$L(D)$	$\left(\frac{1}{2}I - \bar{K}^*\right)\mu = -f$	\bar{K}^*	I_2	A_2	$u = D\mu$	μ
	$L(S)$	$S\mu = f$	S	I_3		$u = S\mu$	μ
	$\bar{L}(D)$	$\left(\frac{1}{2}I - K^*\right)\mu = -f$	K^*		A_3A_4	$u = \bar{D}\mu$	μ
	$\bar{L}(S)$	$\bar{S}\mu = f$	\bar{S}			$u = \bar{S}\mu$	μ
	$G(t)$	$\left(\frac{1}{2}I - K\right)t = -D_n f$	K	I_1	A_4	$u = St - Df$	t
	$G(u)$	$St = \left(\frac{1}{2}I + \bar{K}^*\right)f$	S	I_3			
	$\bar{G}(t)$	$\left(\frac{1}{2}I - \bar{K}\right)t = -\bar{D}_n f$	\bar{K}		A_1A_2	$u = \bar{S}t - \bar{D}f$	t
$\bar{G}(u)$	$\bar{S}t = \left(\frac{1}{2}I + K^*\right)f$	\bar{S}					
Second Exterior Problem S.E.	$L(S)$	$\left(\frac{1}{2}I - K\right)\mu = -g$	K	I_1	A_3	$u = S\mu$	μ
	$L(D)$	$D_n\mu = g$	D_n	I_5		$u = D\mu$	μ
	$G(u)$	$\left(\frac{1}{2}I - \bar{K}^*\right)u = -Sg$	\bar{K}^*	I_2	A_1	$u = Du - Sg$	u
	$G(t)$	$D_n u = \left(\frac{1}{2}I + K\right)g$	D_n	I_6			
Second Interior Problem, S.I.	$L(S)$	$\left(\frac{1}{2}I + K\right)\mu = g$	$-K$	I_3	A_6	$u = S\mu$	μ
	$L(D)$	$D_n\mu = g$	D_n	I_6		$u = D\mu$	μ
	$\bar{L}(S)$	$\left(\frac{1}{2}I + \bar{K}\right)\mu = g$	$-\bar{K}$		A_7A_8	$u = \bar{S}\mu$	μ
	$\bar{L}(D)$	$\bar{D}_n\mu = g$	\bar{D}_n			$u = \bar{D}\mu$	μ
	$G(u)$	$\left(\frac{1}{2}I + \bar{K}^*\right)u = Sg$	$-\bar{K}^*$	I_4	A_5	$u = Sg - Du$	u
	$G(t)$	$D_n u = -\left(\frac{1}{2}I - K\right)g$	D_n	I_6			
	$\bar{G}(u)$	$\left(\frac{1}{2}I + K^*\right)u = \bar{S}g$	$-K^*$		A_3A_4	$u = \bar{S}g - \bar{D}u$	u
	$\bar{G}(t)$	$\bar{D}_n u = -\left(\frac{1}{2}I - \bar{K}\right)g$	\bar{D}_n				
First Exterior Problem, F.E.	$L(D)$	$\left(\frac{1}{2}I + \bar{K}^*\right)\mu = f$	$-\bar{K}^*$	I_4	A_7	$u = D\mu$	μ
	$L(S)$	$S\mu = f$	S	I_3		$u = S\mu$	μ
	$G(t)$	$\left(\frac{1}{2}I + K\right)t = D_n f$	$-K$	I_3	A_5	$u = Df - St$	t
	$G(u)$	$St = -\left(\frac{1}{2}I - \bar{K}^*\right)f$	S	I_3			

O : Operator, I.P. : Identity Pair, A.P. : Adjoint Pair, U : Unknown

(2) 固有値決定積分方程式

Table 1, 2 に示した各問題, 各定式化に対する積分方程式および解表現において, 与えられた境界値 f, g を零とおけば, 固有値決定積分方程式および固有関数表現を得る. この意味において, 以後, 各問題に対する固有値決定積分方程式, 固有関数表現を参照する場合には Table 1, 2 で f, g を零とおいたものを考えることに

する. Table 1 において, 各積分作用素の性質に注意すれば, 外部問題の積分方程式の固有方程式からも内部問題の固有値が求まることがわかる. 具体的には, 第二種積分方程式に関しては, 内部第一種問題の固有値は外部第二種問題の固有方程式から, 内部第二種問題の固有値は外部第一種問題の固有方程式から求まる. さらに, 第一種積分方程式に関しては, 内部第一種問題の固有値は外部第一種問題の固有方程式から, また内部第二種問題の固有値は外部第二種問題の固有方程式から求まることがわかる.

3. 固有方程式と解表現

ここでは平面定常弾性問題における面外振動問題 (面外変位 u は Helmholtz 方程式に支配される) を考え, 点波源が円形境界の内部, 外部に存在する場合について, 2. で示した各種積分表示を境界上で解析的に積分することにより, 個々の積分方程式の固有方程式 (固有値) と解表現の関係を明らかにする. これより, 各種積分方程式間のより具体的な関係が確認される.

また外部定常場の積分方程式の一意性問題と内部固有値の関係はよく知られており, 一意性の回復方法がいろいろと提案されている. この種の問題については, Shaw の最近の論文⁴⁾に review がなされており, そこには関連する論文が多数挙げられている. しかしながら, これらの論文はある種の積分方程式に限定されており, 層表示および Green 表示による積分方程式両者を統一的立場から考え, 問題を把握しておくことが必要と思われる. この意味においても, 先に 2. (2) で述べた関係をすべての積分方程式について具体的に表示しておくことは意味あるものと考えられる.

円形境界の場合の積分法については, Shaw ら^{4), 5)}は内部 Green 変位表示による境界積分方程式を積分し, 固有方程式を導いている. また Cassot & Extremet⁶⁾, Filippi⁷⁾らは一重層表示を積分し固有方程式と解表現を示しているが, この方法のように単に積分を考える場合二重層の積分に難点があると思われる. 二重層の積分については小林, 西村の方法⁸⁾を用いれば source point における法線微分の処理が容易になるため簡単に積分でき

Table 2 Boundary integral equation and representation of solution (third (mixed) problem).

