

非保存力を受ける非線形弾性柱の曲げ座屈

FLEXURAL BUCKLING OF NON-LINEAR ELASTIC COLUMN WITH FOLLOWER FORCES

吉川幸雄*

By Yukio YOSHIKAWA

1. 序 言

構造物の座屈などの安定問題では、近年動的安定判別法による解析が発展しつつある。そして、構造物の軽量化や最適化に伴う、より正確な外力の算定から重要視されてきた外力の非保存性のゆえにも、その適用は要求されつつある^{1),2)}。

ところで、最近では構造材料も新材料の開発や複合材料の出現などが顕著になっている。このような材料に対して、より広い土木構造物への適用や、動的な変形解析を求められる場合などでは、その不安定現象の解明には動的判別法がより適切であるといえよう。

外力が非保存力である系の弾性安定問題の解析では、図-1 に示す2自由度の力学モデル³⁾が使われる。この系では、荷重は系の先端の接線角の φ 倍であるような角度に常に保たれながら作用するものと仮定される。 $\varphi = 0$ のときは保存力であり、Euler 座屈に対応し、 $\varphi \neq 0$ のときは非保存力（従動力 follower force）である。このパラメーター φ に対する座屈荷重の不連続性とそれに対応する系の不安定機構の変化が、G. Herrmann⁴⁾ らによって調べられており、静的不安定（ダイバージェンス）か動的不安定（フラッタ）のいずれかの形で不安定が起こることが示された。

同様のモデルを用いて、Ziegler⁵⁾ は従動力（follower force）の作用する系の安定問題では、減衰が系を不安定化させるときがあることを示した。この減衰の効果については、系の特性方程式の根を直接調べることによって、不安定化効果のあることが、さらに詳しく研究されている⁶⁾。

このように図-1の2自由度モデル柱を使って、非保存的弾性安定問題では動的安定判別法の適用により数々の成果が得られている。しかし、柱の復元モーメントを

表現する弾性ヒンジに関して、非線形弾性を仮定した柱の動的安定解析は明らかにされていない。

そこで、本研究ではこのモデル柱について、復元モーメントに非線形弾性を有するヒンジを考え、この非線形弾性柱の安定解析を動的安定判別法によってとらえようとした。

このようなアプローチから、従来の線形弾性系の安定解析で得られた座屈値に対して、明らかな低下を示す振動数条件式を導いた。そして、この条件式を安定判別式として、Beck⁷⁾ の問題の連続体柱へ適用したところ、従動力を受ける非線形弾性連続体柱の座屈荷重値も得られた。

なお本研究では、減衰の影響は無視し、変形に関しては、微小変形振動状態を仮定した。

2. 基礎式

図-1 に示した2自由度モデル柱の非線形弾性復元力をもつヒンジは、図-2 に示す特性をもつと仮定する。すなわち微小な無次元相対変位 δ に対して、復元力が最も単純と考えられる特性を有するものとし、この復元

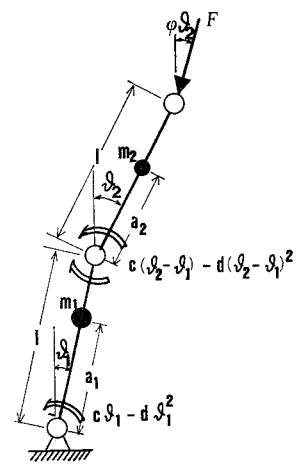


図-1 2自由度モデル柱

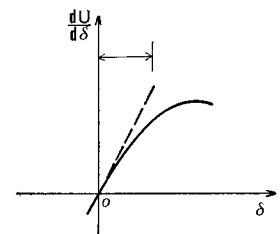


図-2 非線形・力-変位関係

* 正会員 工修 労働省兵庫労働基準局尼崎労働基準監督署

力が非線形弾性ポテンシャル U によって、

$$\frac{dU}{d\delta} = c\delta - d\delta^2 \quad (c > 0, d > 0) \dots\dots\dots(1)$$

