

## 薄肉はり要素の有限変位微小ひずみ問題としての一定式化

A THEORETICAL FORMULATION OF THIN-WALLED BEAM ELEMENTS  
WITHIN SMALL STRAINS UNDER FINITE DISPLACEMENTS

阿井正博\*・西野文雄\*\*

By Masahiro AI and Fumio NISHINO

## 1. はじめに

いわゆる一次元構造要素の中で最も複雑な挙動を示し最も多くの変位パラメーターを含むものとしては薄肉はり要素を考えるのが普通であるが、曲げせん断変形の一一般的な扱いを除いて微小変位問題としてのその基礎方程式がすでに確立された観がある<sup>1)~3)</sup>一方、有限変位問題としての基礎方程式についてはいまなお報告が続いている<sup>7)~15)</sup>。

薄肉はりの有限変位解析は他の構造要素と同様に、線形化有限変位理論としての基礎方程式の定式化<sup>4)~6)</sup>に端を発しているが、有限変位そのものを問題とした薄肉はりの基礎方程式について近年種々に報告されている。任意の平面曲線材について Namita<sup>7)</sup> は微分幾何の手法のもとにはりの軸線上で考えた変位パラメーターの二次までの非線形項を展開しており、Schroeder<sup>8)</sup> は変位パラメーターの3次非線形項までを展開して基礎方程式を誘導している。つり合い方程式を空間での幾何学的なつり合いを考えて求める場合には運動場についての幾何学的考察と統一性を保つことが重要な問題となるが、仮想仕事の原理を用いれば運動場との一貫性を保つつり合い方程式(力学的境界条件式も含めて)が変分演算の結果として求まることから、複雑な運動場を用いる有限変位問題では仮想仕事の原理よりつり合い式が誘導されることは少なくない<sup>9), 10), 11)~15)</sup>。西野・倉方・長谷川・奥村の報告<sup>8)</sup> では軸方向変位の非線形項を無視して薄肉直線はりの基礎方程式が導かれており、薄木<sup>9)</sup> は同様の考え方を薄肉円弧はりに適用しているが、運動場の設定における前述の打切(truncation)の効果は横倒れ座屈の解析結果が有限な純曲げ状態を基準として線形化有限変位理論の

立場より厳密に誘導されている Vacharajiffphan・Trahair<sup>10)</sup> の結果に一致しないことに顕著である。事口・久保・中井<sup>11)</sup> と平嶋・井浦・依田<sup>13)</sup> は、それぞれ異なる運動場を用いて、仮想仕事の原理より二次の非線形項すべてを含んだつり合い式を誘導している。倉方は<sup>12)</sup>、開断面の平面曲線材を対象として、より厳密な基礎方程式を誘導しており、断面の反りに付随する断面の面内の相対的な変位までも考慮してより大きいねじれに対しても適用できる運動場を展開していることは注目される。以上のそれぞれの基礎方程式は、薄肉はりの有限変位理論の厳密化という意味で段階的に発展してきたこれまでの結果であるが、いまなお変位に関する高次非線形項を無視するという操作がなされており、その適用において変位の大きさに関して制限があるということが出来る。

本報告は、任意に有限変位する曲げせん断変形を含まない薄肉はり要素の基礎方程式を、変位の大きさを制限することなく誘導することを目的としている。生ずるひずみは単位に比較して十分小さいものとして、有限変位微小ひずみ理論としての展開を行っているが、その中には断面の反りに伴う断面内の相対的な変位を考慮することも含めている。薄肉はりの一次元化での変位パラメーターはこれまでのものと同様に4つであるが、その具体的な定義をはりの初期形状とは無関係に行い、変位ではなく、初期形状をも含めた薄肉はりの空間形状そのものに運動場を適用することにより、初期形状に依存しないより一貫した有限変位理論としての基礎方程式を定式化している。その有限変位問題の扱いに関する立場は、最後にまとめとして述べている。つり合い式は仮想仕事の原理より誘導しているが、運動場を用いる場合でこれまで一般的であった変位パラメーターの変分を独立の仮想変分量とするのではなく、数学的に他の形に変換された独立変分量を採用することにより煩雑な変分演算を避けた展開を行って対応するつり合い方程式を求めている

\* 正会員 工博 法政大学講師 工学部土木工学科

\*\* 正会員 Ph.D. 東京大学教授 工学部土木工学科

る。

### 2. 空間伸長曲線の微分幾何

空間に右手系直交デカルト座標  $\{x, y, z\}$  を考え、その単位基ベクトルを  $\{i_{(xyz)}\} = \{i_x, i_y, i_z\}$  と表わす。空間で変形する曲線 (G-線) が、 $\zeta$  をパラメーターとして、

$$r_G(\zeta) = \langle x_G(\zeta), y_G(\zeta), z_G(\zeta) \rangle \{i_{(xyz)}\} \dots (1)$$

と表わされるものとする。このとき、独立変数  $\zeta$  は、初期状態において、

$$(x_{G0})^2 + (y_{G0})^2 + (z_{G0})^2 = 1 \dots (2)$$

を満たすように、すなわち、初期状態での曲線の実長に沿う物体固定座標として定義されているものとする。ここに、記号  $( )$  は初期状態での物理量を、記号  $( )'$  は  $\zeta$  に関する微分を意味しており、 $\langle \rangle$  および  $\{ \}$  の記号はそれぞれ行ベクトルと列ベクトルを表わす。これ以後、変形の前後を特に断わらない限り変形後の物理量を意味するものとする。

G-線の伸び率  $\epsilon_G$  および微分幾何学でいうところの曲率半径  $\rho_G$  は、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_G &= |r_G'| - 1 = \{(x_G')^2 + (y_G')^2 + (z_G')^2\}^{1/2} - 1 \\ \frac{1}{\rho_G} &= |\ddot{r}_G| = \frac{1}{(1+\epsilon_G)^2} \{(x_G'')^2 + (y_G'')^2 \\ &\quad + (z_G'')^2 - (\epsilon_G'')^2\}^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots (3 \cdot a, b)$$

と表わされる。ここに、記号  $( )'$  は曲線の実長に沿う微分を表わす。G-線上の点の倍法線、主法線および接線方向の単位ベクトルをその順に  $\{i_{G(\tau\epsilon\zeta)}\} = \{i_{G\tau}, i_{G\epsilon}, i_{G\zeta}\}$  とすれば、

$$\{i_{G\tau}, i_{G\epsilon}, i_{G\zeta}\} = \{\rho_G \ddot{r}_G \times \dot{r}_G, \rho_G \ddot{r}_G, \dot{r}_G\} \dots (4)$$

と表わすことができる (Fig. 1)。前式に式 (1) を代入して展開すれば、回転変換  $\{i_{G(\tau\epsilon\zeta)}\} = [T_G(\zeta)] \{i_{(xyz)}\}$  の直交マトリックス  $[T_G]$  は、 $\{x_G, y_G, z_G\}$  に関して、

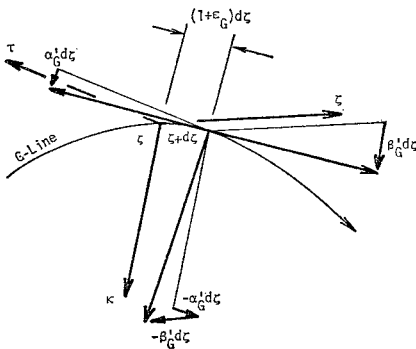


Fig. 1 Tangent, Principal Normal and Bi-Normal Directions of G-Line.

$$= \left[ \begin{aligned} &\frac{\rho}{(1+\epsilon)^3} \left\langle \begin{matrix} y'', z'' \\ y', z' \end{matrix}, \begin{matrix} z'', x'' \\ z', x' \end{matrix}, \begin{matrix} x'', y'' \\ x', y' \end{matrix} \right\rangle \\ &= \frac{\rho}{(1+\epsilon)^2} \langle x'', y'', z'' \rangle - \frac{\rho \epsilon'}{(1+\epsilon)^3} \langle x', y', z' \rangle \\ &\frac{1}{(1+\epsilon)} \langle x', y', z' \rangle \end{aligned} \right]_G \dots (5)$$

と表わすことができる。  $1/\tau_G = i_{G\tau}' \cdot i_{G\epsilon}$  で定義される微分幾何学でいうところの G-線のねじれ率半径  $\tau_G$  は、式 (5) の第 1 行の  $\zeta$  に関する微分と第 2 行との内積を考慮することにより、

$$\frac{1}{\tau_G} = \frac{\rho_G^2}{(1+\epsilon_G)^6} \left[ \begin{matrix} x', y', z' \\ x'', y'', z'' \\ x''', y''', z''' \end{matrix} \right]_G \dots (3 \cdot c)$$

と与えられる。

単位ベクトル  $\{i_{G(\tau\epsilon\zeta)}\}$  は  $\zeta$ -座標に沿って変化するのが、その微係数を  $\{i_{G(\tau\epsilon\zeta)}'\} = [\Phi_G] \{i_{G(\tau\epsilon\zeta)}\}$  の形で表わすものとすれば、マトリックス  $[\Phi_G]$  は Frenet-Serret の式より、

$$[\Phi_G(\zeta)] = (1+\epsilon_G) \begin{bmatrix} 0 & 1/\tau & 0 \\ -1/\tau & 0 & -1/\rho \\ 0 & 1/\rho & 0 \end{bmatrix} \dots (6)$$

と表わされる。ここで、G-線の  $\zeta$  座標に関するねじれ率  $\alpha_G'$  と曲率  $\beta_G'$  を

$$\alpha_G' = (1+\epsilon_G)/\tau_G, \quad \beta_G' = (1+\epsilon_G)/\rho_G \dots (7 \cdot a, b)$$

で定義するものとする。

式 (1) の  $r_G(\zeta)$  の  $\zeta$  に関する 1 階微係数の変分が

$$\delta r_G'(\zeta) = \langle \delta \alpha(\zeta), \delta \beta(\zeta), \delta \epsilon(\zeta) \rangle \{i_{G(\tau\epsilon\zeta)}\} \dots (8)$$

の形で  $\{\delta \alpha, \delta \beta, \delta \epsilon\}$  を独立変分量として表わされるとき  $\{i_{G(\tau\epsilon\zeta)}\}$  および規格量  $\epsilon_G, \alpha_G', \beta_G'$  の変化を考える。式 (3 \cdot a) の変分より、

$$\delta \epsilon_G = \delta |r_G'| = r_G' \cdot \delta r_G' / |r_G'| = \delta \epsilon \dots (9 \cdot a)$$

であり、式 (7 \cdot b) の変分は、式 (3 \cdot b) と (9 \cdot a) および

$$\delta r_G'' = \langle \delta \alpha', \delta \beta', \delta \epsilon' \rangle + \langle \delta \alpha, \delta \beta, \delta \epsilon \rangle [\Phi_G] \{i_{G(\tau\epsilon\zeta)}\} \dots (10)$$

の関係を用いて展開すれば、

$$\delta \beta_G' = \frac{\delta \alpha}{\tau_G} + \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\delta \beta}{1+\epsilon_G} \right) \dots (9 \cdot b)$$

として求まる。単位ベクトル  $\{i_{G(\tau\epsilon\zeta)}\}$  の変分は次のように求まる。  $\delta i_{G\zeta}$  は、式 (4)、(9 \cdot a) を用いて展開すれば、

$$\delta i_{G\zeta} = \delta \left( \frac{r_G'}{1+\epsilon_G} \right) = \frac{\delta \alpha}{1+\epsilon_G} i_{G\tau} + \frac{\delta \beta}{1+\epsilon_G} i_{G\epsilon}$$