Formulation of Problem		Integral Equation		I.P.	U	
Third (Mixed) Interior Problem, M.I.	Representation of Solution	$u = (St)_{\partial D_1} + (Sg)_{\partial D_2} - (Df)_{\partial D_1} - (Du)_{\partial D_2}$			in D_-	
	$G(u)$	$(St)_{\partial D_1} - (\bar{K}^*u)_{\partial D_2} = \left[\left(\frac{1}{2}I + \bar{K}^* \right) f \right]_{\partial D_1} - (Sg)_{\partial D_2}$	on ∂D_1		u t	
		$(St)_{\partial D_1} - \left[\left(\frac{1}{2}I + \bar{K}^* \right) u \right]_{\partial D_2} = (\bar{K}^*f)_{\partial D_1} - (Sg)_{\partial D_2}$	on ∂D_2			
$G(u, t)$	$(St)_{\partial D_1} - (\bar{K}^*u)_{\partial D_2} = \left[\left(\frac{1}{2}I + \bar{K}^* \right) f \right]_{\partial D_1} - (Sg)_{\partial D_2}$	on ∂D_1		I_1		
	$(Kt)_{\partial D_1} - (D_n u)_{\partial D_2} = (D_n f)_{\partial D_1} + \left[\left(\frac{1}{2}I - K \right) g \right]_{\partial D_2}$	on ∂D_2				
$G(t)$	$\left[\left(\frac{1}{2}I - K \right) t \right]_{\partial D_1} + (D_n u)_{\partial D_2} = - (D_n f)_{\partial D_1} + (Kg)_{\partial D_2}$	on ∂D_1				
		$(Kt)_{\partial D_1} - (D_n u)_{\partial D_2} = (D_n f)_{\partial D_1} + \left[\left(\frac{1}{2}I - K \right) g \right]_{\partial D_2}$	on ∂D_2			
Third (Mixed) Exterior Problem, M.E.	Representation of Solution	$u = (Df)_{\partial D_1} + (Du)_{\partial D_2} - (St)_{\partial D_1} - (Sg)_{\partial D_2}$			in D_+	
	$G(u)$	$(St)_{\partial D_1} - (\bar{K}^*u)_{\partial D_2} = - \left[\left(\frac{1}{2}I - \bar{K}^* \right) f \right]_{\partial D_1} - (Sg)_{\partial D_2}$	on ∂D_1		u t	
		$(St)_{\partial D_1} + \left[\left(\frac{1}{2}I - \bar{K}^* \right) u \right]_{\partial D_2} = (\bar{K}^*f)_{\partial D_1} - (Sg)_{\partial D_2}$	on ∂D_2			
$G(u, t)$	$(St)_{\partial D_1} - (\bar{K}^*u)_{\partial D_2} = - \left[\left(\frac{1}{2}I - \bar{K}^* \right) f \right]_{\partial D_1} - (Sg)_{\partial D_2}$	on ∂D_1		I_1		
	$(Kt)_{\partial D_1} - (D_n u)_{\partial D_2} = (D_n f)_{\partial D_1} - \left[\left(\frac{1}{2}I + K \right) g \right]_{\partial D_2}$	on ∂D_2				
$G(t)$	$\left[\left(\frac{1}{2}I + K \right) t \right]_{\partial D_1} - (D_n u)_{\partial D_2} = (D_n f)_{\partial D_1} - (Kg)_{\partial D_2}$	on ∂D_1				
		$(Kt)_{\partial D_1} - (D_n u)_{\partial D_2} = (D_n f)_{\partial D_1} - \left[\left(\frac{1}{2}I + K \right) g \right]_{\partial D_2}$	on ∂D_2			

I.P. : Identity Pair, U : Unknown

(*) In the Tables 1 and 2, $S\mu = \int_{\partial D} U(x, y; \omega) \cdot \mu(y) dS_y$, $K\mu = \int_{\partial D} \overline{TU}(x, y; \omega) \cdot \mu(y) dS_y$, $\bar{K}\mu = \int_{\partial D} \overline{TU}(x, y; \omega) \cdot \mu(y) dS_y$,
 $K^*\mu = \int_{\partial D} \overline{TU}(x, y; \omega) \cdot \mu(y) dS_y$, $D\mu = \bar{K}^*\mu = \int_{\partial D} \overline{TU}(x, y; \omega) \cdot \mu(y) dS_y$, $D_n\mu = \overline{T(K^*\mu)}$.

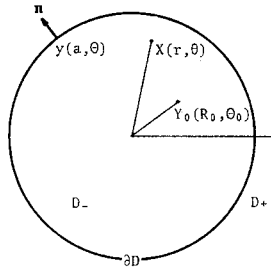


Fig. 2 Geometry of plane circular domain; Y_0 : point source location, X : field point, y : source (integration) point.

る。ここではこの方法を用いて二重層および Green 表示をも解析的に積分し上に述べた関係を明らかにする。

Fig. 2 に示すような極座標を用い、半径 a の円形領域の内部に点波源が存在する場合を考え、たとえば、**Table 1** における $F.I.G(t)$ すなわち応力表示による Green の方法により内部第一種問題の固有方程式と解表現の関係を考えてみる。

面外振動の場合、基本解の定義および基本解は次のようになる。

$$P\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)U = \mu(\mathcal{A} + kT^2)_X U(X, Y; \omega)$$

$$= -\delta(X, Y) \dots \dots \dots (14)$$

$$U(X, Y; \omega) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_T R), \quad R = |X - Y| \dots \dots \dots (15)$$

ここに、 $H_0^{(1)}(k_T R)$ は第一種零次 Hankel 関数、 ω , μ , k_T はそれぞれ角振動数、せん断弾性係数、横波の波数である。点 Y_0 に内部点波源 $u_{Y_0}(X)$ が存在する場合に内部 Green 変位表示式 (4) をいまの問題に対し具体的に書けば次のようになる。

$$u(X) = u_{Y_0}(X) + \int_{\partial D} U(X, y; \omega) t(y) dS_y - \int_{\partial D} \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial n_y} U(X, y; \omega) \right\} u(y) dS_y \dots \dots \dots (16)$$

ここに、 u : 面外変位, $t = \mu \partial u / \partial n$: 面外応力, $X = (r, \theta)$, $y = (a, \theta)$. 面外変位および応力を円周上で次のように Fourier 展開し、

$$u(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u^n e^{in\theta}, \quad t(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n e^{in\theta}$$

X について Fourier 変換を用いる方法⁹⁾により次式注2)

注 2) 複素平面上で $\oint \frac{zJ_n(bz)H_{n+m}^{(1)}(az)}{z^2 - k_T^2} dz$ 等を考え、無限遠と原点での積分の評価については Watson⁹⁾ を参照すればよい。

$$\int_0^\infty \frac{x J_n(bx) J_{n+m}(ax)}{x^2 - k_T^2} dx = \frac{\pi i}{2} J_n(bk_T) H_{n+m}^{(1)}(ak_T) + \frac{f(m, n, a, b)}{k_T^2}$$

$a > b, m \in \{\text{even}\}, \text{Im } k_T > 0, |n+m| \leq |n|+2$, また f は有界かつ $|n+m| < |n|+2$ に対しては $f(m, n, a, b) = 0$, ($\text{Im } k_T > 0$ は radiation condition の要請),

$$\int_0^\infty \frac{x J_n(bx) J_{n+m}(ax)}{x^2 - k_T^2} dx = \frac{\pi i k_T}{2} J_n(bk_T) H_{n+m}^{(1)}(ak_T) + \frac{g(m, n, a, b)}{k_T^2}$$