で関係づけられているとする。ここで、 c は線形ばね定数、 d は非線形ばね定数で、それぞれ構造部材という初期線形剛性および非線形剛性に対応している。

この式 (1) で与えられた非線形弾性をもつヒンジで結合された一連の剛部材からなる 図-1 のモデル柱は、 l を剛部材の共通の長さにもち、集中質量を m_1, m_2 として、それぞれの部材上での位置 a_1, a_2 を任意にとる 2 自由度系の柱である。すると、この系に非保存力 F が作用しているとき、各質点の微小な回転角 ϑ_1, ϑ_2 を考え、式 (1) について相対変位を $\delta = \vartheta_i - \vartheta_{i-1}$ ($i=1, 2; \vartheta_0=0$) ととれば、運動方程式

$$\left. \begin{aligned} (m_1 a_1^2 + m_2 l^2) \ddot{\vartheta}_1 + m_2 l a_2 \ddot{\vartheta}_2 + (2c - Fl) \vartheta_1 \\ + (\varphi Fl - c) \vartheta_2 - d(2\vartheta_1 \vartheta_2 - \vartheta_2^2) = 0 \\ m_2 l a_2 \ddot{\vartheta}_1 + m_2 a_2^2 \ddot{\vartheta}_2 - c \vartheta_1 + \{c - (1 - \varphi) Fl\} \vartheta_2 \\ - d(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

が得られる。上式で変数の上のドットは時間 t による微分を示す。

ここで、 m, l をそれぞれ単位質量、単位長さにとつて、時間変数 t を

$$\tau = \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot \frac{t}{l}$$

と変換して、改めて τ による微分をドットで表わして、式 (2) の表現を無次元化しておく。すると、基礎式

$$\left. \begin{aligned} (g_1 l_1^2 + g_2) \ddot{\vartheta}_1 + g_2 l_2 \ddot{\vartheta}_2 + (2 - \kappa^2) \vartheta_1 \\ + (\varphi \kappa^2 - 1) \vartheta_2 - \beta(2\vartheta_1 \vartheta_2 - \vartheta_2^2) = 0 \\ g_2 l_2 \ddot{\vartheta}_1 + g_2 l_2^2 \ddot{\vartheta}_2 - \vartheta_1 + \{1 - (1 - \varphi) \kappa^2\} \vartheta_2 \\ - \beta(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

を得る。ここで κ^2 は荷重パラメーター、 β は非線形弾性パラメーターであり、また g_1/g_2 および l_1/l_2 はそれぞれ各集中質量の質量比および位置を表わし、おのおの

$$\kappa^2 = \frac{Fl}{c}, \quad \beta = \frac{d}{c} \dots\dots\dots(4)$$

$$m_1 = g_1 m, \quad m_2 = g_2 m, \quad a_1 = l_1 l, \quad a_2 = l_2 l \dots\dots\dots(5)$$

と定義される。

3. 固有振動数の導出

基礎式 (3) は非線形微分方程式系であるので、従来のように解を指数定置して、特性方程式の根すなわち固有振動数を調べるという動的安定判別法では、そのまま適用できない。そこで、摂動論によって、この非線形系を解析する。すると、非線形弾性パラメーター β を摂動パラメーターとして摂動近似解を求めるとき、この非線形系を特徴づける振動数が得られる。以降、 β の値は小さ

い範囲にあるものとする。

解析のために、基礎式 (3) の線形項 ($\beta=0$ とおいた項) を規準座標 $\xi_\mu = A_\mu e^{-i\omega_\mu \tau}$ ($\mu=1, 2$) によって、変換

$$\vartheta_i = \sum_{\mu} \alpha_{i\mu} \xi_{\mu} \quad (i=1, 2; \mu=1, 2)$$

$$; \alpha_{11} = g_2 l_2 \omega_1^2 - \varphi \kappa^2 + 1$$

$$\alpha_{12} = g_2 l_2 \omega_2^2 - \varphi \kappa^2 + 1$$

$$\alpha_{21} = -(g_1 l_1^2 + g_2) \omega_1^2 + 2 - \kappa^2$$

$$\alpha_{22} = -(g_1 l_1^2 + g_2) \omega_2^2 + 2 - \kappa^2$$

を行い、対角化すれば、

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_1 = -\omega_1^2 \xi_1 + \beta(e_1 \xi_1^2 + e_2 \xi_1 \xi_2 + e_3 \xi_2^2) \\ \ddot{\xi}_2 = -\omega_2^2 \xi_2 + \beta(e_4 \xi_1^2 + e_5 \xi_1 \xi_2 + e_6 \xi_2^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots(6)$$