と表わされる。  $\delta i_{G\epsilon}$  は、式 (4)、(9 \cdot a, b)、(10) を用いて、

$$\delta i_{G\epsilon} = \frac{\rho_G}{1+\epsilon_G} \left\{ \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\delta \alpha}{1+\epsilon_G} \right) - \frac{\delta \beta}{\tau_G} \right\} i_{G\tau}$$

$$-\frac{\delta\beta}{1+\epsilon_G} \mathbf{i}_{Gz}$$

と表わされる。以上の結果と任意の直交単位ベクトル  $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$  における変分関係  $\delta \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = -\delta \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_i$  ( $i \neq j$ ),  $=0$  ( $i=j$ ) を考えれば,  $\delta \{\mathbf{i}_{G(\tau, \zeta)}\} = [\delta \Phi_G] \{\mathbf{i}_{G(\tau, \zeta)}\}$  と表わすものとして, マトリックス  $[\delta \Phi_G]$  は,

$$[\delta \Phi_G] = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ \frac{\rho_G}{1+\epsilon_G} \left\{ \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\delta\alpha}{1+\epsilon_G} \right) - \frac{\delta\beta}{\tau_G} \right\} & & & & & \\ \frac{\delta\alpha}{1+\epsilon_G} & & & & & \\ -\frac{\rho_G}{1+\epsilon_G} \left\{ \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\delta\alpha}{1+\epsilon_G} \right) - \frac{\delta\beta}{\tau_G} \right\} & -\frac{\delta\alpha}{1+\epsilon_G} & & & & \\ 0 & & & -\frac{\delta\beta}{1+\epsilon_G} & & \\ \frac{\delta\beta}{1+\epsilon_G} & & & 0 & & \\ \dots\dots\dots & & & & & \dots\dots\dots \end{bmatrix} \quad (11)$$

と表わされる。ねじれ率  $\alpha'_G$  の変分は, 式 (6) と (11) を用いて展開すれば,

$$\begin{aligned} \delta\alpha'_G &= \delta(\mathbf{i}_{G\tau} \cdot \mathbf{i}_{G\zeta}) \\ &= -\frac{d}{d\zeta} \left[ \frac{\rho_G}{1+\epsilon_G} \left\{ \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\delta\alpha}{1+\epsilon_G} \right) - \frac{\delta\beta}{\tau_G} \right\} \right] \\ &\quad - \frac{\delta\alpha}{\rho_G} \dots\dots\dots (9 \cdot c) \end{aligned}$$

として得られる。

以上の結果において, 伸び率  $\epsilon_G$  が十分小さい場合には単位に比較してそれを無視することができる。

3. 薄肉はりの一次元化

伸び, 曲げおよびねじれを受けて有限変位する薄肉曲線はりの運動場を以下の仮定のもとに導く。

- i) はりに生じるひずみ成分はいずれも単位に比較して十分小さい。
- ii) ④ はりの断面にはその面内にひずみが生じない。
- ⑤ はりの軸方向に平行で薄肉中心面に垂直である面内にはせん断ひずみが生じない。
- ⑥ 薄肉はりの開断面部では薄肉中心面内にせん断ひずみが生じないものとし, 閉断面部では同面内にいわゆるせん断流によるせん断ひずみを考えるものとする<sup>9)</sup>。

本文では, 開断面と閉断面の薄肉はりを扱うが, 簡単のために, 1室閉断面で閉断面全体を代表させるものとする。有限変位運動場を扱うに際して, 外力・強制変位の作用していない薄肉はりの無応力状態を初期状態とよぶものとし, 初期状態に特定の外力を作用させることにより得られる伸び, 曲りおよびねじれのない直線形状を基準状態とよぶものとする。

薄肉はりの幾何形状を記述するのに Fig. 2 に示す 3 組の座標系を考える。空間座標としては, 2. で用いた

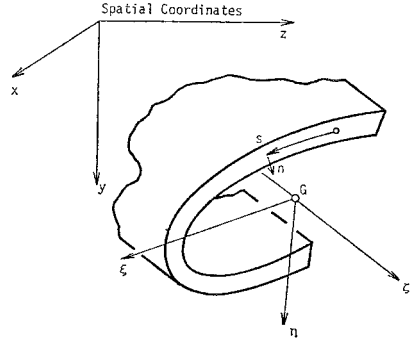


Fig. 2 Coordinate Systems.

直交デカルト座標  $\{x, y, z\}$  を考える。はりの 1 つの軸線を G-線として, 初期状態での G-線の実長に沿って物体固定座標  $\zeta$  を定義するものとし, 2. での G-線に関する記述を以下に採用する。G-線の法平面内で G 点を原点とする直交座標  $\{\xi, \eta\}$  を後述のように定義する。もう 1 組の物体固定座標として, 基準状態での断面の薄肉中心線の長さに沿って  $s$ -座標を, その法線方向に  $n$ -座標を定める。以上の 3 組の座標系  $\{x, y, z\}$ ,  $\{\xi, \eta, \zeta\}$ ,  $\{s, n, t\}$  は, いずれも右手系として定義するものとする。

断面形状は基準状態で長手方向に一様であるものとし,  $s$ -座標をパラメーターとした

$$\begin{aligned} \text{薄肉中心線の形状: } &\{\xi^*(s), \eta^*(s)\}, \text{ 肉厚: } t(s) \\ &\dots\dots\dots (12 \cdot a, b) \end{aligned}$$

の関数形が与えられて規定されるものとする (Fig. 3)。

ここに, 記号 (\*) は薄肉中心線上での物理量を意味する。

G-線を式 (1) で記述する  $\{x_G(\zeta), y_G(\zeta), z_G(\zeta)\}$  は軸線の空間形状を規定する変位パラメーターであるが, もう 1 つの変位パラメーターとして断面の回転

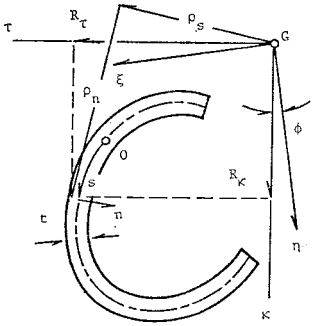


Fig. 3 Cross-Section.

パラメーター  $\varphi(\zeta)$  を次のように定義するものとする。G-線の単位ベクトル  $\{\mathbf{i}_{G\tau}, \mathbf{i}_{G\zeta}\}$  を軸線まわりで  $\varphi(\zeta)$  回転させた単位ベクトルを  $\{\mathbf{i}_{G\xi}, \mathbf{i}_{G\eta}\}$  と表わすものとし,  $\{\mathbf{i}_{G\xi}, \mathbf{i}_{G\eta}\}$  を前述の  $\{\xi, \eta\}$  座標の基ベクトルとして対応させることにより断面の回転自由度を導入し, G-線に固定された座標系  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  を定義するものとする。以上の 4 つの変位パラメーターの設定は, ケーブルを充実円形断面の弾性棒とみなした島田の展開<sup>10)</sup> と基本的には同一である。変換  $\{\mathbf{i}_{G(\xi, \eta, \zeta)}\} = [T_\varphi(\zeta)] \{\mathbf{i}_{G(\tau, \zeta)}\}$  を規

定する直交マトリックス  $[T_\varphi]$  は、

$$[T_\varphi(\varphi(\zeta))] = \begin{bmatrix} [t_\varphi] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi, \sin \varphi, 0 \\ -\sin \varphi, \cos \varphi, 0 \\ 0, 0, 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(13)$$

と表わされ、断面内の点から  $\epsilon, \tau$ -軸までの距離  $\{R_\tau, R_\epsilon\}$  は、

$$\{R_\tau, R_\epsilon\} = [t_\varphi]^T \{\xi, \eta\} \dots\dots\dots(14)$$

で与えられる。

$\{x_G, y_G, z_G, \varphi\}$  は長手方向に連続する断面の全体的な空間位置を規定する変位パラメーターであるが、次に、 $\{\xi, \eta, \zeta\}$  座標に関する断面上の基準状態からの相対的な変位を  $\langle u(s, n, \zeta), v(s, n, \zeta), w(s, n, \zeta) \rangle \{i_{G(\xi\eta\zeta)}\}$  と表わすものとする。  $w$  はいわゆる反りであるが、 $\{u, v\}$  を特に面内の相対変位とよぶものとする。これらの相対変位は、与えられた断面形状に対して、仮定 ii) ③～⑤のもとに後述するように変位パラメーターに從属して定まる。以上より、物体固定座標  $\{s, n, \zeta\}$  で規定される物質点の空間位置は、式 (1) と式 (5), (13) の変換マトリックスを用いて、

$$\mathbf{r}(s, n, \zeta) = \langle \langle x_G, y_G, z_G \rangle + \langle \xi + u, \eta + v, w \rangle \cdot [T_\varphi] [T_G] \rangle \{i_{xyz}\} \dots\dots\dots(15)$$

と表わされることとなる。

基準状態での  $s$ -座標方向と  $\xi$ -軸とのなす角を  $\theta(s)$  とすれば薄肉任意点の  $s$ -座標の微小増分による実長の変化  $d\bar{s}$  が  $d\bar{s} = (1 - nd\theta/ds) ds$  であることより (Fig. 4),  $\{\xi, \eta\}$  と  $\{s, n\}$  の微分関係は、

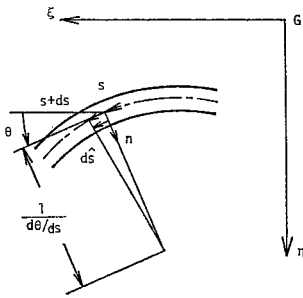


Fig. 4  $\{s, n\}$ -Coordinates.

$$d \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - nd\theta/ds) \cos \theta, & -\sin \theta \\ (1 - nd\theta/ds) \sin \theta, & \cos \theta \end{bmatrix} d \begin{Bmatrix} s \\ n \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(16)$$

と表わされる。  $\{i_{(xyz)}\}$  から  $\{i_{G(\xi\eta\zeta)}\}$  への変換マトリックス  $[\hat{T}] = [T_\varphi][T_G]$  の  $\zeta$  に関する微係数を  $d[\hat{T}]/d\zeta = [\hat{\phi}][\hat{T}]$  の形で表わすものとするれば、式 (6), (13) を用いて展開することにより、マトリックス  $[\hat{\phi}]$  は、

$$[\hat{\phi}] = \begin{bmatrix} 0, & (\alpha_G' + \varphi'), & -\beta_G' \sin \varphi \\ -(\alpha_G' + \varphi'), & 0, & -\beta_G' \cos \varphi \\ \beta_G' \sin \varphi, & \beta_G' \cos \varphi, & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(17)$$

として求まる。  $\{i_{G(\xi\eta\zeta)}\}$  が前述の意味で断面に固定された単位ベクトルであることより、 $(\alpha_G' + \varphi')$  は  $\zeta$ -座標に関する断面のねじれ率、 $\beta_G' \sin \varphi, \beta_G' \cos \varphi$  はそれぞ

れ  $\xi, \eta$ -軸方向への断面の曲率を表わすことになる。

式 (16), (17) を用いて式 (15) の  $\mathbf{r}(s, n, \zeta)$  を  $\{s, n, \zeta\}$  で微分することにより、基ベクトルは  $\{i_{G(\xi\eta\zeta)}\}$  に関して、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{g}_s &= \left\langle \left(1 - n \frac{d\theta}{ds}\right) \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial s}, \left(1 - n \frac{d\theta}{ds}\right) \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial s} \right\rangle \{i_{G(\xi\eta\zeta)}\} \\ \mathbf{g}_n &= \left\langle -\sin \theta + \frac{\partial u}{\partial n}, \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial n}, \frac{\partial w}{\partial n} \right\rangle \\ &\quad \cdot \{i_{G(\xi\eta\zeta)}\} \\ \mathbf{g}_\zeta &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial \zeta} - (\eta + v) (\alpha_G' + \varphi') + w \beta_G' \sin \varphi, \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial v}{\partial \zeta} + (\xi + u) (\alpha_G' + \varphi') + w \beta_G' \cos \varphi, \right. \\ &\quad \left. 1 + \epsilon_G + \frac{\partial w}{\partial \zeta} - (\xi + u) \beta_G' \sin \varphi - (\eta + v) \right. \\ &\quad \left. \cdot \beta_G' \cos \varphi \right\rangle \{i_{G(\xi\eta\zeta)}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18 \cdot a \sim c)$$

と表わされ、それらの内積により計量テンソル  $\{g_{ss}, g_{nn}, g_{sn}, g_{\zeta\zeta}, g_{s\zeta}, g_{n\zeta}\}$  を得ることができる。