$a > b, m \in \{\text{odd}\}, \text{Im } k_T > 0, |n+m| \leq |n|+3$, また g は有界かつ $|n+m| < |n|+3$ に対しては, $g(m, n, a, b) = 0$,

に注意して, 式 (16) の積分を行えば次のようになる.

$$u(X) = u_{Y_0}(X) + \frac{\pi i}{2\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_T r) \cdot [H_n^{(1)}(k_T a) t^n - k_T \mu H_n^{(1)'}(k_T a) u^n] e^{in\theta} \dots (17)$$

ここに $H_n^{(1)'}(k_T a)$ は argument による微分を表わす. これより応力表示式として次式を得る.

$$t(X) = \mu \frac{d}{dr} u_{Y_0}(X) + \frac{\pi i k_T a}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(k_T r) \cdot [H_n^{(1)}(k_T a) t^n - k_T \mu H_n^{(1)'}(k_T a) u^n] e^{in\theta} \dots (18)$$

一方, 点波源は次のように表わされる.

$$u_{Y_0}(X) = (U * \delta_{Y_0})(X) = U(X, Y_0; \omega) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}[k_T R(X, Y_0)]$$

$$= \begin{cases} \frac{i}{4\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(k_T r) J_n(k_T R_0) e^{in(\theta - \theta_0)} & r > R_0 \\ \frac{i}{4\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_T r) H_n^{(1)}(k_T R_0) e^{in(\theta - \theta_0)} & r < R_0 \end{cases} \dots (19)$$

応力表示式 (18) に境界条件 $T_r u = 0$ を適用すれば次式を得る.

$$\frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [k_T H_n^{(1)'}(k_T a) J_n(k_T R_0) e^{-in\theta_0} + (4i + 2\pi k_T a J_n'(k_T a) H_n^{(1)}(k_T a)) t^n] e^{in\theta} = 0 \dots (20)$$

よって, $4i + 2\pi k_T a J_n'(k_T a) H_n^{(1)}(k_T a) = 2\pi k_T a J_n(k_T a) H_n^{(1)'}(k_T a) \neq 0$ であれば, Fourier 係数 t^n が次のように,

$$t^n = \frac{-e^{-in\theta_0}}{2\pi a} \frac{J_n(k_T R_0)}{J_n(k_T a)} \dots (21)$$

定まり, 第一種問題に対する Green 関数 G_1 が次のように求まる.

$$G_1(X, Y_0; \omega) = U(X, Y_0; \omega) - \frac{i}{4\mu} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}(k_T a)}{J_n(k_T a)} J_n(k_T r) J_n(k_T R_0) e^{in(\theta - \theta_0)} \dots (22)$$

Table 3 Eigenfrequency equation, Fourier coefficient and representation of solution for the point source.

Formulation of problem	Eigenfrequency equation	Fourier coefficient
First Interior problem (F.I.)	Representation of solution	$G_1(X, Y_0; \omega) = U(X, Y_0; \omega) - \frac{i}{4\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_T r) J_n(k_T a)^{-1} H_n^{(1)}(k_T a) J_n(k_T R_0) e^{in(\theta - \theta_0)}$ $X, Y_0 \in D_-$
	$L(D)$	$J_n(k_T a) H_n^{(1)'}(k_T a) = 0$ $\mu^n = -e^{-in\theta_0} H_n^{(1)'}(k_T a)^{-1} J_n(k_T a)^{-1} H_n^{(1)}(k_T a) J_n(k_T R_0) / 2\pi a k_T \mu$
	$L(S)$	$J_n'(k_T a) H_n^{(1)}(k_T a) = 0$ $\mu^n = -e^{-in\theta_0} J_n'(k_T a)^{-1} J_n(k_T a)^{-1} H_n^{(1)}(k_T R_0) / 2\pi a$
	$G(u)$	$J_n(k_T a) H_n^{(1)'}(k_T a) = 0$ $t^n = -e^{-in\theta_0} J_n(k_T a)^{-1} J_n(k_T R_0) / 2\pi a$
Second Exterior problem (S.E.)	Representation of solution	$G_2(X, Y_0; \omega) = T(X, Y_0; \omega) - \frac{i k_T}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)'}(k_T r) H_n^{(1)'}(k_T a)^{-1} J_n'(k_T a) H_n^{(1)}(k_T R_0) e^{in(\theta - \theta_0)}$ $X, Y_0 \in D_+$
	$L(S)$	$J_n(k_T a) H_n^{(1)'}(k_T a) = 0$ $\mu^n = -e^{-in\theta_0} J_n(k_T a)^{-1} H_n^{(1)'}(k_T a)^{-1} J_n'(k_T a) H_n^{(1)}(k_T R_0) / 2\pi a$
	$L(D)$	$J_n'(k_T a) H_n^{(1)'}(k_T a) = 0$ $\mu^n = -e^{-in\theta_0} H_n^{(1)'}(k_T a)^{-1} H_n^{(1)}(k_T R_0) / 2\pi a k_T \mu$
	$G(u)$	$J_n(k_T a) H_n^{(1)'}(k_T a) = 0$ $u^n = -e^{-in\theta_0} H_n^{(1)'}(k_T a)^{-1} H_n^{(1)}(k_T R_0) / 2\pi a k_T \mu$
Second Interior problem (S.I.)	Representation of solution	$G_3(X, Y_0; \omega) = T(X, Y_0; \omega) - \frac{i k_T}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(k_T r) J_n'(k_T a)^{-1} H_n^{(1)'}(k_T a) J_n(k_T R_0) e^{in(\theta - \theta_0)}$ $X, Y_0 \in D_-$
	$L(S)$	$J_n'(k_T a) H_n^{(1)}(k_T a) = 0$ $\mu^n = -e^{-in\theta_0} H_n^{(1)}(k_T a)^{-1} J_n'(k_T a)^{-1} H_n^{(1)'}(k_T a) J_n(k_T R_0) / 2\pi a$
	$L(D)$	$J_n'(k_T a) H_n^{(1)'}(k_T a) = 0$ $\mu^n = -e^{-in\theta_0} J_n'(k_T a)^{-1} J_n(k_T R_0) / 2\pi a k_T \mu$
	$G(u)$	$J_n'(k_T a) H_n^{(1)}(k_T a) = 0$ $u^n = e^{-in\theta_0} J_n'(k_T a)^{-1} J_n(k_T R_0) / 2\pi a k_T \mu$
First Exterior problem (F.E.)	Representation of solution	$G_1(X, Y_0; \omega) = U(X, Y_0; \omega) - \frac{i}{4\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(k_T r) H_n^{(1)}(k_T a)^{-1} J_n(k_T a) H_n^{(1)}(k_T R_0) e^{in(\theta - \theta_0)}$ $X, Y_0 \in D_+$
	$L(D)$	$J_n'(k_T a) H_n^{(1)}(k_T a) = 0$ $\mu^n = -e^{-in\theta_0} J_n'(k_T a)^{-1} H_n^{(1)}(k_T a)^{-1} J_n(k_T a) H_n^{(1)}(k_T R_0) / 2\pi a k_T \mu$
	$L(S)$	$J_n(k_T a) H_n^{(1)}(k_T a) = 0$ $\mu^n = -e^{-in\theta_0} H_n^{(1)}(k_T a)^{-1} H_n^{(1)}(k_T R_0) / 2\pi a$
	$G(u)$	$J_n(k_T a) H_n^{(1)'}(k_T a) = 0$ $t^n = e^{-in\theta_0} H_n^{(1)}(k_T a)^{-1} H_n^{(1)}(k_T R_0) / 2\pi a$