に帰着される。ここで振動数 ω_1^2, ω_2^2 は方程式

$$\left| \begin{array}{cc} (g_1 l_1^2 + g_2) \omega^2 - (2 - \kappa^2) & g_2 l_2 \omega^2 - (\varphi \kappa^2 - 1) \\ g_2 l_2 \omega^2 + 1 & g_2 l_2^2 \omega^2 - (1 - \kappa^2 + \varphi \kappa^2) \end{array} \right| = 0 \dots\dots\dots(7)$$

の 2 根 ($\omega_1^2 < \omega_2^2$) であり、線形系における動的安定判別法による特性方程式の根と同一のものである。また式 (6) 各右辺の $e_1 \sim e_6$ は、非線形項を表わす各係数で、座標変換の結果得られるものである (付録-1)。

規準座標 (ξ_1, ξ_2) で表現された基礎式 (6) に対して、解の形を β を摂動パラメーターとして、

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = A_1 \cos \tau_1 + \beta \xi_{11} + \beta^2 \xi_{12} + \dots \\ \xi_2 = A_2 \cos \tau_2 + \beta \xi_{21} + \beta^2 \xi_{22} + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

と仮定する。ただし、

$$\tau_1 = \Omega_1 \tau + \nu_1, \quad \tau_2 = \Omega_2 \tau + \nu_2$$

で、 Ω_1, Ω_2 が非線形項を考慮してこれから決定する固有振動数であり、 ν_1, ν_2 は初期位相である。

非線形系を特徴づける固有振動数 Ω_1, Ω_2 を導くために、解 (8) を基礎式 (6) に代入する。すると β の二次の項までに対して、

$$\left. \begin{aligned} (-\Omega_1^2 + \omega_1^2) A_1 \cos \tau_1 \\ + \beta \{ \ddot{\xi}_{11} + \omega_1^2 \xi_{11} - e_1 \xi_{10}^2 - e_2 \xi_{10} \xi_{20} - e_3 \xi_{20}^2 \} \\ + \beta^2 \{ \ddot{\xi}_{12} + \omega_1^2 \xi_{12} - 2 e_1 \xi_{10} \xi_{11} \\ - e_2 (\xi_{10} \xi_{21} + \xi_{11} \xi_{20}) - 2 e_3 \xi_{20} \xi_{21} \} = 0 \\ (-\Omega_2^2 + \omega_2^2) A_2 \cos \tau_2 \\ + \beta \{ \ddot{\xi}_{21} + \omega_2^2 \xi_{21} - e_4 \xi_{10}^2 - e_5 \xi_{10} \xi_{20} - e_6 \xi_{20}^2 \} \\ + \beta^2 \{ \ddot{\xi}_{22} + \omega_2^2 \xi_{22} - 2 e_4 \xi_{10} \xi_{11} \\ - e_5 (\xi_{10} \xi_{11} + \xi_{11} \xi_{20}) - 2 e_6 \xi_{20} \xi_{21} \} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

を得る。ただし $\xi_{10} = A_1 \cos \tau_1, \xi_{20} = A_2 \cos \tau_2$ としている。

以下式 (9) によって摂動解を求めていくとき、 $\beta \rightarrow 0$ では $\Omega_1 \rightarrow \omega_1, \Omega_2 \rightarrow \omega_2$ となるので、 $\Omega_1^2 - \omega_1^2, \Omega_2^2 - \omega_2^2$ を分母にもつ項は排除していく。このようにして一次および二次摂動解を得ると同時に、固有振動数 Ω_1^2, Ω_2^2 が次のように求まる。