薄肉はりの幾何形状に関しては次のような設定を考える。薄肉はりの幾何形状の次元は、はり長さ  $l$  に代表される軸線方向の次元  $l \sim \rho_G \sim (\partial/\partial\zeta)^{-1}$  と断面寸法の次元  $\{\xi, \eta\} \sim \{R_\tau, R_\epsilon\} \sim \{(\partial/\partial s)^{-1}, (\partial/\partial n)^{-1}\}$  および薄肉の肉厚  $t$  よりなるが、 $\epsilon$  を仮定 i) の微小ひずみの条件のもとで許されるひずみの大きさとして、

$$\left(\frac{R_\epsilon}{l}\right)^2 \sim \left(\frac{t}{R_\epsilon}\right)^2 \sim \frac{t}{l} \sim \epsilon \dots\dots\dots(19)$$

程度の関係は薄肉はりの幾何形状について設定するものとする。次に、薄肉はりの伸び、曲りおよびねじれの大きさと前述の次元との間に、開断面はりと同断面はりのそれぞれに対して次のような関係が成立することを仮定する。

[開断面はり]

$$\epsilon_G \sim R_\epsilon \beta_G' \sim t (\alpha_G' + \varphi') \sim \epsilon \dots\dots\dots(20 \cdot a)$$

程度の関係が保たれ、 $\{u, v, w\}$  について、反り  $w$  が

$$w \sim R_\epsilon^2 (\alpha_G' + \varphi') \dots\dots\dots(21)$$

の大きさであり、面内成分は  $w$  に比較して小さく

$$\partial\{u, v\}/\partial s \sim \partial\{u, v\}/\partial n \sim (\partial w/\partial s)^2 \sim (\partial w/\partial n)^2 \dots\dots\dots(22)$$

の関係にあることを想定する。この場合、 $\{u, v, w\}$  の大きさは、

$$\{u, v\} \sim R_\epsilon \epsilon, \quad w \sim R_\epsilon \epsilon^{1/2} \dots\dots\dots(23 \cdot a)$$

となる。

[閉断面はり]

$$\epsilon_G \sim R_\epsilon \beta_G' \sim R_\epsilon (\alpha_G' + \varphi') \sim \epsilon \dots\dots\dots(20 \cdot b)$$

の関係が保たれ、相対変位については式 (21), (22) が開断面と同様に成立するものと想定する。この場合、

$$\{u, v\} \sim R_s \epsilon^2, \quad w \sim R_s \epsilon \dots \dots \dots (23 \cdot b)$$

となる。

基準状態 ( $u=v=w=0$ ) の計量テンソルの断面内成分は  $g_{ss}^0 = (1 - n d\theta/ds)^2$ ,  $g_{nn}^0 = 1$ ,  $g_{sn}^0 = 0$  であるが, Green のひずみテンソルと計量テンソルの関係を考えれば, 断面内にひずみが生じないという仮定 ii) ④ は面内の計量テンソル成分が初期状態を含めて一定

$$g_{ss}^0 = (1 - n d\theta/ds)^2, \quad g_{nn}^0 = 1, \quad g_{sn}^0 = 0 \dots \dots \dots (24 \cdot a \sim c)$$

であり変化しないことに等価である。前文中の記号 ( )<sup>o</sup> は基準状態での物理量を意味する。さらに, 仮定 ii) ④, ⑤ は Green のひずみテンソル成分に関して  $2e_{nc} = 0$ ,  $2e_{sc}^* = \text{const.}/t$  と表わされるが<sup>9)</sup>, 前述の扱いと同様に, 計量テンソルに関する仮定

$$g_{nc} = 0, \quad g_{sc}^* = \text{const.}/t \dots \dots \dots (24 \cdot d, e)$$

に置き換えることができる。以上の操作は仮定 ii) を広義解釈したものであり, その一般性に抵触するものではない。式 (18 \cdot a \sim c) の内積より求まる  $g_{nc}$ ,  $g_{sc}$  を式 (24 \cdot d, e) に適用し, 開断面で式 (20 \cdot a), (23 \cdot a), 閉断面で式 (20 \cdot b), (23 \cdot b) の関係を考えて単位に比較して  $\epsilon^1$  より高次の項を無視するものとすれば, 反り  $w(s, n)$  に関する

$$\left. \begin{aligned} \rho_n (\alpha_G' + \varphi') + \partial w / \partial n &= 0 \\ \rho_s^* (\alpha_G' + \varphi') + \partial w^* / \partial s &= \text{const.}/t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25 \cdot a, b)$$

の偏微分方程式が得られる。前式は開断面と閉断面とで共通であるが, 開断面に対しては  $\epsilon^{1/2}$  の次元の, 閉断面には  $\epsilon^1$  の次元の関係式となっている。ここに,  $\rho_n (= \rho_n^*)$ ,  $\rho_s (= \rho_s^* - n)$  は,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_n \\ -\rho_s \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \xi \\ \eta \end{array} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

で定義した長さである (Fig. 3)。

閉断面部の薄肉中心線上で式 (25 \cdot b) を考え, 閉路に沿う周積分の後, 反りに関する適合条件  $\oint (\partial w^* / \partial s) ds = 0$  を考えれば,

$$\text{const.} = (\alpha_G' + \varphi') \frac{\oint \rho_s^* ds}{\oint 1/t ds} \dots \dots \dots (27)$$

が定まる。開断面部では連続する断面の自由端部での力学的境界条件より  $\text{const.} = 0$  である。ここに, 開断面部とは開断面の全領域と閉断面の開路上でない領域を意味し, 閉断面部とは閉断面の開路上の領域を意味する。式 (27) の  $s$  に関する定数を式 (25 \cdot b) に戻して積分すれば  $w^*(s)$  が定まる。式 (25 \cdot a) の積分を  $\rho_n$  が  $n$  に関して定数であることを考えて行えば  $w = w^* - (\alpha_G' + \varphi') \rho_n n$  がいえる。以上より,  $s$ -座標の原点で  $w^* = 0$  としたときの反り  $w(s, n)$  は,

$$w(s, n, \zeta) = -(\alpha_G' + \varphi') W(s, n) \left. \begin{aligned} W(s, n) &= \int_0^s \left[ \rho_s^* - \left( \frac{\oint \rho_s^* ds}{\oint 1/t ds} \right)_{\text{closed}} \frac{1}{t} \right] ds \\ &\quad + \rho_n n \dots \dots \dots (28 \cdot a, b) \end{aligned} \right\}$$

として求まる。ここに, 記号 ( )<sub>closed</sub> は, 開断面部で  $(F)_{\text{closed}} = 0$ , 閉断面部で  $(F)_{\text{closed}} = F$  を意味する。

式 (26) で定義された  $\{\rho_n, -\rho_s\}$  の  $\{s, n\}$  に関する微係数は, 式 (16) の変換マトリックスと  $\rho_s = \rho_s^* - n$ ,  $\rho_n = \rho_n^*$  の関係より

$$d \left\{ \begin{array}{l} \rho_n \\ -\rho_s \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 - \rho_s^* d\theta/ds & 0 \\ -\rho_n d\theta/ds & 1 \end{bmatrix} d \left\{ \begin{array}{l} s \\ n \end{array} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

と表わすことができる。式 (18 \cdot a, b) の内積より求まる  $\{g_{ss}, g_{nn}, g_{sn}\}$  を式 (24 \cdot a \sim c) に適用して, 開断面と閉断面はりでのそれぞれの式 (20 \cdot a), (23 \cdot a) と式 (20 \cdot b), (23 \cdot b) を考えて単位に比較して  $\epsilon^1$  より高次の項を無視するものとすれば, 閉断面はりでは式 (24 \cdot a \sim c) は恒等的に満足される。すなわち, すべての項が  $\epsilon^1$  より高次となる。したがって, 閉断面はりでは面内相対変位を考えないものとする。開断面はりでは, 式 (24 \cdot a \sim c) に式 (28 \cdot a, b) の結果を代入し式 (29) を考えることにより,  $\epsilon^1$  の次元の式として,

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta \frac{\partial u}{\partial s} + \sin \theta \frac{\partial v}{\partial s} &= -\frac{1}{2} (\alpha_G' + \varphi')^2 \\ &\quad \cdot \left\{ \left( 1 - n \frac{d\theta}{ds} \right) \rho_s^* + n \right\}^2 \\ -\sin \theta \frac{\partial u}{\partial n} + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial n} &= -\frac{1}{2} (\alpha_G' + \varphi')^2 \rho_n^2 \\ \left( -\sin \theta \frac{\partial u}{\partial s} + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial s} \right) &+ \left( \cos \theta \frac{\partial u}{\partial n} + \sin \theta \frac{\partial v}{\partial n} \right) \\ &= -(\alpha_G' + \varphi')^2 \rho_n \left\{ \left( 1 - n \frac{d\theta}{ds} \right) \rho_s^* + n \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30 \cdot a \sim c)$$

の  $\{u, v\}$  に関する偏微分方程式が得られる。

基準状態 ( $\epsilon_G^0 = \beta^0 G^0 = (\alpha_G' + \varphi')^0 = 0$ ) で  $u=v=w=0$  であることを式 (30 \cdot a \sim c) で考えれば,  $\{u, v\}$  が

$$\{u, v\} = -(\alpha_G' + \varphi')^2 \{U(s, n), V(s, n)\} \dots (31)$$

の形に変数分離されることは明らかであり, さらに面内相対変位のモードを式 (16) の変換マトリックスを用いて,

$$\left\{ \begin{array}{l} U \\ V \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} (1 - n d\theta/ds) \cos \theta & -\sin \theta \\ (1 - n d\theta/ds) \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} U_s \\ U_n \end{array} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

として  $\{s, n\}$  方向のモード  $\{U_s, U_n\}$  に変換するものとすれば, 式 (30 \cdot a \sim c) は,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left( 1 - n \frac{d\theta}{ds} \right) U_s \right\} &- \frac{d\theta}{ds} U_n \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 - n \frac{d\theta}{ds} \right) \rho_s^* + n \right\}^2 \\
 \frac{\partial U_n}{\partial n} &= \frac{1}{2} \rho_n^2 \\
 \left( 1 - n \frac{d\theta}{ds} \right) \frac{\partial U_s}{\partial n} - n \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 U_s + \frac{\partial U_n}{\partial s} \\
 &= \rho_n \left\{ \left( 1 - n \frac{d\theta}{ds} \right) \rho_s^* + n \right\} \\
 &\dots\dots\dots (33\cdot a \sim c)
 \end{aligned} \right\}$$

と書き換えられる。ρ<sub>n</sub> が n に関して一定であることより、式 (33・b) を n に関して積分すれば U<sub>n</sub>(s, n) = U<sub>n</sub><sup>\*</sup>(s) + ρ<sub>n</sub><sup>2</sup>n/2 となり、式 (33・a, c) に代入して n に関する高次項を無視すれば、

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial U_s}{\partial s} - \frac{d\theta}{ds} U_n^* &= \frac{1}{2} \rho_s^{*2} \\
 \frac{\partial U_s}{\partial n} + \frac{\partial U_n^*}{\partial s} &= \rho_s^* \rho_n
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34\cdot a, b)$$

が得られる。式 (34・a) の左辺第 2 項と右辺が s のみの関数であることより U<sub>s</sub> も s のみの関数であり、式 (34・b) の左辺第 1 項を消去して s に関して積分すれば U<sub>n</sub><sup>\*</sup>(s) が求まる。そして、U<sub>n</sub><sup>\*</sup> を式 (34・a) に代入して s に関して積分すれば U<sub>s</sub>(s) が求まる。s=0 で U<sub>s</sub> = U<sub>n</sub><sup>\*</sup>=0 としたときの面内相対変位のモードは、

$$\left. \begin{aligned}
 U_s(s) &= \int_0^s \rho_s^*(\tau) \left\{ \frac{1}{2} \rho_s^*(\tau) + (\theta(s) \right. \\
 &\quad \left. - \theta(\tau)) \rho_n(\tau) \right\} d\tau \\
 U_n(s, n) &= \int_0^s \rho_s^*(\tau) \rho_n(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \rho_n^2 n \\
 &\dots\dots\dots (35\cdot a, b)
 \end{aligned} \right\}$$