ここで、Fourier 係数 t^n が一意的に定まらない条件 $J_n(k_T a) H_n^{(1)'}(k_T a) = 0 \dots \dots \dots (23)$

が固有値を決定する固有方程式となる。

同様に、Table 1 に示した各種問題に対する各種積分方程式に対応して、点波源が内部領域、外部領域に存在する場合について固有方程式、Fourier 係数、解表現 (Green 関数) をまとめたものが Table 3 である。この Table において、 G_2 は第二種問題に対する Green 関数であり、また $T(X, Y_0; \omega) = \mu \partial / \partial n_X U(X, Y_0; \omega)$ である。この Table における固有方程式より、実波数が固有値となることに注意し、零固有値を除いて考えることにすれば、実線、一点鎖線で囲んだ定式化により得られる固有値は、内部第一種、内部第二種問題の固有値にそれぞれ一致することがわかる。

また、この Table 3 は Table 1 に示したものと同一積分表示式を積分したものであることに注意すれば、Table 1 における積分方程式間の相互関係が明らかとなる。すなわち、Table 1 において、与えられた境界値を零とおいた固有値決定積分方程式も Table 3 と同じ固有値を決定することがわかる。この意味において、Table 1 における定式化の欄にも実線、一点鎖線に対応する固有値決定積分方程式を明示しておいた。積分作用素の一般的性質から積分方程式相互間の固有値の関係を 2.(2) で述べたが、簡単な形状についてはここに示したようにより具体的な形で相互関係を示すことができる。

ここで一つ注意したい。de Mey¹⁰⁾ および Hutchinson¹¹⁾ らは固有値を簡便に求めようとして第二種 Bessel 関数 $Y_0(k_T R)$ を用いて内部問題の固有値を求めることを提案している。しかし、正しい固有方程式は、たとえば第一種問題の場合、Table 3 の F.I.G(u) の固有方程式であるにもかかわらず、彼らの方法によると $J_n(k_T a) Y_n(k_T a) = 0$ となり、したがって $Y_n(k_T a)$ の零点も同時に誤って求められることになる。彼らの方法を任意形状問題に適用した場合には、どれが真の固有値かは識別できなくなる危険性がある。積分方程式法を用いて正しく固有値解析を行うには、基本解として波が外向き (outgoing) か内向き (in-coming) かに分離された解 (たとえば radiation condition を満足する解 (15)) を用いることが必要である。

4. 数値計算

本節では 2. で構成したすべての固有値決定積分方程式より得られる固有値の精度を比較し、本手法により固有値を求める場合、どの積分方程式が数値計算上最も適しているかを数値実験する。また、固有密度、固有モー

ドの求め方およびそれらの精度についても検討を加えた後、任意形状問題への一適用例として、三角形形状の混合境界値問題の固有振動モードの解析例を示す。

なお、各種積分方程式により得られた結果の比較検討のために、まず正解がよく知られた面外固有振動問題を対象として数値解析を行うこととする。

固有値の計算法は前論文¹⁾と同じであるので省略し、ここでは固有密度、固有モードの計算法について概略説明しておく。2. で述べたすべての固有値決定積分方程式の行列表現は次のようになる。

$$[A(k_T)]\{\mu\} = \{0\} \dots \dots \dots (24)$$

ここに、 $[A]$ 、 $\{\mu\}$ はそれぞれ 2. で示した各種分作用素、各未知密度に対応している。求める固有値は行列式 $\det[A(k_T)]$ の極小値に対応するパラメーター k_T の値として決定される。この固有値に対応する固有密度 $\{\mu\}$ は、ある一つの代表点で密度の実部のある値に指定することにより優決定系を構成し、最小自乗法を適用して求められる。固有密度が求めれば、この固有密度を 2. に示した解表現に代入することにより内部の任意点における固有モードの値を求めることができる。

(1) 各種積分方程式による固有値の精度について

ここでは各種積分方程式により求まる固有値の精度比較を行うことを目的としているので、最も簡単な近似法を選んだ。すなわち、各区間を直線近似し、密度は各区間で一定、数値積分は Gauss 8 点法、固有パラメーターの分割幅は 0.1 と固定する。ただし、source point と field point が一致する区間に対しては、境界直線近似、密度一定という仮定のもとに解析的に積分している。すなわち、field point を内点に置き、直線境界上で積分を行い、必要な微分操作を内点にて行い、その後境界極限を採る方法を用いている。

2. および 3. で述べたことより、2. の Table 1, 2 に示した各種積分方程式により得られる固有値の精度を比較検討するためには、各問題に対し次の同次積分方程式を考えれば十分であることがわかる。

(1) 内部第一種 (変位) 問題の固有値

$$(i) \quad \mathbf{S}t = \mathbf{0}, \text{ F.I.L}(\mathbf{S}), \text{ F.I.G}(\mathbf{u}), \text{ F.E.L}(\mathbf{S}), \text{ F.E.G}(\mathbf{u}) \dots \dots (25)$$

$$(ii) \quad \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{K}^*\right)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \text{ F.I.L}(\mathbf{D}), \text{ S.E.G}(\mathbf{u}) \dots \dots \dots (26)$$

$$(iii) \quad \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{K}\right)t = \mathbf{0}, \text{ F.I.G}(t), \text{ S.E.L}(\mathbf{S}) \dots \dots \dots (27)$$

(2) 内部第二種 (応力) 問題の固有値

$$(i) \quad \mathbf{D}n\mathbf{u} = \mathbf{0}, \text{ S.I.L}(\mathbf{D}), \text{ S.I.G}(t), \text{ S.E.L}(\mathbf{D}), \text{ S.E.G}(t) \dots \dots (28)$$

(ii) $\left(\frac{1}{2}I + \bar{K}^*\right)u = 0, \text{ S.I.G}(u), \text{ F.E.L}(D)$
(29)

(iii) $\left(\frac{1}{2}I + K\right)t = 0, \text{ S.I.L}(S), \text{ F.E.G}(t)$
(30)

(3) 内部第三種 (混合) 問題の固有値

(i) $\begin{cases} (St)_{\partial D_1} - (\bar{K}^*u)_{\partial D_2} = 0, x \in \partial D_1 \\ (St)_{\partial D_1} - \left[\left(\frac{1}{2}I + \bar{K}^*\right)u\right]_{\partial D_1} = 0, x \in \partial D_2 \end{cases}$
 M.I.G(u).....(31)