$$\Omega_1^2 = \omega_1^2 - \beta^2 \left\{ \frac{e_2^2 A_2^2}{4 \{ \omega_1^2 - (\Omega_1 + \Omega_2)^2 \}} + \frac{e_3 e_5 A_2^2}{2 \{ \omega_2^2 - (\Omega_1 + \Omega_2)^2 \}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{e_2^2 A_2^2}{4\{\omega_1^2 - (\Omega_1 - \Omega_2)^2\}} + \frac{e_3 e_5 A_2^2}{2\{\omega_2^2 - (\Omega_1 - \Omega_2)^2\}} \\
 & + \frac{e_1^2 A_1^2}{2\{\omega_1^2 - 4\Omega_1^2\}} + \frac{e_2 e_4 A_2^2}{4\{\omega_2^2 - 4\Omega_1^2\}} \\
 & + \left. \frac{e_1^2 A_1^2 + e_1 e_3 A_2^2}{\omega_1^2} + \frac{e_2 e_4 A_1^2 + e_2 e_6 A_2^2}{2\omega_2^2} \right\} \\
 & \dots\dots\dots(10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_2^2 = \omega_2^2 - \beta^2 \left\{ \frac{e_2 e_4 A_1^2}{2\{\omega_1^2 - (\Omega_1 + \Omega_2)^2\}} + \frac{e_5^2 A_1^2}{4\{\omega_2^2 - (\Omega_1 + \Omega_2)^2\}} \right. \\
 + \frac{e_2 e_4 A_1^2}{2\{\omega_1^2 - (\Omega_1 - \Omega_2)^2\}} + \frac{e_5^2 A_1^2}{4\{\omega_2^2 - (\Omega_1 - \Omega_2)^2\}} \\
 + \frac{e_3 e_5 A_2^2}{4\{\omega_1^2 - 4\Omega_2^2\}} + \frac{e_6^2 A_2^2}{2\{\omega_2^2 - 4\Omega_2^2\}} \\
 \left. + \frac{e_1 e_5 A_1^2 + e_3 e_5 A_2^2}{2\omega_1^2} + \frac{e_4 e_6 A_1^2 + e_6^2 A_2^2}{\omega_2^2} \right\} \\
 \dots\dots\dots(11)
 \end{aligned}$$

4. 安定解析

基礎式 (6) で与えられる非線形系の安定解析には、線形系の振動数 ω_1^2, ω_2^2 (式 (7) の根) をそのまま使用することはできない。この力学系 (6) を特徴づけている振動数 Ω_1^2, Ω_2^2 (式 (10), (11)) によって解析されねばならない。

そこで、この非線形系を特徴づける振動数 Ω_1^2, Ω_2^2 の変化を式 (10), (11) によって検討すると、表式の各右辺の非線形部 (β^2 項の係数) は順に、

$$\left. \begin{aligned}
 D_1 &= \omega_1^2 - (\Omega_1 + \Omega_2)^2 \\
 D_2 &= \omega_2^2 - (\Omega_1 + \Omega_2)^2 \\
 D_3 &= \omega_1^2 - (\Omega_1 - \Omega_2)^2 \\
 D_4 &= \omega_2^2 - (\Omega_1 - \Omega_2)^2 \\
 D_5 &= \omega_1^2 - 4\Omega_1^2 \\
 D_6 &= \omega_2^2 - 4\Omega_1^2 \\
 D_7 &= \omega_1^2 - 4\Omega_2^2 \\
 D_8 &= \omega_2^2 - 4\Omega_2^2
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

なる分母を有する項で成り立っている。ここで近似的に $\Omega_1 \approx \omega_1, \Omega_2 \approx \omega_2$ として各分母を書き直すと、それぞれ

$$\left. \begin{aligned}
 D_1 &\approx -\omega_2 \cdot (2\omega_1 + \omega_2) \\
 D_2 &\approx -\omega_1 \cdot (\omega_1 + 2\omega_2) \\
 D_3 &\approx \omega_2 \cdot (2\omega_1 - \omega_2) \\
 D_4 &\approx \omega_1 \cdot (2\omega_2 - \omega_1) \\
 D_5 &\approx -3\omega_1^2 \\
 D_6 &\approx (\omega_2 - 2\omega_1) \cdot (\omega_2 + 2\omega_1) \\
 D_7 &\approx (\omega_1 - 2\omega_2) \cdot (\omega_1 + 2\omega_2) \\
 D_8 &\approx -3\omega_2^2
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