として得られる。式 (31), (32), (35・a, b) により薄肉開断面はりの面内相対変位 {u(s, n, ζ), v(s, n, ζ)} は定まり、断面のねじれ率の二乗に比例して生ずることとなる。

以上の断面上の相対変位 {u, v, w} を式 (15) に代入すれば、r(s, n, ζ) は {x<sub>G</sub>(ζ), y<sub>G</sub>(ζ), z<sub>G</sub>(ζ), φ(ζ)} を独立変位パラメーターとして、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(s, n, \zeta) &= [ \langle x_G, y_G, z_G \rangle + \langle \xi, \eta, -W(\alpha_G' \\
 &\quad + \varphi') \rangle [T_\varphi] [T_G] ] + [ \langle -U(\alpha_G' \\
 &\quad + \varphi')^2, -V(\alpha_G' + \varphi')^2, 0 \rangle \\
 &\quad \cdot [T_\varphi] [T_G] ]_{O.B.} \{ \dot{u}(x, y, z) \} \dots (36)
 \end{aligned}$$

で与えられることとなり、運動場が定まる。ここに、記号 ( )<sub>O.B.</sub> は、任意の物理量 F に対して、開断面はりで (F)<sub>O.B.</sub> = F であり、閉断面はりで (F)<sub>O.B.</sub> = 0 であることを意味する。式 (36) は、薄肉はりの初期状態からの変位に適用した運動場ではなく、初期形状も含めた空間形状そのものに適用される運動場であり、1 組の関数 {x<sub>G</sub>(ζ), y<sub>G</sub>(ζ), z<sub>G</sub>(ζ), φ(ζ)} を与えれば 1 つの薄肉はりの幾何形状が定まることになる。

#### 4. ひずみ-変位関係

式 (36) の運動場を座標 {s, n, ζ} で微分すれば運動場の中で拘束された基ベクトルが求まり、基ベクトル相互の内積より計量テンソルが得られる。Green のひずみテンソルは計量テンソルの変形前後の差の 1/2 で与えられるが、単位に比較して e<sup>i</sup> より高次の微小項を無視するものとするれば、零でないひずみ成分は、

$$\left. \begin{aligned}
 e_{\zeta\zeta} &= [ \epsilon_G ] - [ R_i \beta_G' ] - W [ (\alpha_G' + \varphi')^2 ] \\
 &\quad + \left( \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) [ (\alpha_G' + \varphi')^2 ] \right)_{O.B.} \\
 e_{s\zeta} &= \frac{1}{2} \theta [ (\alpha_G' + \varphi') ] \\
 &\dots\dots\dots (37\cdot a, b)
 \end{aligned} \right\}$$

として表わされる。ここに、θ は関数

$$\theta(s, n) = \left( \frac{\oint \rho_s^* ds}{\oint 1/ds} \right)_{closed} \frac{1}{t} - 2n \dots\dots\dots (38)$$

を表わしており、記号 [ ] は変形後と初期状態での物理量の差 [F] = F - F<sub>0</sub> を意味する。

式 (20・a, b) で開断面と閉断面とで断面のねじれ率の大きさを区別して扱ったのは、式 (37・b), (38) で示される St. Venant のねじれによるせん断ひずみが開断面では肉厚×ねじれ率、閉断面では断面寸法×ねじれ率の大きさであることによる。式 (36) の運動場は、式 (19) の幾何形状に関する設定のもとで式 (20・a, b), (21), (22) の仮定より誘導されたが、その結果において式 (21), (22) は満足されている。式 (20・a, b) は式 (37・a, b) の右辺の各項が e<sup>i</sup> の次元であることと、すなわち仮定 i) の微小ひずみの条件と等価である。したがって、これまでの展開は、式 (19) の薄肉はりの幾何形状に関する設定と微小ひずみの条件のもとで許容される結果といえる。

#### 5. 仮想仕事の式とつり合い式

仮想仕事の原理よりつり合い方程式と力学的境界条件式を導く。運動場が導入された系の必要十分な自由度の仮想変位は一般に変位パラメーターの変分により与えられるが、自由度を同じに保つものとするれば他の形に変換された独立変分量を採用しても変分問題における本質的な機能は変わらないものと考えられる。本文では、G-線の空間位置 r<sub>G</sub>(ζ) の ζ に関する微係数の変分を 2. で述べた式 (8) のように表わすものとし、{δ $\alpha$ (ζ), δ $\beta$ (ζ), δ $\epsilon$ (ζ)} と δ{x<sub>G</sub>(0), y<sub>G</sub>(0), z<sub>G</sub>(0)} とで δ{x<sub>G</sub>(ζ), y<sub>G</sub>(ζ), δz<sub>G</sub>(ζ)} と同等の機能を果たさせるものとする。すなわち、{δ $\alpha$ (ζ), δ $\beta$ (ζ), δ $\epsilon$ (ζ), dφ(ζ); δx<sub>G</sub>(0),

$\delta y_G(0), \delta z_G(0)$  を仮想変位を表わす独立変分量として採用する。

変換マトリックス  $[\hat{T}] = [T_\varphi][T_G]$  の変分は、式 (11) の  $[\delta\phi_G]$  と式 (13) の  $[T_\varphi]$  の変分より、微小ひずみの条件のもとで、

$$\delta[\hat{T}] = [T_\varphi] \begin{bmatrix} 0 & , & -\rho_G(\delta\alpha' - \delta\beta/\tau_G) + \delta\varphi & , & -\delta\alpha \\ \rho_G(\delta\alpha' - \delta\beta/\tau_G) - \delta\varphi & , & 0 & , & -\delta\beta \\ \delta\alpha & , & \delta\beta & , & 0 \end{bmatrix} [T_G] \dots\dots\dots (39)$$

と展開することができる。式 (9・c) のねじれ率の変分と式 (39) を用いれば、式 (36) の運動場の変分は、独立変分量に関して微小ひずみの条件のもとに、

$$\begin{aligned} \delta r(s, n, \zeta) = & \langle \delta x_G(0), \delta y_G(0), \delta z_G(0) \rangle \{i_{(xyz)}\} + \int_0^\zeta \langle \delta\alpha, \delta\beta, \delta\epsilon \rangle \{i_{G(\tau\kappa\zeta)}\} d\zeta + \langle R_\kappa \left\{ \rho_G \left( \delta\alpha' - \frac{\delta\beta}{\tau_G} \right) - \delta\varphi \right\} \\ & - W(\alpha_G' + \varphi') \delta\alpha, -R_\tau \left\{ \rho_G \left( \delta\alpha' - \frac{\delta\beta}{\tau_G} \right) - \delta\varphi \right\} - W(\alpha_G' + \varphi') \delta\beta, -R_\tau \delta\alpha - R_\kappa \delta\beta \rangle \{i_{G(\tau\kappa\zeta)}\} \\ & + \langle 0, 0, -W \rangle \left[ -\frac{\delta\alpha}{\rho_G} - \frac{d}{d\zeta} \left\{ \rho_G \left( \delta\alpha' - \frac{\delta\beta}{\tau_G} \right) \right\} + \delta\varphi' \right] \{i_{G(\tau\kappa\zeta)}\} \\ & + \left( \begin{array}{l} 2(\alpha_G' + \varphi') \langle -U_\tau, -U_\kappa, 0 \rangle \left[ -\frac{\delta\alpha}{\rho_G} - \frac{d}{d\zeta} \left\{ \rho_G \left( \delta\alpha' - \frac{\delta\beta}{\tau_G} \right) \right\} + \delta\varphi' \right] \{i_{G(\tau\kappa\zeta)}\} \\ + (\alpha_G' + \varphi')^2 \langle -U_\kappa \left\{ \rho_G \left( \delta\alpha' - \frac{\delta\beta}{\tau_G} \right) - \delta\varphi \right\}, U_\tau \left\{ \rho_G \left( \delta\alpha' - \frac{\delta\beta}{\tau_G} \right) - \delta\varphi \right\}, \\ U_\tau \delta\alpha + U_\kappa \delta\beta \rangle \{i_{G(\tau\kappa\zeta)}\} \end{array} \right) \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

と表わすことができる。ただし、前式中の  $\{U_\tau, U_\kappa\}$  は  $\{U, U_\kappa\} = [t_\varphi]^T \{U, V\}$  で表わされる  $\tau, \kappa$ -方向の面内相対変位モードである。

式 (14) の変分演算より  $\delta\{R_\tau, R_\kappa\} = \{-R_\kappa, R_\tau\} \delta\varphi$  であることと式 (9・a~c) で表わされる G-線の規格量の変分を用いれば、式 (37・a, b) のひずみ成分の変分量は、

$$\left. \begin{aligned} \delta e_{\tau\zeta} = & \delta\epsilon - R_\tau \beta_G' \delta\varphi - R_\kappa \left( \frac{\delta\alpha}{\tau_G} + \delta\beta' \right) - W \frac{d}{d\zeta} \\ & \cdot \left[ -\frac{\delta\alpha}{\rho_G} - \frac{d}{d\zeta} \left\{ \rho_G \left( \delta\alpha' - \frac{\delta\beta}{\tau_G} \right) \right\} + \delta\varphi' \right] \\ & + \left( (\xi^2 + \eta^2) (\alpha_G' + \varphi') \left[ -\frac{\delta\alpha}{\rho_G} - \frac{d}{d\zeta} \right. \right. \\ & \cdot \left. \left. \left\{ \rho_G \left( \delta\alpha' - \frac{\delta\beta}{\tau_G} \right) \right\} + \delta\varphi' \right] \right)_{O.B.} \\ \delta e_{s\zeta} = & \frac{1}{2} \theta \left[ -\frac{\delta\alpha}{\rho_G} - \frac{d}{d\zeta} \left\{ \rho_G \left( \delta\alpha' - \frac{\delta\beta}{\tau_G} \right) \right\} + \delta\varphi' \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41 \cdot a, b)$$

と表わされる。

仮想仕事の式は、式 (20・a, b) が成立する範囲で、すなわち微小ひずみの条件の範囲で、

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_A [\sigma_{\tau\zeta} \delta e_{\tau\zeta} + 2\sigma_{s\zeta} \delta e_{s\zeta}] d(\text{area}) d\zeta \\ & = \int_0^l \int_A [\bar{p}^d \cdot \delta r] d(\text{area}) d\zeta \\ & + \left[ \int_A [\bar{q}^d \cdot \delta r] d(\text{area}) \right]_{\zeta=0}^l \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

と表わすことができる。ここに、A は薄肉はりの断面積であり、 $\sigma_{\tau\zeta}, \sigma_{s\zeta}$  はひずみテンソル  $e_{\tau\zeta}, 2e_{s\zeta}$  に対応する応力テンソル成分、 $\bar{p}^d$  は  $ds \times dn \times d\zeta$  の単位当たり

単位当たり  $\zeta$  の正の面に対して作用する表面力を表わす。

薄肉はりの断面の合応力を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} N = & \int_A \sigma_{\tau\zeta} d(\text{area}), \quad M_{(\tau)} = \int_A \sigma_{\tau\zeta} R_\tau d(\text{area}) \\ M_{(\kappa)} = & \int_A \sigma_{\tau\zeta} R_\kappa d(\text{area}), \quad M_W = \int_A \sigma_{\tau\zeta} W d(\text{area}) \\ T_S = & \int_A \sigma_{s\zeta} \theta d(\text{area}), \quad K = \int_A \sigma_{s\zeta} (\xi^2 + \eta^2) d(\text{area}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43 \cdot a \sim f)$$

体積力  $\bar{p}^d$  は次の3通りの成分表示

$$\begin{aligned} \bar{p}^d = & \langle \bar{p}^d_{(xyz)} \rangle \{i_{(xyz)}\} = \langle \bar{p}^d_{(\tau\kappa\zeta)} \rangle \{i_{G(\tau\kappa\zeta)}\} \\ = & \langle \bar{p}^d_{(\xi\eta\zeta)} \rangle \{i_{G(\xi\eta\zeta)}\} \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