(ii) $\begin{cases} (St)_{\partial D_1} - (\bar{K}^*u)_{\partial D_2} = 0, x \in \partial D_1 \\ (Kt)_{\partial D_1} - (D_n u)_{\partial D_2} = 0, x \in \partial D_2 \end{cases}$
 M.I.G(u, t), M.E.G(u, t).....(32)

(iii) $\begin{cases} \left[\left(\frac{1}{2}I - K\right)t\right]_{\partial D_1} + (D_n u)_{\partial D_1} = 0, x \in \partial D_1 \\ (Kt)_{\partial D_1} - (D_n u)_{\partial D_2} = 0, x \in \partial D_2 \end{cases}$
 M.I.G(t).....(33)

ここで、各積分方程式の右にはその定式化を示しておいた。以下簡単のために、たとえば積分作用素を K とする積分方程式を、方程式 K と書くことにする。

Table 4~8 はこれらの積分方程式により得られた固有値解析の結果を示している。これらの Table すべてにおいて各欄に示した各行の値は上から正解、本手法により得た固有値、相対誤差をパーセントで示している。

Table 4, 5 はそれぞれ円形領域に対する第一種、第二種問題の固有値を示している。ここで、 s, n はそれぞれ

Table 4 Eigenvalues of the first problem (circle, $N=28, \Delta k_T=0.1, 8\text{-point Gauss}$).

$s \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	2.405	3.832	5.136	6.380	7.588	8.771	9.936	11.086
	2.4 2.4	3.9 3.9	5.2 5.2	6.4 6.4	7.6 7.6	8.8 8.8	9.8 10.0	11.1 11.1
	0.21 0.21	1.77 1.77	1.25 1.25	0.31 0.31	0.16 0.16	0.33 0.33	1.37 0.64	0.13 0.13
1	5.520	7.016	8.417	9.761	11.065			
	5.5 5.5	7.1 7.1	8.5 8.5	9.8 9.8	11.1 11.1			
	0.36 0.36	1.20 1.20	0.99 0.99	0.40 0.40	0.32 0.32			
2	8.654	10.173	11.620					
	8.5 8.5	10.2 10.2	11.7 11.7					
	1.78 1.78	0.27 0.27	0.69 0.69					
3	11.792							
	11.7 11.7							
	0.78 0.78							

Exact (\bar{k}_T)

S	$K(\bar{K}^*)$
(k_T)	(k_T)
e	e

$e = |\bar{k}_T - k_T| / \bar{k}_T (\%)$

Table 5 Eigenvalues of the second problem (circle, $N=28, \Delta k_T=0.1, 8\text{-point Gauss}$).

$s \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.0	1.841	3.054	4.201	5.318	6.416	7.501	8.578
	0.1 0.1	1.8 1.9	3.1 3.1	4.2 4.2	5.4 5.4	6.5 6.5	7.5 7.6	8.6 8.6
	— —	2.23 3.20	1.51 1.51	0.02 0.02	1.54 1.54	1.31 1.31	0.01 1.32	0.26 0.26
1	3.832	5.331	6.706	8.015	9.282			
	3.9 3.9	5.4 5.4	6.7 6.7	8.1 8.1	9.3 9.3			
	1.77 1.77	1.29 1.29	0.09 0.09	1.06 1.06	0.19 0.19			
2	7.016	8.536						
	7.0 7.0	8.6 8.6						
	0.23 0.23	0.75 0.75						

Exact (\bar{k}_T)

D_n	$-\bar{K}(-\bar{K}^*)$
(k_T)	(k_T)
e	e

$e = |\bar{k}_T - k_T| / \bar{k}_T (\%)$

Table 6 Eigenvalues of the first problem (square, $N=28, \Delta k_T=0.1, 8\text{-point Gauss}$).

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6
1	4.443	7.025	9.935	12.953	16.019	19.110
	4.4 4.4 4.4	7.0 7.0 7.0	9.9 9.9 9.9	12.9 12.9 12.9	16.0 16.0 16.0	19.1 19.1 19.1
	0.98 0.98 0.98	0.36 0.36 0.36	0.35 0.35 0.35	0.41 0.41 0.41	0.12 0.12 0.12	0.05 0.05 0.05
2		8.886	11.327	14.050	16.918	19.869
		8.9 8.8 8.9	11.3 11.3 11.3	14.0 14.0 14.0	16.8 16.8 16.8	19.8 19.8 19.8
		0.16 0.97 0.16	0.24 0.24 0.24	0.36 0.36 0.36	0.70 0.70 0.70	0.35 0.35 0.35
3			13.327	15.708	18.318	21.074
			13.3 13.3 13.3	15.7 15.7 15.7	18.3 18.3 18.2	21.0 21.0 20.9
			0.22 0.22 0.22	0.05 0.05 0.05	0.10 0.10 0.63	0.35 0.35 0.83

Exact (\bar{k}_T)

S	\bar{K}^*	K
(k_T)	(k_T)	(k_T)
e	e	e

$e = |\bar{k}_T - k_T| / \bar{k}_T (\%)$

Table 7 Eigenvalues of the second problem (square, $N=28$, $\Delta k_T=0.1$, 8-point Gauss).

$m \backslash n$	1			2			3			4			5			6		
0	3.142			6.283			9.425			12.566			15.708			18.850		
	2.8	3.2	3.2	6.3	6.3	6.3	9.3	9.4	9.5	12.5	12.6	12.6	15.7	15.7	15.8	18.8	18.9	18.9
	10.88	1.85	1.85	0.27	0.27	0.27	1.33	0.27	0.80	0.27	0.27	0.27	0.05	0.05	0.59	0.27	0.27	0.27
1	4.443			7.025			9.935			12.953			16.019			19.110		
	4.3	4.5	4.5	6.7	7.0	7.1	9.9	9.9	10.0	12.8	13.0	13.0	16.0	16.0	16.0	19.0	19.1	19.1
	3.22	1.28	1.28	4.63	0.36	1.07	0.35	0.35	0.65	1.18	0.36	0.36	0.12	0.12	0.12	0.58	0.05	0.05
2	8.886			11.327			14.050			16.918			19.869					
	8.7	8.9	8.9	11.1	11.3	11.4	14.0	14.0	14.1	16.8	16.9	17.0	19.8	20.0	20.0			
	2.09	0.16	0.16	1.12	0.26	0.64	0.36	0.36	0.36	0.70	0.11	0.48	0.35	0.66	0.66			

$$\begin{array}{c}
 \text{Exact } (\bar{k}_T) \\
 \begin{array}{ccc}
 D_n & -\bar{K}^* & -K \\
 (k_T) & (k_T) & (k_T) \\
 e & e & e
 \end{array} \\
 e = |\bar{k}_T - k_T| / \bar{k}_T (\%)
 \end{array}$$

Table 8 Eigenvalues of the third problem (rectangular, $a/b=2$, $N=54$, $\Delta k_T=0.1$, 8-point Gauss).