となる。

この分母 (13) を有する非線形部 (β^2 項の係数) を表式 (10), (11) についてそれぞれ D_1^2, D_2^2 と書くと、振動数 Ω_1^2, Ω_2^2 は、

$$\begin{aligned}
 \Omega_1^2 \approx \omega_1^2 - \beta^2 D_1^2 = (\omega_1 - \beta D_1) \cdot (\omega_1 + \beta D_1) \\
 \dots\dots\dots(10 \cdot a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_2^2 \approx \omega_2^2 - \beta^2 D_2^2 = (\omega_2 - \beta D_2) \cdot (\omega_2 + \beta D_2) \\
 \dots\dots\dots(11 \cdot a)
 \end{aligned}$$

と表わされる。上式で、各最右辺に示す変形を施して、以下に Ω_1^2, Ω_2^2 の符号の変化を調べる。

a) $\beta=0$ のとき

はじめに柱が線形弾性を有するときには、直接 (10), (11) により $\beta=0$ において、

$$\left. \begin{aligned}
 \Omega_1^2 &= \omega_1^2 \\
 \Omega_2^2 &= \omega_2^2
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

を得る。これより系を支配する振動数は、線形系の固有振動数 ω_1^2, ω_2^2 であることになり、安定解析も従来のように振動数方程式 (7) の根の挙動を調べることに帰着する。

b) $\beta \neq 0$ のとき

柱が非線形弾性を有するときには、表式 (10・a), (11・a) から、下線部の項をみて、 ω_1, ω_2 に比してそれぞれ $\beta D_1, \beta D_2$ が大きな値をとり、

$$\omega_1 - \beta D_1 \leq 0, \omega_2 - \beta D_2 \leq 0$$

を満たすようになると Ω_1^2, Ω_2^2 の符号が正から負へと変わる。このように $\beta D_1, \beta D_2$ が大きな値をとるためには、各分母式中の分母 (13) をみて、下線を施した項が

$$0 \leq |\omega_1| < \beta, 0 \leq |\omega_2| < \beta \dots\dots\dots(15)$$

$$0 \leq |2\omega_1 - \omega_2| < \beta \dots\dots\dots(16)$$

の範囲になければならないことになる。

すなわち柱への負荷とともに変化する振動数 ω_1, ω_2 が (15), (16) に示す上限値

$$|\omega_1| \approx \beta, |\omega_2| \approx \beta \dots\dots\dots(15 \cdot a)$$

$$|2\omega_1 - \omega_2| \approx \beta \dots\dots\dots(16 \cdot a)$$

に達するところから $\beta D_1, \beta D_2$ の値は無視できなくなり、さらに荷重を増して、

$$|\omega_1| \rightarrow 0, |\omega_2| \rightarrow 0 \dots\dots\dots(15 \cdot b)$$

$$|2\omega_1 - \omega_2| \rightarrow 0 \dots\dots\dots(16 \cdot b)$$

なる下限値をとることによって、不安定状態へ移行する。したがって振動数条件式 (15), (16) が柱の臨界状態を与える判別式を総括して表わしている式となる。

5. 適用例

図一1 に与えた非線形弾性柱のモデルで、質量比および位置を示す諸量 (5) が、

$$m_1 = 2m, m_2 = m, a_1 = l, a_2 = l$$

であるときを解く。このような質量分布をもつ2自由度系の線形弾性柱についての固有振動数曲線および安定線図 (パラメーター φ に対する臨界荷重値 κ_{cr}^2 の変化を示す図) などは文献 (7) に詳しく求められている。

そこで、ここでは非線形弾性柱の座屈荷重値が線形弾性柱に対してどのように変化するかを前章 4. の理論を適用して求める。また以下の計算では φ のすべての場合について非線形弾性パラメーター β は $\beta=0.1$ としている。

(1) $\varphi=0$ のとき (図-3, 4)

これは Euler の座屈に相当するときで、外力は保存力と見なされる。この柱の線形固有振動数 ω_1^2, ω_2^2 曲線を図-3 に示す。この振動数曲線から、この系で起こり得る不安定状態を (15), (16) によって調べると、第 1 の条件式