を考察することができるが、 $\langle \bar{p}^d_{(\tau\kappa\zeta)} \rangle$  に関して G-線に集中化した一般化分布外力を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}_{(\tau)}^* = & \int_A \bar{p}_\tau^* dR_\tau d(\text{area}) \\ \bar{m}_{(\kappa)}^* = & \int_A \bar{p}_\kappa^* dR_\kappa d(\text{area}) \\ \bar{m}_{(\zeta)}^* = & \int_A (\bar{p}_\tau^* dR_\tau - \bar{p}_\kappa^* dR_\kappa) d(\text{area}) \\ \bar{m}_{(\tau)U}^* = & - \int_A \bar{p}_\tau^* dU_\tau d(\text{area}) \\ \bar{m}_{(\kappa)U}^* = & - \int_A \bar{p}_\kappa^* dU_\kappa d(\text{area}) \\ \bar{m}_{(\zeta)U}^* = & \int_A (\bar{p}_\tau^* dU_\kappa - \bar{p}_\kappa^* dU_\tau) d(\text{area}) \\ \bar{m}_{(\tau)W}^* = & \int_A \bar{p}_\tau^* dW d(\text{area}) \\ \bar{m}_{(\kappa)W}^* = & \int_A \bar{p}_\kappa^* dW d(\text{area}) \\ \bar{m}_W^* = & \int_A \bar{p}_\zeta^* dW d(\text{area}) \end{aligned} \right\}$$

$${}^*m_{WU} = \int_A 2(p_\tau^d U_\tau + p_\epsilon^d U_\epsilon) d(\text{area}) \quad (45 \cdot a \sim j)$$

ここに、記号 (\*) は、 $\{i_{G(\tau\epsilon\zeta)}\}$  や  $\{i_{G(\xi\eta\zeta)}\}$  等の未知の基ベクトルに関する成分表示であることを意味する。端面の表面力もまた  $\{q^d_{(xy\zeta)}\}$ ,  $\{q^d_{(\tau\epsilon\zeta)}\}$ ,  $\{q^d_{(\xi\eta\zeta)}\}$  の成分表示が考えられるが、 $\{q^d_{(\tau\epsilon\zeta)}\}$  を用いて式 (45・a~j) と同様にして一般化外力  $\{M_{(\tau)}, M_{(\epsilon)}, M_{(\zeta)}\}$ ,  $\{M_{(\tau)U}, M_{(\epsilon)U}, M_{(\zeta)U}\}$ ,  $\{M_{(\tau)W}, M_{(\epsilon)W}, M_{(\zeta)W}\}$  および  $M_{WU}$  を定義するものとする。また、任意の断面に作用する合応力としての力は、 $[0, \zeta]$  のはりの区間での力のつり合いより、

$$F(\zeta) = \int_A \bar{q}^d_{\zeta=0} d(\text{area}) - \int_0^\zeta \int_A \bar{p}^d d(\text{area}) d\zeta$$

と表わされるが、その 3 通りの成分表示を  $\{F_{(xy\zeta)}\}$ ,  $\{F_{(\tau\epsilon\zeta)}^*\}$ ,  $\{F_{(\xi\eta\zeta)}^*\}$  と表わすものとし、 $\zeta=l$  の面に作用する力

$$F_l = \int_A \bar{q}^d_{\zeta=l} d(\text{area})$$

の同様の成分表示を  $\{F_{l(xy\zeta)}\}$ ,  $\{F_{l(\tau\epsilon\zeta)}^*\}$ ,  $\{F_{l(\xi\eta\zeta)}^*\}$  と表わすものとする。

式 (40), (41・a, b) を式 (42) に代入し、式 (43・a~f) の内力表示と一般化外力の表示を用いて展開し、 $\zeta$  に関する部分積分を繰り返すことにより、つり合い方程式として、

$$\left. \begin{aligned} M'_{(\tau)} - \frac{M_{(\tau)}}{\tau_G} - \frac{1}{\rho_G} [M'_{WU} + T_S + (K(\alpha_G' + \varphi'))_{O.B.} \\ + \{m_W + (m_{WU}(\alpha_G' + \varphi'))_{O.B.}\} \\ - \bar{F}_\tau + \{m_{(\tau)} + m_{(\tau)W}(\alpha_G' + \varphi') \\ + (m_{(\tau)U}(\alpha_G' + \varphi')^2)_{O.B.}\}] = 0 \\ M'_{(\epsilon)} + \frac{M_{(\epsilon)}}{\tau_G} - \bar{F}_\epsilon + \{m_{(\epsilon)} + m_{(\epsilon)W}(\alpha_G' + \varphi') \\ + (m_{(\epsilon)U}(\alpha_G' + \varphi')^2)_{O.B.}\} = 0 \\ \frac{d}{d\zeta} [M'_{WU} + T_S + (K(\alpha_G' + \varphi'))_{O.B.} \\ + \{m_W + (m_{WU}(\alpha_G' + \varphi'))_{O.B.}\}] \\ + \frac{M_{(\zeta)}}{\rho_G} + \{m_{(\zeta)} + (m_{(\zeta)U}(\alpha_G' + \varphi')^2)_{O.B.}\} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \left\{ \begin{array}{c} M_{(\eta)} \\ -M_{(\xi)} \\ T \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} 0 & -(\alpha_G' + \varphi') & \beta_G' \sin \varphi \\ (\alpha_G' + \varphi') & 0 & \beta_G' \cos \varphi \\ -\beta_G' \sin \varphi & -\beta_G' \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} M_{(\eta)} \\ -M_{(\xi)} \\ T \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} -\bar{F}_\eta \\ \bar{F}_\xi \\ 0 \end{array} \right\} \\ + \left\{ \begin{array}{c} \{m_{(\eta)} + m_{(\eta)W}(\alpha_G' + \varphi') + (m_{(\eta)U}(\alpha_G' + \varphi')^2)_{O.B.}\} \\ -\{m_{(\xi)} + m_{(\xi)W}(\alpha_G' + \varphi') + (m_{(\xi)U}(\alpha_G' + \varphi')^2)_{O.B.}\} \\ \{m_{(\zeta)} + (m_{(\zeta)U}(\alpha_G' + \varphi')^2)_{O.B.}\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49 \cdot a, b)$$

$$N - \bar{F}_\zeta = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{c} M_{(\eta)} \\ -M_{(\xi)} \\ T \end{array} \right\} \Big|_{\zeta=0, \text{ or } l} = \left\{ \begin{array}{c} \{M_{(\eta)} + M_{(\eta)W}(\alpha_G' + \varphi') + (M_{(\eta)U}(\alpha_G' + \varphi')^2)_{O.B.}\} \\ -\{M_{(\xi)} + M_{(\xi)W}(\alpha_G' + \varphi') + (M_{(\xi)U}(\alpha_G' + \varphi')^2)_{O.B.}\} \\ \{M_{(\zeta)} + (M_{(\zeta)U}(\alpha_G' + \varphi')^2)_{O.B.}\} \end{array} \right\} \Big|_{\zeta=0, \text{ or } l} \dots\dots\dots (50 \cdot a \sim c)$$

$$N - \bar{F}_\zeta = 0 \quad (46 \cdot a \sim d)$$

が得られ、力学的境界条件式は、

$$\left. \begin{aligned} M_{(\tau)} &= \bar{M}_{(\tau)} + \bar{M}_{(\tau)W}(\alpha_G' + \varphi') \\ &\quad + (\bar{M}_{(\tau)U}(\alpha_G' + \varphi')^2)_{O.B.} \\ M_{(\epsilon)} &= \bar{M}_{(\epsilon)} + \bar{M}_{(\epsilon)W}(\alpha_G' + \varphi') \\ &\quad + (\bar{M}_{(\epsilon)U}(\alpha_G' + \varphi')^2)_{O.B.} \\ M'_{WU} + T_S &+ (K(\alpha_G' + \varphi'))_{O.B.} \\ &\quad + \{m_W + (m_{WU}(\alpha_G' + \varphi'))_{O.B.}\} \\ &= \bar{M}_{(\zeta)} + (\bar{M}_{(\zeta)U}(\alpha_G' + \varphi')^2)_{O.B.} \\ M_W &= \bar{M}_W + (\bar{M}_{WU}(\alpha_G' + \varphi'))_{O.B.}, \\ &\quad \text{at } \zeta=0, \text{ or } l \\ \{F_x(l), F_y(l), F_z(l)\} &= \{\bar{F}_{lx}, \bar{F}_{ly}, \bar{F}_{lz}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47 \cdot a \sim e)$$

として求まる。ここで、以上の力学的な方程式は、仮想仕事の式での独立変分量の任意性より直接得られた結果ではなく、線形結合の範囲で整理し直した結果である<sup>15)</sup>。

式 (46・a~d) と (47・a~e) はつり合い式と力学的境界条件式を単位ベクトル  $\{i_{G(\tau\epsilon\zeta)}\}$  に関して成分表示したものと考えることができるが、Lagrange の手法に準ずるものとするれば内力は物体固定座標  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  に関する成分表示とするのが普通であり、式 (43・b, c) の  $M_{(\tau)}$ ,  $M_{(\epsilon)}$  に代えて

$$M_{(\xi)} = \int_A \sigma_{\zeta\xi} \xi d(\text{area}), \quad M_{(\eta)} = \int_A \sigma_{\zeta\eta} \eta d(\text{area}) \quad (48 \cdot a, b)$$

を定義するものとし、さらに式 (45・a~j) で定義される  $\{i_{G(\tau\epsilon\zeta)}\}$  に関する一般化外力に代えて、 $\{R_\tau, R_\epsilon\}$ ,  $\{U_\tau, U_\epsilon\}$ ,  $\{\bar{p}^d_{(\tau\epsilon\zeta)}\}$ ,  $\{q^d_{(\tau\epsilon\zeta)}\}$  に対応させて  $\{\xi, \eta\}$ ,  $\{U, V\}$ ,  $\{\bar{p}^d_{(\xi\eta\zeta)}\}$ ,  $\{q^d_{(\xi\eta\zeta)}\}$  をその定義式 (45・a~j) で考えることにより、 $\{m_{(\xi)}, m_{(\eta)}, m_{(\zeta)}\}$ ,  $\{m_{(\xi)U}, m_{(\eta)U}, m_{(\zeta)U}\}$ ,  $\{m_{(\xi)W}, m_{(\eta)W}, m_{(\zeta)W}\}$ ,  $m_{WU}$ 、および  $\{M_{(\xi)}, M_{(\eta)}, M_{(\zeta)}\}$ ,  $\{M_{(\xi)U}, M_{(\eta)U}, M_{(\zeta)U}\}$ ,  $\{M_{(\xi)W}, M_{(\eta)W}, M_{(\zeta)W}\}$ ,  $M_{WU}$  を定義するものとするれば、式 (13) の変換マトリックスを考慮して展開することにより  $\{i_{G(\xi\eta\zeta)}\}$  に関するつり合い方程式と力学的境界条件式を次のように得ることができる。



$$M_W|_{\zeta=0, \text{ori}} = \{M_W^* + (\bar{M}_{WU}(\alpha_G' + \varphi'))_{\text{O.B.}}\}_{\zeta=0, \text{ori}}$$

$$\{F_x(l), F_y(l), F_z(l)\} = \{\bar{F}_{lx}, \bar{F}_{ly}, \bar{F}_{lz}\}$$

ただし、前式中の  $T$  は、

$$T = M_W' + T_S + (K(\alpha_G' + \varphi'))_{\text{O.B.}}$$

$$+ \{m_W^* + (\bar{m}_{WU}(\alpha_G' + \varphi'))_{\text{O.B.}}\} \dots \dots (51)$$

を表わす。

式 (49・a, b), (50・a, b), (51) に含まれる記号 (\*) を付した一般化外力は未知の単位ベクトルに関する成分表示であり、体積力、表面力の空間座標成分が既知量として与えられる場合での変換関係を次のように表わすことができる。

$$\{\bar{m}_{(\xi)(xyz)}\} = \{\bar{m}_{(\xi)x}, \bar{m}_{(\xi)y}, \bar{m}_{(\xi)z}\},$$

$$\{\bar{m}_{(U)(xyz)}\} = \{\bar{m}_{(U)x}, \bar{m}_{(U)y}, \bar{m}_{(U)z}\} \dots, \text{etc.}$$