$m \backslash n$	1			2			3			4		
0	6.283			12.566			18.850			25.133		
	6.3	6.3	6.3	12.6	12.6	12.6	18.9	18.9	18.9	25.1	25.1	25.1
	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.13	0.13	0.13
1	7.025			12.953			19.110			25.328		
	7.0	7.0	7.0	13.0	13.0	12.9	19.1	19.1	19.1	25.3	25.3	25.3
	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.41	0.05	0.05	0.05	0.11	0.11	0.11
2	8.886			14.050			19.869			25.906		
	8.9	8.9	8.9	14.1	14.0	14.1	19.9	19.9	19.9	25.9	25.9	25.9
	0.16	0.16	0.16	0.36	0.36	0.36	0.16	0.16	0.16	0.02	0.02	0.02
3	11.327			15.708			21.074			26.842		
	11.3	11.3	11.3	15.7	15.7	15.7	21.1	21.1	21.1	26.8	26.8	26.8
	0.24	0.24	0.24	0.05	0.05	0.05	0.12	0.12	0.12	0.16	0.16	0.16
4	14.050			17.772			22.654			28.099		
	14.1	14.0	14.0	17.8	17.8	17.8	22.6	22.6	22.7	28.1	28.1	28.1
	0.36	0.36	0.36	0.16	0.16	0.16	0.24	0.24	0.20	0.004	0.004	0.004
5	16.918			20.116			24.537			29.638		
	16.9	16.9	16.9	20.1	20.1	20.1	24.5	24.5	24.5	29.6	29.6	29.6
	0.11	0.11	0.11	0.08	0.08	0.08	0.15	0.15	0.15	0.13	0.13	0.13
6	19.869			22.654			26.657			31.416		
	19.9	19.9	19.9	22.6	22.6	22.7	26.6	26.6	26.6	31.4	31.4	31.4
	0.16	0.16	0.16	0.24	0.24	0.20	0.21	0.21	0.21	0.05	0.05	0.05

$$\begin{array}{c}
 \text{Exact } (\bar{k}_T) \\
 \begin{array}{ccc}
 G(u) & G(u, t) & G(t) \\
 (k_T) & (k_T) & (k_T) \\
 e & e & e
 \end{array} \\
 e = |\bar{k}_T - k_T| / \bar{k}_T (\%)
 \end{array}$$

節円の数、節直径の数を示している。円形の場合、方程式 K と \bar{K}^* の値はいま考えている問題に対しては一致することに注意されたい。各欄の第一、第二列には **Table 4** について方程式 S および $K(\bar{K}^*)$ 、**Table 5** について方程式 D_n および $-K(-\bar{K}^*)$ により得られた値を示している。これらの **Table** より、円形領域の場合、第一種、第二種問題共に式 (25)~(27)、(28)~(30) に示したどの積分方程式を用いても結果にはほとんど差はなく、ほぼ 1% 以内の相対誤差で固有値が求

まっていることがわかる。**Table 6, 7** はそれぞれ正方形領域に対する第一種、第二種問題の固有値解析の結果を示している。 m, n は節線の数を示しており、各欄における各列の値は **Table 6** について方程式 $S, \bar{K}^*, K, \text{Table 7} について方程式 $D_n, -\bar{K}^*, -K$ により得られた値を示している。これらの結果より、第二種問題における方程式 D_n により得られたいくつかの低次固有値を除き、正方形の場合にも先に示したいずれの積分方程式を用いてもほぼ同じ結果 (ほぼ 1% 以内の相対誤差) を得ることがわかる。方程式 D_n は他のものに比して積分核の特異性が強く、特に波数 k_T が小さい場合には積分核に含まれる引数 (波数 k_T と距離との積) が小さくなるためこの性質はより顕著なものとなる。このため方程式 D_n を用いて低次固有値をも正確に求めるためには、形状近似 (特に隅角部)、密度近似、積分法等の改良が必要となるものと思われる。**Table 8** は辺長比 $a/b=2$ の長方形領域に対する第三種問題 (相対する辺 a 上で固定 ($u=0$), 短辺 b 上で自由 ($t=0$)) の解析結果を示している。この **Table** は境界分割数 $N=54$ ($a: 18$ 分割, $b: 9$ 分割) に対する結果であり、各$

欄における各列の値はそれぞれ定式化 $G(u), G(u, t), G(t)$ による結果を示している. また, m, n はそれぞれ長辺, 短辺上の節線数を示している. **Table** に示した固有値の値については, 各定式化についてほぼ同じ 1% 以内の相対誤差であることがわかる.

(2) 固有密度, 固有モードの精度について

ここでは本手法により得た固有値に対し, 固有密度, 固有モードがどの程度の精度で求まるかを確認するために, 円形領域第一種問題の固有密度, 固有モードについて考えてみる.

Table 9 は固有密度, 固有モードの値を求めるために用いた固有値の値を示している. 各欄の値は上から正解, 本手法による値, 相対誤差を示している. **Fig. 3~5** は, それぞれ節直径の数 $n=0, 1, 2$ について本手法により得た固有値 (**Table 9**) に対して, 境界分割数 N をそれぞれ 1, 8, 16 とし, 固有密度, 固有モードを求め, 4 分円上の値を示したものである. N の選び方の指針としては, 固有密度の半波長の内部に 3 点を含むように配慮している. 固有密度 (●印) は, x_1 軸上の密度

Table 9 Eigenvalues of the first problem for the calculation of eigendensities and eigenmodes (circle, $N=28, \Delta k_r=0.001, 48\text{-point Gauss on arc}$).

$s \backslash n$	0	1	2
0	2.405	3.832	5.136
	2.406	3.833	5.135
	0.04	0.03	0.02
1	5.520	7.016	8.417
	5.521	7.017	8.417
	0.02	0.01	0.00
2	8.654	10.173	11.620
	8.656	10.176	11.619
	0.02	0.03	0.01

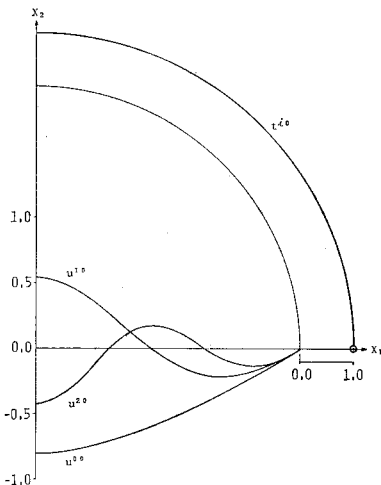


Fig. 3 Eigendensities and eigenmodes for $n=0 (N=1)$.