を体積力の空間座標成分  $\{\bar{P}_{(xyz)}^d\}$  に関して、

$$\left. \begin{aligned} & \left[ \{\bar{m}_{(\xi)(xyz)}\}, \{\bar{m}_{(\eta)(xyz)}\} \right] \\ & = \int_A \left[ \xi \{\bar{P}_{(xyz)}^d\}, \eta \{\bar{P}_{(xyz)}^d\} \right] d(\text{area}) \\ & \left[ \{\bar{m}_{(U)(xyz)}\}, \{\bar{m}_{(V)(xyz)}\}, \{\bar{m}_{(W)(xyz)}\} \right] \\ & = \int_A \left[ U \{\bar{P}_{(xyz)}^d\}, V \{\bar{P}_{(xyz)}^d\}, W \{\bar{P}_{(xyz)}^d\} \right] \\ & \quad \cdot d(\text{area}) \end{aligned} \right\} \dots \dots (52 \cdot a, b)$$

と定義するものとし、変換マトリックス  $[\hat{T}] = [T_\varphi] \cdot [T_G]$  の  $\xi, \eta, \zeta$ -方向に対応する列ベクトルを  $\{\hat{T}_\xi\}, \{\hat{T}_\eta\}, \{\hat{T}_\zeta\}$  と表わすものとすれば、 $\{i_{G(\xi\eta\zeta)}\}$  に関する一般化分布外力は、

$$\left. \begin{aligned} & \{m_{(\eta)}^*, -m_{(\xi)}^*, m_{(\zeta)}^*\} \\ & = \left\{ \begin{array}{c} \{\bar{m}_{(\eta)}\}, \{0\} \\ \{\hat{T}_\eta\}, \{\hat{T}_\xi\} \end{array} \left| \begin{array}{c} \{0\}, \{\bar{m}_{(\xi)}\} \\ \{\hat{T}_\xi\}, \{\hat{T}_\zeta\} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{c} \{\bar{m}_{(\xi)}\}, \{\bar{m}_{(\eta)}\} \\ \{\hat{T}_\xi\}, \{\hat{T}_\eta\} \end{array} \right\} \right\} \\ & \{m_{(\eta)U}^*, -m_{(\xi)U}^*, m_{(\zeta)U}^*\} \\ & = \left\{ \begin{array}{c} \{\bar{m}_{(V)}\}, \{0\} \\ \{\hat{T}_\eta\}, \{\hat{T}_\xi\} \end{array} \left| \begin{array}{c} \{0\}, \{\bar{m}_{(U)}\} \\ \{\hat{T}_\xi\}, \{\hat{T}_\zeta\} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{c} \{\bar{m}_{(U)}\}, \{\bar{m}_{(V)}\} \\ \{\hat{T}_\xi\}, \{\hat{T}_\eta\} \end{array} \right\} \right\} \\ & \{m_{(\xi)W}^*, \bar{m}_{(\eta)W}, m_W^*\} = [\hat{T}] \{\bar{m}_{(W)x}, \bar{m}_{(W)y}, \bar{m}_{(W)z}\} \\ & m_{WU}^* = 2 \langle \hat{T}_\xi \rangle \langle \bar{m}_{(U)} \rangle + \langle \hat{T}_\eta \rangle \langle \bar{m}_{(V)} \rangle \end{aligned} \right\} \dots \dots (53 \cdot a \sim d)$$

と表わすことができる。ここに、式 (53・a, b) 右辺の行列式の演算は三次元数ベクトルの内積を考えるものとする。また、 $\{\bar{M}_{(\xi)(xyz)}\}, \{\bar{M}_{(U)(xyz)}\} \dots, \text{etc.}$  を  $\{\bar{q}_{(xyz)}^d\}$  に対して同様に定義すれば、端面の一般化外力を式 (53・a~d) と同様に表現することができる。

薄肉はりのつり合いを幾何学的に考えると (Fig. 5),  $\zeta=0$  の端面に作用する力を  $\bar{F}_0$ ,  $\zeta$  座標に関する分布外力、分布モーメント外力を  $\bar{P}(\zeta), \bar{m}(\zeta)$  として、任意断面に作用する力  $F(\zeta)$  およびモーメント  $M(\zeta)$  に関するつり合い式は、

$$\left. \begin{aligned} & F(\zeta) = \bar{F}_0 - \int_0^\zeta \bar{P}(\zeta) d\zeta \\ & dM(\zeta)/d\zeta + r_{G'} \times F(\zeta) + \bar{m}(\zeta) = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (54 \cdot a, b)$$

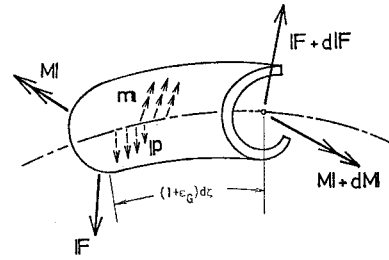


Fig. 5 Beam Element.

と表わされるが、式 (49・a, b) と (51) のつり合い式に含まれる合応力と一般化外力を次のように物理的に解釈すれば、式 (54・a, b) と式 (49・a, b) は微小ひずみの条件のもとに一致する。

$N$ =断面の軸力,  $\{M_{(\eta)}, -M_{(\xi)}, T\}$ =断面に作用するモーメントの  $\{i_{G(\xi\eta\zeta)}\}$  に関する成分,  $M_W$ :パイ・モーメント,  $T_S$ =St. Venant のねじれモーメント,  $K=K(\alpha_G' + \varphi')$  で,  $\sigma_{\zeta\zeta}$  のねじれによる  $i_{G\zeta}$  方向からのずれによって生ずる軸線まわりのモーメントを表わす。

$\{m_{(\eta)}^*, -m_{(\xi)}^*, m_{(\zeta)}^*\}$ =断面の相対変位がないときの体積力がつくる  $\{i_{G(\xi\eta\zeta)}\}$  まわりの分布モーメント外力,  $\{m_{(\eta)W}^*(\alpha_G' + \varphi'), -m_{(\xi)U}^*(\alpha_G' + \varphi'), 0\}$ =反り  $w$  により生じるモーメント外力の変化分,  $\{m_{(\eta)U}^*(\alpha_G' + \varphi')^2, -m_{(\xi)U}^*(\alpha_G' + \varphi')^2, m_{(\zeta)U}^*(\alpha_G' + \varphi')^2\}_{\text{O.B.}}$ =面内相対変位  $\{u, v\}$  により生ずるモーメント外力の変化分,  $m_W^*$ =分布パイ・モーメント外力,  $\{m_{WU}^*(\alpha_G' + \varphi')\}_{\text{O.B.}}$ =面内相対変位によるパイ・モーメント外力の変化分, であり、薄肉はりの端面に作用する一般化外力も同様に理解することができる。

力学的境界条件式 (50・a~c) に対応する幾何学的境界条件式は、

$$\left. \begin{aligned} & \{i_{G(\xi\eta\zeta)}\}_{\zeta=0, \text{ori}} = [\hat{T}(\zeta)]_{\zeta=0, \text{ori}} \{i_{(xyz)}\} \\ & = \{\bar{i}_{G(\xi\eta\zeta)}\}_{\zeta=0, \text{ori}} \\ & (\alpha_G' + \varphi')|_{\zeta=0, \text{ori}} = (\alpha_G' + \varphi')|_{\zeta=0, \text{ori}} \\ & \{x_G(\zeta), y_G(\zeta), z_G(\zeta)\}|_{\zeta=0, \text{ori}} \\ & = \{\bar{x}_G, \bar{y}_G, \bar{z}_G\}_{\zeta=0, \text{ori}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (55 \cdot a \sim c)$$

と表わすことができる。このとき、一般の境界条件は力学的条件と幾何学的条件の混合となるものと思われるが、この場合には個々に定式化される必要がある。

## 6. 合応力-ひずみ一般化関係

薄肉はりの  $G$ -線を断面の重心線上に選び、 $\{\xi, \eta\}$ -軸を基準状態の断面の主軸方向に一致させるものとし、さ

らに、 $s$ -座標の原点を

$$\int_A W(s, n) d(\text{area}) = 0$$

となるように定めるものとする。このときの非零の断面係数を次のように定義するものとする。

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_A d(\text{area}), & I_{\xi\xi} &= \int_A \xi^2 d(\text{area}) \\ I_{\eta\eta} &= \int_A \eta^2 d(\text{area}), & I_{WW} &= \int_A W^2 d(\text{area}) \\ I_{W\xi} &= \int_A W\xi d(\text{area}), & I_{W\eta} &= \int_A W\eta d(\text{area}) \\ I_C &= \int_A (\xi^2 + \eta^2) d(\text{area}) \\ I_{GG} &= \int_A (\xi^2 + \eta^2)^2 d(\text{area}) \\ I_{G\xi} &= \int_A (\xi^2 + \eta^2)\xi d(\text{area}) \\ I_{G\eta} &= \int_A (\xi^2 + \eta^2)\eta d(\text{area}) \\ I_{GW} &= \int_A (\xi^2 + \eta^2)W d(\text{area}) \\ J_S &= \int_A \theta^2 d(\text{area}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56\cdot a \sim l)$$

式 (37・a, b) のひずみ成分  $e_{\zeta\zeta}$ ,  $e_{s\zeta}$  に対して生じる応力テンソル成分は  $\sigma_{\zeta\zeta}$ ,  $\sigma_{s\zeta}$  のみであり、 $E$ ,  $G$  をそれぞれ弾性定数、せん断弾性定数として、

$$\sigma_{\zeta\zeta} = Ee_{\zeta\zeta}, \quad \sigma_{s\zeta} = 2Ge_{s\zeta} \dots\dots\dots (57\cdot a, b)$$

の関係にあるものとする。

式 (43・a~f) に式 (37・a, b), (57・a, b) を代入して面積積分すれば、前述の断面係数を用いて合応力—般化ひずみ関係は次のように表わされる。

$$\left\{ \begin{aligned} \{\Sigma\} &= E[D]\{E\}, \quad T_S = GJ_S[(\alpha\zeta' + \varphi)'] \\ &\dots\dots\dots (58\cdot a, b) \\ \{\Sigma\} &= \{N, M_{(\xi)}, M_{(\eta)}, M_W, (K)_{O.B.}\} \\ \{E\} &= \left\{ \begin{aligned} [\epsilon_{\zeta\zeta}, [-\beta\zeta' \sin \varphi], [-\beta\zeta' \cos \varphi], \\ [-(\alpha\zeta' + \varphi)'], \left( \left[ \frac{1}{2}(\alpha\zeta' + \varphi)'^2 \right] \right)_{O.B.} \end{aligned} \right\} \\ [D] &= \begin{bmatrix} A, & 0, & 0, & 0, & \begin{bmatrix} I_G \\ I_{G\xi} \\ I_{G\eta} \\ I_{GW} \\ I_{GG} \end{bmatrix}_{O.B.} \\ I_{\xi\xi}, & 0, & I_{W\xi}, & I_{G\xi} \\ I_{\eta\eta}, & I_{W\eta}, & I_{G\eta} \\ I_{WW}, & I_{GW} \\ \text{sym.} & & & \end{bmatrix} \\ &\dots\dots\dots (59\cdot a \sim c) \end{aligned} \right.$$

7. 応力分布

断面の直応力に関する合応力  $\{\Sigma\}$  が与えられれば、対応する  $\{E\}$  は式 (58・a) より  $\{E\} = [D]^{-1}\{\Sigma\}/E$  と求められ、式 (37・a), (57・a) に代入して直応力  $\sigma_{\zeta\zeta}$  の

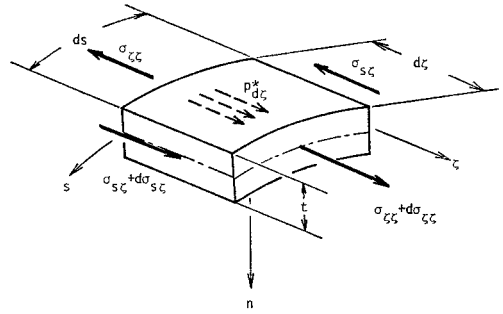


Fig. 6 Element in Thin Wall.