の実部を 1.0, 虚部を 0.0 と指定した最小自乗法を用いて求め, 円周上の外法線方向に正の値を示している. 固有モードは固有密度を 変位表示式に 代入することにより, x_1 軸上のモードを求め (x_1 軸上 20 点) x_2 軸方向に正の値を示している. これらの図においては密度およびモードの実部を示しているが, 参考までに示せばこれらの虚部の値はそれぞれほぼ $10^{-15}, 10^{-9}$ のオーダーとなっている. 固有密度の精度については最小自乗法における剰余項の指定値, この場合複素数値 (1.0, 0.0), の満足度が一つの目安となると思われるが, いまの場合実部, 虚部共に十分満足されている. **Table 10** は **Fig. 3~5** に示した固有モードの精度を検討するために節円の半径を直線補間により求めた結果を示している. 各欄の値は上から, Bessel 関数の零点比により決まる正解⁽²⁾,

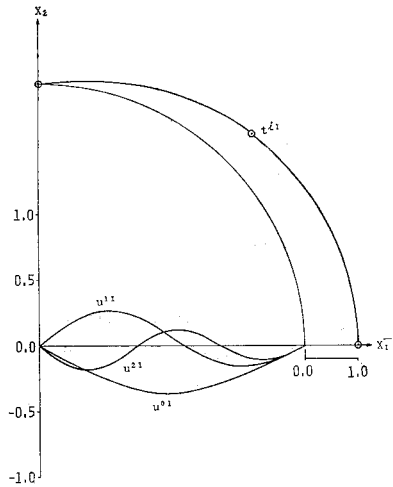


Fig. 4 Eigendensities and eigenmodes for $n=1 (N=8)$.

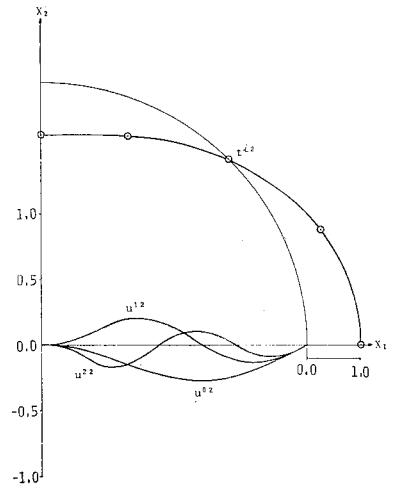


Fig. 5 Eigendensities and eigenmodes for $n=2 (N=16)$.

Table 10 Radii of nodal circles ($N=1$ ($n=0$), $N=8$ ($n=1$), $N=16$ ($n=2$)).

$k_T^{n\prime}$	$n=0$		$n=1$		$n=2$	
	k_T^{10}	k_T^{20}	k_T^{11}	k_T^{21}	k_T^{12}	k_T^{22}
\bar{r}_1	0.435 7	0.278 0	0.546 2	0.376 6	0.610 1	0.442 0
r_1	0.436 1	0.278 9	0.545 9	0.377 4	0.608 1	0.444 2
error	0.09	0.32	0.05	0.21	0.33	0.50
\bar{r}_2		0.637 9		0.689 6		0.724 4
r_2		0.637 9		0.682 3		0.726 4
error		0.00		1.06		0.28

error = $|\bar{r}_i - r_i|/\bar{r}_i$ (%)

本手法による値、相対誤差をパーセントで示している。この結果より、節円半径の相対誤差はすべてコンマ数パーセントであり、固有モードも十分な精度で得られることがわかる。この結果より、節線により決まる密度半波長を表現するに最低限必要な数の境界点（密度半波長内に3点）をとれば、固有密度、固有モードは十分な精度で求まることが確認された。

(3) 三角形形状第三種（混合）問題の解析

ここでは、任意形状、任意境界条件を有する固有値問題への適用性を検討するために、面外固有振動問題につき、三角形形状を有する第三種（混合）問題を考え、固有値、固有密度、固有モードの数値解析例を示す。用いる積分方程式は Green 表示による式 (31) である。Table 11 は底辺固定、両斜辺自由という境界条件のもとで、底辺長 $b=\sqrt{2}$ 、高さ $h=1/\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形の固有値を本手法により求めた結果を示している。境界分割数は $N=40$ （底辺上 18 分割、斜辺上各 11 分割）、固有パラメータの分割幅は $\Delta k_T=0.01$ として固有値を求め、小さい方から順に 10 個の値を示したものである。この問題の正解は一辺 $\sqrt{2}$ の正方形第一種（固定）問題の部分集合となっており¹³⁾、本解析結果の精度を検討することができる。Table の各欄は上から固有値の正解、本手法により得た値、相対誤差をパーセントで示している。また、その上欄には一辺 $\sqrt{2}$ の正方形第一種問題の固有値との対応を k_T^{mn} (m, n は正方形第一種問題の一つの境界線を含めた節線数) として示している。すなわち、正方形第一種問題の固有値のうち対角線について対称なモードに対応する固有値が現問題に対する固有値の正解となる。この Table からわかるように、本手法は三角形形状、第三種問題に対しても十分な

精度を有している。Fig. 6 は上と同じ境界条件のもとで、 $b=3$ 、 $h=1$ なる二等辺三角形の解析結果（固有密度、固有モード、節線、固有値）を示している。図中の底辺上の一点鎖線は面外応力 t の分布（境界の外側に正の値をプロット）、斜辺上の実線は面外変位 u の分布（境界線の右側に正の値をプロット）を、また領域内部の破線は固有密度および固有モードの値が零となる点を結ぶことにより求めた節線を示している。また図の下部には固有値を示している。

5. おわりに

ここで得られた結果を要約すれば次のようになる。

(1) 第一種、第二種問題に対し、層ポテンシャル表示による第一種、第二種積分方程式、Green 表示による第三種問題に対する 3 種類の積分方程式を含め、層ポテンシャル表示および Green 表示による積分方程式すべてが Table 1, 2 として整理された。

(2) 円形形状を有する第一種、第二種問題に対し、Table 1 に示されたすべての積分方程式を解析的に積分することにより、各種の積分方程式間の具体的関係を明らかにし、Table 3 として整理した。これより、特に外部場の積分方程式の固有方程式からも内部固有値が求まることがわかった。具体的には、第二種積分方程式に関しては、内部第一種問題の固有値は外部第二種問題の固有方程式から、内部第二種問題の固有値は外部第一種問題の固有方程式から求まる。さらに、第一種方程式に関しては、内部第一種問題の固有値は外部第一種問題の固有方程式から、また内部第二種問題の固有値は外部第二種問題の固有方程式から求まることがわかった。

(3) Table 1, 2 に示したすべての積分方程式について固有値を求めその精度について検討した。これより各固有値決定積分方程式の数値的特性が明らかとなり、二重層の微分を含まない積分方程式についてはどの積分方程式を用いても固有値はほぼ 1% 以内の精度で容易に求め得ることが明らかとなった。二重層の微分を含む積分方程式については、ここで用いた数値解析による限り低次固有値の計算では若干精度が劣る。