断面分布を知ることができる。同様に、 $T_S$  が与えられれば式 (37・b), (57・b), (58・b) より St. Venant のねじれモーメントをつくるせん断応力  $\sigma_{s\zeta}^S$  の分布を知ることができるが、曲げせん断変形を考えない本文の展開では曲げせん断応力  $\sigma_{s\zeta}^R$  を構成方程式を介して求めることはできない。 $\sigma_{s\zeta}^R$  の分布は、前述した直応力  $\sigma_{\zeta\zeta}$  の分布に対して次のように近似的に表わすことができる。

薄肉はりの  $t \times ds \times d\zeta$  の微小要素を取り出して (Fig. 6),  $\zeta$ -方向の力のつり合いを考えれば、

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\zeta\zeta} dn + \frac{\partial}{\partial s} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{s\zeta} dn + \int_{-t/2}^{t/2} p_{\zeta}^* dn = 0 \dots\dots\dots (60)$$

が得られる。せん断応力  $\sigma_{s\zeta}$  を St. Venant のねじれモーメント  $\sigma_{s\zeta}^S$  と曲げせん断応力  $\sigma_{s\zeta}^R$  の和で表わすものとするれば、前述したように  $\sigma_{s\zeta}^S = 2Ge_{s\zeta} = T_S \theta / J_S$  であり、式 (38) の  $\theta(s, n)$  の関数形より  $\sigma_{s\zeta}^S$  の  $n$  に関する薄肉上の積分は  $s$  に関して一定となり、

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{s\zeta} dn = \frac{\partial}{\partial s} \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{s\zeta}^S + \sigma_{s\zeta}^R) dn = \frac{\partial}{\partial s} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{s\zeta}^R dn \dots\dots\dots (61)$$

が得られる。式 (60) における  $\sigma_{\zeta\zeta}$  や  $p_{\zeta}^*$  は断面上で十分大きく変化するが、肉厚  $t$  は断面寸法に比較して十分小さく、 $\sigma_{\zeta\zeta}$  と  $p_{\zeta}^*$  の肉厚方向の変化が無視できるものとするれば、したがって、それらとつり合う  $\sigma_{s\zeta}^R$  の同じ変化も無視できるものとするれば、式 (60) は、

$$t \frac{\partial \sigma_{\zeta\zeta}}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial s} (\sigma_{s\zeta}^R t) + p_{\zeta}^* t = 0$$

となり、 $s$  に関して積分すれば、

$$\sigma_{s\zeta}^R = \frac{1}{t} \left\{ \text{const.} - \int_0^s \left( \frac{\partial \sigma_{\zeta\zeta}}{\partial \zeta} + p_{\zeta}^* \right) t ds \right\} \dots\dots (62)$$

と表わされることになる。ここに、const. は  $s$  に関する積分定数であるが、薄肉はりの開断面部と閉断面部とで次のように定まる。

[開断面部]

薄肉断面の閉路上になく有限個の自由端に連続してい

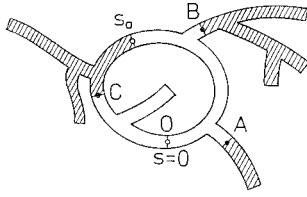


Fig. 7 General Cross-Section.

る点 (Fig. 7 の A, B 点等) を考えると, 自由端で力学的条件より  $\sigma_{s\zeta}^R = 0$  であり, 注目する点と各自由端までの全域の積分を考えると,

$$\sigma_{s\zeta}^R = -\frac{1}{t} \sum_{Fi} \int_{s_{Fi}}^{s_0} \left( \frac{\partial \sigma_{s\zeta}}{\partial \zeta} + p_{\zeta}^d \right) t ds \dots\dots (63 \cdot a)$$

と表わすことができる. ここに, 総和  $\sum_{Fi}$  は, 注目する点と自由端で定まる領域内のすべての薄肉上での積分の和を意味する.

[閉断面部]

Fig. 7 の C 点のような閉路上の点を考える. 閉路上の確定点  $s = s_0$  を積分の始点とすれば, 式 (62) は,

$$\sigma_{s\zeta}^R = \frac{1}{t} \left\{ \text{const.} - \int_{s_0}^s \left( \frac{\partial \sigma_{s\zeta}}{\partial \zeta} + p_{\zeta}^d \right) t ds - \sum_{Fi} \int_{s_{Fi}}^{s_0} \left( \frac{\partial \sigma_{s\zeta}}{\partial \zeta} + p_{\zeta}^d \right) t ds \right\} \dots\dots (63 \cdot b)$$

と書き換えることができる. 右辺 { } 内の第 2 項は  $s_0$  点から  $s$  点までの閉路上の積分, 第 3 項はその閉路区間に連続するすべての開断面部の積分を意味する. 本文での運動場では曲げせん断変形を拘束しているが, ここで  $e_{s\zeta}^R = 0$  の拘束のみを解くものとし  $\sigma_{s\zeta}^R$  による微小なせん断ひずみを考えるものとする. 厚さ  $d\zeta$  の薄肉断面要素の G 点を固定支持して考えれば,  $e_{s\zeta}^R$  により  $\zeta$  方向の変位  $u_{\zeta}^R$  のみを生じ, 式 (63・b) 右辺の第 2 項以降を  $\Delta\sigma_{s\zeta}^R$  と表わすものとして,

$$\frac{\partial u_{\zeta}^R}{\partial s} = 2e_{s\zeta}^R = \frac{1}{G} \left( \frac{\text{const.}}{t} + \Delta\sigma_{s\zeta}^R \right)$$

となり, 閉路における  $u_{\zeta}^R$  の適合条件

$$\oint (\partial u_{\zeta}^R / \partial s) ds = 0$$

より,

$$\text{const.} = -\frac{\oint \Delta\sigma_{s\zeta}^R ds}{\oint 1/t ds} \dots\dots (64)$$

が定まる.

## 8. 考 察

### (1) 断面の回転自由度について

本文で用いている運動場での変位パラメーター  $\{x_G, y_G, z_G, \varphi\}$  は, 初期形状からの変化量ではなく, 空間

形状そのものを規定する量として定義されている. このとき,  $\varphi(\zeta)$  を, 軸線の幾何形状に関するパラメーター  $\{x_G, y_G, z_G\}$  で定まる断面の曲率方向からの回転角として定義しているため, 曲率が零となる直線状態で  $\varphi$  の基準が不定となり, 基礎方程式の系がその意味で特異となる. しかし, これは物理現象自体の特異状態ではなくパラメーターの設定に起因するものであり, 曲率が零である区間および点での  $\{i_{Gx}, i_{Gy}\}$  の方向を理論展開に矛盾しない範囲で適当に仮定することにより処理することができる<sup>15)</sup>.

任意に有限変位するはりの問題では, 物理的意味としての断面のねじれ率は一般に回転パラメーターの長手方向変化率のみでは定まらず, 他のパラメーターも関与する<sup>12)~16)</sup>. この場合, 島田<sup>16)</sup>, 阿井ら<sup>14), 15)</sup>の前述のような回転パラメーターを設定すれば, 断面のねじれ率は軸線のねじれ率と回転パラメーターの変化率の和として物理的に明確に表現される.

### (2) 微小ひずみの条件について

本文での展開は, 微小ひずみの条件のもとに行っている. すなわち, 薄肉はりの幾何形状について式 (19) を設定し, ひずみパラメーターに関して式 (20・a, b) が成立し  $\epsilon$  が単位に比較して十分小さいことを仮定している. この条件は初期形状をも含めて適用されるため, 本文では曲線はりを, 直線形状に変形させたときに生ずるひずみが微小ひずみの条件を満足する範囲で扱っていることになる.

変分原理より基礎方程式を求めるとき, 変分演算の前段階で微小ひずみの条件を適用した場合と変分演算後に同条件を適用した場合とで結果が異なることが生じる<sup>12)</sup>. 微小ひずみの条件のもとでの基礎方程式としては後者の結果が相当するものと思われるが, それに関して次のように考察できる. 変分原理とは系の関数の解析的性質を媒介とした原理であり, 含まれる関数の値の大小には関係しない. 関数の値は微小ひずみの条件のもとに簡略化した関数より求めても大きな差は生じないが, 微小ひずみの条件のもとでの操作が関数関係の解析性 (たとえば Holonomy という性質) を変えることが生じれば, その変分演算結果に不合理が含まれることが起こり得る. 本文では, 式 (9・b, c), (11) で表わされる厳密な  $\delta\alpha_G'$ ,  $\delta\beta_G'$ ,  $[\delta\theta_G]$  を求めた後, 単位に比較して  $\epsilon_G$  を無視する操作をしている.

次に, 本文では式 (37・a, b) のひずみの誘導において, 式 (41・a, b) の変分演算の前に単位に比較して  $\epsilon^1$  より高次の項を無視している. 変分演算の後に単位に比較して  $\epsilon^0$  より高次の項を無視するという前提のもとに, 前述の変分演算前の高次項の無視は合理化される. すな

わち、仮想仕事の原理では汎関数の第1変分しか考えないことから、問題としている次数より  $\epsilon'$  以上高次の項は変分演算後での微小ひずみの条件でも無視されるという理由で、変分演算の前に無視することができる。本文では式 (36) の運動場と式 (37・a, b) のひずみ場に微小項に関する前述のような差異があるため、式 (49・a, b), (50・a~c), (51) のつり合い式と力学的境界条件式において、外力項に断面の相対変位に関する一般化外力を含む、一方、同様に生ずるはずの相対変位による合応力の変化分の項が含まれていないという不統一が生じている。基礎方程式を解く際には相対変位による外力項は無視されても問題となる数値的差異は生じないと思われるが、5. で述べたように、物理的には有意な項であることから式 (49・a, b), (50・a~c), (51) の段階ではその外力項を残した。

(3) 変分原理における独立変分量について

運動場が導入された系の必要十分な自由度の仮想変位は変位パラメーターの変分で与えることができるが、同自由度であることを保てば他の変換された形の独立変分量を採用することができるものと思われる。仮想仕事の原理を用いれば運動場に対して統一性を保つり合い式が演算結果として得られるが、有限変位問題ではその展開が極めて煩雑なものとなることは多い<sup>12)</sup>。本文では、変分演算を比較的簡単に処理する目的で、5. で述べたような独立変分量を採用している。

この場合、変分演算の結果得られるつり合い式は、仮想変位の変換とは相補的な関係にある変換が行われた形式で求まるものと思われる。すなわち、変換された独立変分量と対応するつり合い式の不つり合い量との内積が系の仮想仕事となるような形式で求まると考えられる。このような変分演算の数学的変換は無限にあるが、その中で、変分演算途中の物理的意味を明確にし処理を簡単にする等の有意点のある変換を採用することが重要である。

(4) 一次元構造要素一般の基礎方程式について

最も多くの変位パラメーターを含む一次元構造要素としては、伸び変形、2方向の曲げせん断変形、2方向の曲げ変形、ねじれ変形および反り変形の7つ<sup>2)</sup>の変位パラメーターで記述される曲げせん断変形を含む曲げねじれ要素を考えるのが普通であろう。このとき、この7つの変位パラメーターの構造要素において、曲げせん断剛性を無限大とすれば曲げせん断変形に関する変位パラメーターは恒等的に零となり曲げせん断変形を含まない曲げねじれ要素が得られ、同様に考えて、反り剛性を無限大とすればいわゆる充実断面の曲げねじれ要素となる。

このように考えれば、最も多くの変位パラメーターを含む構造要素の基礎式で一次元構造要素一般の挙動が説明されることになるが、これらの操作が基礎方程式の上で具体的に行われるためには、その基礎方程式が各構造要素に共通の記述方法のもとに表現されている必要がある。本文の薄肉はりの基礎方程式は、曲げせん断変形を含まない一次元構造要素一般に対してその条件を満たす<sup>15)</sup>。

たとえば、可撓性ケーブルの基礎方程式を次のように誘導することができる。本文の薄肉はりの基礎方程式において次の極限過程を考える。はりに作用する外力系において G 線上に集中化した分布外力

$$\{\bar{P}_{(xy_2)}\} = \int_A \{\bar{P}_{(xy_2)}^d\} d(\text{area})$$

および端面の  $\{\bar{F}_{(xy_2)}\}_{\zeta=0, \text{or } l}$  を一定、また、伸び剛性  $EA$  を一定としたまま薄肉はりの断面寸法を限りなく零に近づける。式 (45・a~j) の形で定義される一般化外力  $m_{(\zeta)}^*$ ,  $m_{WU}^*$ , ..., etc. および  $M_{(\zeta)}^*$ ,  $M_{WU}^*$ , ..., etc. はそれぞれ  $\{\bar{P}_{(xy_2)}\}$ ,  $\{F_{(xy_2)}\}$  よりも断面寸法に関してより高次であり、式 (56・a~l) で定義される断面係数においても断面積  $A$  に比較して他の断面係数は断面寸法に関してより高次であることから、前述の極限過程においてそれらの一般化外力、断面係数は限りなく零に近づく。極限の結果でのつり合い状態において、ひずみパラメーター  $\epsilon_G$ ,  $\beta_G'$ ,  $(\alpha_G' + \varphi')$  等が有限値に保たれるものとするれば、断面の合応力  $M_{(\zeta)}$ ,  $M_{(\eta)}$ ,  $M_W$ ,  $K$ ,  $T_S$  は軸力  $N$  に相対して零となる。

以上の結果を式 (49・a, b), (51) のつり合い式で考えると

$$\{0, 0, N\} - \{\bar{F}_{\zeta}^*, \bar{F}_{\eta}^*, \bar{F}_{\zeta}^*\} = \{0, 0, 0\}$$

が得られる。 $\{\bar{F}_{(\zeta\eta\zeta)}^*\}$  を変換マトリックス  $[\hat{T}]$  を用いて  $\{F_{(xy_2)}\}$  に変換して展開すれば、

$$\frac{N}{1+\epsilon_G} \{x_G', y_G', z_G'\} - \{F_x, F_y, F_z\} = \{0, 0, 0\} \dots\dots\dots(65)$$

として可撓性ケーブルのつり合い式が得られる。式 (58・a, b), (59・a~c) の構成方程式において、前述の極限過程の結果

$$N = EA\epsilon_G \dots\dots\dots(66)$$

のみが残る。同様に考えて、力学的境界条件と幾何学的境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} \{F_{(xy_2)}(\zeta)\}_{\zeta=l} &= \{\bar{F}_{l(xy_2)}\} \\ \{x_G, y_G, z_G\}_{\zeta=0, \text{or } l} &= \{\bar{x}_G, \bar{y}_G, \bar{z}_G\}_{\zeta=0, \text{or } l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(67 \cdot a, b)$$

のみが残り、他の条件式は退化する。

9. ま と め

微小変位理論と有限変位理論とは固体連続体の力学における1つの大きな区分である。連続体の変位後の幾何形状は変形前の初期形状に物質点の変位を加えて表現されるのがこれまでの普通であったが、微小変位理論では初期形状と変位とは次の意味で性質の異なる量として扱われる。微小変位理論では、変位により連続体中にひずみが生じ有限な応力が生じることは考えるが、変位が連続体の幾何形状を変えるという効果は反映されない。そのために、物体固定座標と空間座標とを明確に区別する必要がなく、連続体物質点の初期位置ベクトルに比較して変位ベクトルは無限小の量として扱われることになり、基礎方程式に反映される幾何形状は変形の前後も問わず常に初期形状であるということが出来る。それに対して、有限な変位を扱ういわゆる幾何学的非線形問題とは変位による幾何形状の変化を考慮する連続体の問題であり、基礎方程式が変形後の幾何形状に対して定式化されなければならないことは周知のところである。有限変位問題では、物質点の初期位置ベクトルと変位ベクトルは幾何学的意味において相対する量として扱われる。

微小変位理論としての基礎方程式は対応する有限変位問題の基礎方程式を変位に関して線形化することにより得られるが、任意の変形状態で線形化された系は狭義には線形化有限変位理論とよばれている。微小変位理論の系とは内部応力の生じていない初期状態において線形化された系に相当する。このことより、線形化有限変位理論で扱われる変位増分の大きさは微小変位理論と同等に微小であると考えられるが、線形化された基礎方程式の中に変位増分が基準の状態での内力系と連成することにより生ずる幾何形状の変化を表わす項があるためにその呼称があるものと思われる。

連続体の変形後の幾何形状が初期形状に変位を加えて表現されることは、微小変位理論を継続して有限変位理論が発展してきたことや有限変位問題といえども変位に関する低次非線形項を扱うのみで初期形状付近の変位が比較的小さい範囲を問題とする場合も少なくないこと等に起因するものと思われる。一方、本来の初期形状を考えることのできないケーブルの問題では、従来より、つり合い状態での物質点の空間位置そのものが基本の未知量として採用されている。

変位とはその基準の幾何形状と相まって空間位置を記述する量であり、空間位置を決定するという意味では初期形状に依存する量である。幾何形状の変化を考えない微小変位理論では、初期形状とはその理論展開の範囲での絶対的な形状であり、有限変位理論の立場からみて初期状態において変位に関して線形化された理論であることを考えると、変位を基本の未知量とする基礎方程式は線形系の定式化の合理性として疑えない。線形化有限変

位理論では前述したような幾何形状の変化の項を含むが、基準状態まわりで線形化された系であることは微小変位理論と同様である。一方、有限変位問題における初期形状とは、連続体の有限変位後の種々の形状が作用外力・強制変位に呼応した幾何形状であると同様に、零の作用外力に呼応した幾何形状と考えてよく、そのことでしか特殊性のない状態である。確かに、連続体の問題の物理要素であるひずみ（たとえば Green のひずみテンソル）は変形前後の計量テンソルの差で規定され、多くの場合で初期状態での物理量が既知量として与えられるが、そのことは連続体の幾何形状が初期状態を基準として表現されなければならない理由とは直接つながらない。有限変位理論としての基礎方程式とは有限変位問題の数学的処理系であり、その処理系の内容が連続体の初期形状に左右される理由はない。すなわち、微小変位理論における初期形状とは、同時に変位後の形状でもあり、基礎方程式が扱う物理的要素の外にあるが、有限変位理論においては、その基礎方程式が任意の有限変位後の幾何形状を扱うのと同じ意味で、初期形状の任意性もまた基礎方程式で扱われるべき物理的要素であるように思われる。

連続体の幾何形状が Lagrange の手法において記述されるためには、定式化の最初で、空間座標が定義され、連続体の物質点は物体固定座標と対応づけられなくてはならない。幾何形状は、物体固定座標で規定される物質点の空間座標を示すことにより記述されるが、その際に、空間座標が連続体の初期形状に依存させて設定されている有限変位問題の定式化が少なくない。たとえば、はりの問題の定式化において直線はりと曲線はりが区別され、曲線はりの変位を初期状態での軸線の接線方向とその法平面内の2方向に分解して表わすことは広く行われている。微小変位問題では、このような成分表示により基礎方程式が物理的に理解しやすく簡単になる場合が多く、その意味で正規化された表現といえる。しかし、有限変位問題においては、初期形状での接線・法線方向の成分表示は、変形後の形状に対しては接線・法線方向の成分ではなく、そこに微小変位問題と同等の意義を見出すことはできない。さらに、変位の大きさを制限しない場合の有限変位問題では、前述の空間座標の座標値と空間位置の間には1対1の対応が一般にない。有限変位問題において当面問題とするのは変形後の幾何形状であり、変形前の幾何形状が基礎方程式の定式化における数学的表現の設定や記述方法に本質的に関与するとは思われない。

本報告では、薄肉はりの有限変位微小ひずみ問題としての定式化を次の点に留意して行っている。空間座標としては、連続体の初期形状とは無関係に点の空間位置を

規定するのに最も単純で扱いやすいという意味で直交デカルト座標を採用し、物体固定座標と物質点の対応づけもまた初期形状とは無関係に行っている。基礎方程式において、初期状態からの変位を未知量とするのではなく、物質点の空間位置そのものを基本の未知量とする。同様に考えて、運動場は、変位に適用するのではなく、初期形状をも含めた空間形状そのものに適用している。以上のもとに定式化している本報告での薄肉はりの基礎方程式の系では、初期形状とは加えられる外力等と同等に有限変位問題の処理系に入力される単なるデータであり、基礎方程式という有限変位問題の処理系自体は初期形状に左右されることはなく任意の入力データに対して一貫している。結果として、本報告で示している基礎方程式の上では、薄肉直線はりとは薄肉曲線はりといった初期形状による定式化の区分はないことになる。

以上の議論は、板やシェル等の二次元構造要素に対してもまったく同様に適用されるものと思われる。

## 10. おわりに

本報告で述べている薄肉はりの有限変位問題としての基礎方程式は、その初期の段階<sup>14)</sup>において、断面のねじれに関する高次非線形項を含まないものであった。薄肉開断面はりの有限変位微小ひずみ問題としてねじれに関するより高次の項を含める必要があることの指摘を、新日本技研(株)倉方慶夫氏より受けた。その示唆は氏の薄肉はりの問題に対する深い理解によるものと思われる。氏の慧眼と助言に心より敬意と謝意を表わすものである。

また、現名古屋大学土木工学科 島田静雄教授の論文“弾性針金の変形と応力”<sup>16)</sup>は薄肉はりの有限変位問題に関する文献としてはこれまで取り上げられることのなかったものであり、著者らも本文の理論展開を終えた後に別の議論の場でその存在を知り得た。その20年以前の業績に驚倒たる敬意を表わす次第である。

本報告の内容は、第一著者が第二著者のもとで作成した学位論文<sup>15)</sup>に基づいている。本論文集用に一部説明を簡略化しており、細かい展開を含めることはできなかった。

詳細の展開記述は文献15)を参照されたい。

なお、本研究は文部省科学研究費の補助を受けている。

## 参考文献

- 1) Kollbrunner, C.F. und N. Hajdin : Dünnwandige Stäbe, Band 1, Springer-Verlag, 1972.
- 2) Washizu, K. : Some Considerations on a Naturally Curved and Twisted Slender Beam, Jour. of Math. and Phys., Vol. 43, No. 2, 1964.
- 3) 西野文雄・深沢泰晴：ひずみ場の仮定に基づく薄肉曲がりばりの静的挙動の定式化，土木学会論文報告集，No. 247, 1976.3.
- 4) 坂井藤一：薄肉開断面部材の弾性安定基礎方程式の統一的誘導，土木学会論文報告集，No. 221, 1974.1.
- 5) Tsuiji, T. : Buckling of Columns under Axial Load and Torsions, Proceeding of J.S.C.E., No. 223, 1974.3.
- 6) Vacharajiffphan, P. and N.S. Trahair : Flexural-Torsion Buckling of Curved Members, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 101, No. ST 6, June, 1975.
- 7) Namita, Y. : Die Theorie II. Ordnung von krummen Stäben und ihre Anwendung auf das kipp-Problem des Begenträgers, Transaction of JSCE, No. 155, 1968.7.
- 8) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，No. 225, 1974.5.
- 9) 薄木征三：変形を考慮した薄肉断面門弧アーチの曲げねじれ座屈，土木学会論文報告集，No. 263, 1977.7.
- 10) Schroeder, F.H. : Allgemeine Stabtheorie des dünnwandigen räumlich vorgekrümmten und vorgewunden Trägers mit großen Verformungen, Ingenieur-Achiev, 39. Band, S. 87~103, 1970.
- 11) 事口寿男・久保元生・中井博：薄肉曲線ばりの幾何学的非線形挙動と横たおれ座屈解析への応用，第24回構造工学シンポジウム，1978.2.
- 12) 倉方慶夫：薄肉開断面をもつ曲線部材の有限変位理論，東京大学工学系研究科学学位論文，1976.3.
- 13) 平嶋政治・井浦雅司・依田照彦：初期曲率・ねじれ率を有する薄肉空間曲線部材の有限変位理論，土木学会論文報告集，No. 292, 1979.12.
- 14) 阿井正博・岩熊哲夫・西野文雄：1次元構造要素の幾何学的非線形問題における支配方程式について，土木学会第32回年次学術講演会講演概要集，第1部，1977.10.
- 15) 阿井正博：1次元構造要素の幾何学的非線形問題について，東京大学工学系研究科学学位論文，1979.3.
- 16) 島田静雄：弾性針金の変形と応力，土木学会論文報告集，第72号，別冊3-1，pp. 1~16, 1961.7.

(1980.4.28・受付)