(4) 固有密度、固有モードの精度について検討を行い、本手法によれば固有密度、固有モードも十分な精度

Table 11 Eigenvalues of the third (mixed) problem (right isosceles triangle, $b=\sqrt{2}$, $h=1/\sqrt{2}$, $N=40$, $\Delta k_T=0.01$, 8-point Gauss).

k_T^{mn}	1 k_T^{11}	2 k_T^{22}	3 k_T^{13}	4 k_T^{23}	5 k_T^{24}	6 k_T^{15}	7 k_T^{44}	8 k_T^{35}	9 k_T^{26}	10 k_T^{55}
\bar{k}_T	3.142	6.283	7.025	9.425	9.935	11.327	12.566	12.953	14.050	15.708
k_T	3.15	6.28	7.04	9.43	9.93	11.34	12.56	12.96	14.04	15.70
$ \bar{k}_T - k_T /\bar{k}_T$ (%)	0.25	0.05	0.21	0.05	0.05	0.11	0.05	0.05	0.07	0.05

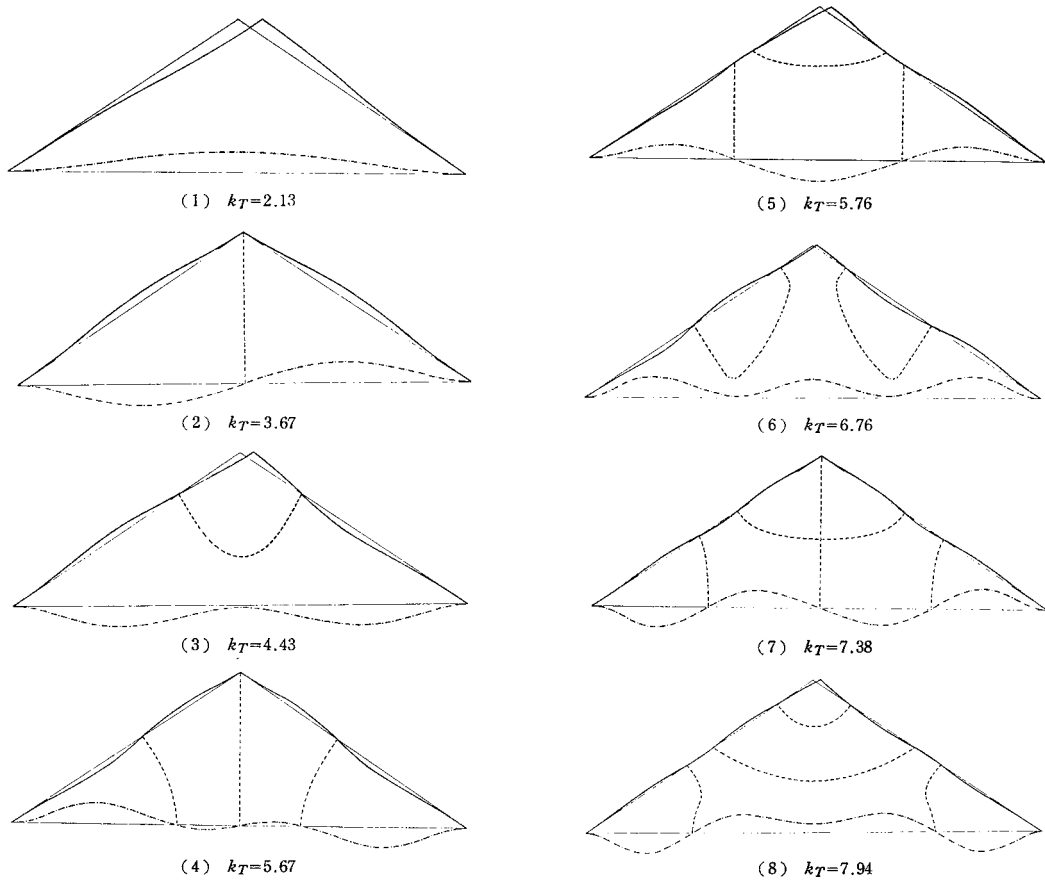


Fig. 6 Eigendensities and eigenmodes of the third (mixed) problem (isosceles triangle, $b=3$, $h=1$).

(コンマ数パーセントのオーダー) で容易に求め得ることが明らかとなった。

なお、本論文の 3. の作成にあたり、京都大学工学部西村直志氏より有用な助言をいただいた。ここに深く感謝の意を表わしたい。また、本計算には京都大学大型計算機センター FACOM M-190 を使用した。

参 考 文 献

- 1) 丹羽義次・小林昭一・北原道弘：弾性固有値問題の積分方程式による解法，土木学会論文報告集，No. 285，pp. 17~28，1979.
- 2) 丹羽義次・小林昭一・北原道弘：積分方程式法による平板の固有振動問題の解析，土木学会論文報告集，No. 304，pp. 1~16，1980.
- 3) Miller, G.F.: Fredholm equations of the first kind, In: Numerical Solution of Integral Equations, Ch. 13, Ed. L.M. Delves and J. Walsh, Clarendon Press, Oxford, pp. 175~188, 1974.
- 4) Shaw, R.P.: Boundary integral equation methods applied to wave problems, In: Developments in Boundary Element Methods-1, Ch. 6, Ed. P.K. Banerjee and R. Butterfield, Applied Science Publishers, London, pp. 121~153, 1979.
- 5) Tai, R.C. and R.P. Shaw: Eigenvalues and eigenmodes for the homogeneous Helmholtz equation for

- arbitrary domains, Dept. of Engineering Science, Rept. No. 90, State University of New York at Buffalo, 1973.
- 6) Cassot, F. and G.P. Extremet: Détermination numérique du champ sonore et des fréquences propres dans une enceinte circulaire par la méthode de discrétisation, Acustica, Vol. 27, pp. 238~245, 1972.
- 7) Filippi, P.J.T.: Layer potentials and acoustic diffraction, J. Sound Vibration, Vol. 54, No. 4, pp. 473~500, 1977.
- 8) Kobayashi, S. and N. Nishimura: Green's tensors for elastic half-spaces, Memo. Faculty of Eng., Kyoto Univ., Vol. 42, Pt. 2, pp. 228~241, 1980.
- 9) Watson, G.N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge Univ. Press, 1966.
- 10) De Mey, G.: A simplified integral equation method for the eigenvalues of the Helmholtz equation, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 11, pp. 1340~1342, 1977.
- 11) Hutchinson, J.R.: Determination of membrane vibrational characteristics by the boundary integral equation methods, In: Recent Advances in Boundary Element Methods, Ed. C.A. Brebbia, Pontech Press, London, pp. 301~316, 1978.
- 12) Rayleigh, J.W.S.: Theory of Sound, Vol. 1, Ch. 9, Dover, 1945.
- 13) Morse, P.M. and H. Feshbach: Methods of Theoretical Physics, Pt. 1, Ch. 6, McGraw-Hill, 1953.

(1980.7.31・受付)