$$0 \leq |\omega_1| < 0.1$$

によることになる。この条件に対応して、臨界荷重 κ_{cr}^2 の領域は、

$$0.357 < \kappa_{cr}^2 \leq 0.382$$

の範囲をとる。すなわち (15・a) に示す上限値 ($\kappa^2=0.357$) に達するころから、柱の安定性が保たれなくな

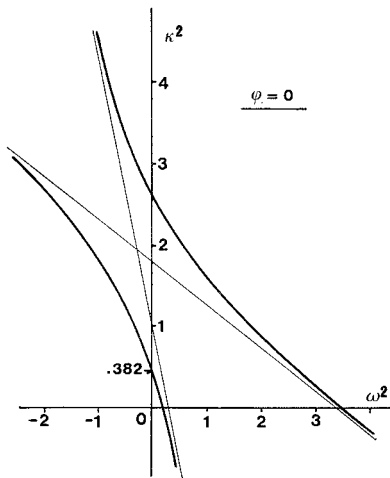


図-3 固有振動数曲線, $\varphi=0^{7)}$

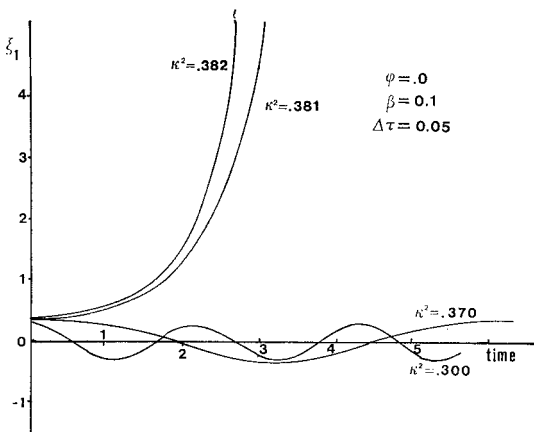


図-4 数値解 $\xi_1(\tau)$ の挙動, $\varphi=0; \beta=0.1$

り、さらに (15・b) に示す移行により不安定状態になり、下限値 ($\kappa^2=0.382$) に至って明らかな座屈となる。このとき下限値に対応する臨界荷重値は、線形弾性柱の静的不安定 (ダイバージェンス) による座屈値と同一である³⁾。この結論を確認するために基礎式 (6) を数値的に解いたものが図-4 である。すなわち、この非線形微分方程式系を初期値問題として数値積分し、解 $\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)$ の時間経過に対する挙動を求めたものである。このとき時間の増分幅 $\Delta\tau=0.05$ とし、初期値 ξ_{i0} は図-2 の力-変位関係図より得られる変位値を初期振幅として与えた。図では $\beta=0.1$ に対して $\kappa^2=0.370$ のときに系の振動数に変化がみられ、さらに負荷を増すと、解 ξ_1 の発散が、 $\kappa^2=0.381$ からみられる。また解 ξ_2 の励起はみられない。したがって、柱は静的不安定型で座屈することになる。なお横軸の時間は無負荷のときの 1 次振動 (1 次振動数 $\omega_{10}=0.386$) の周期を単位にとってある。

(2) $\varphi=1$ のとき (図-5, 6)

続いて外力が接線方向を保って作用するときを考える。この系の線形固有振動数 ω_1^2, ω_2^2 曲線は図-5 であり、この曲線から、系で起こり得る不安定状態を (15), (16) によって調べると、

$$0 \leq |2\omega_1 - \omega_2| < 0.1$$

なる条件によることになる。この条件に対応して、

$$1.637 < \kappa_{cr}^2 \leq 1.732$$

なる範囲の臨界荷重領域が得られる。これを図-5 中に示すと、細線で与えた上限値 ($\kappa^2=1.637$) から柱の安定性が崩れて、さらに下限値に対応した $\kappa_{cr}^2=1.732$ で

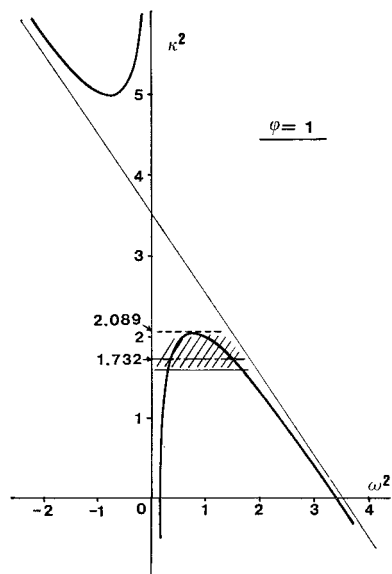


図-5 固有振動数曲線, $\varphi=1^{7)}$

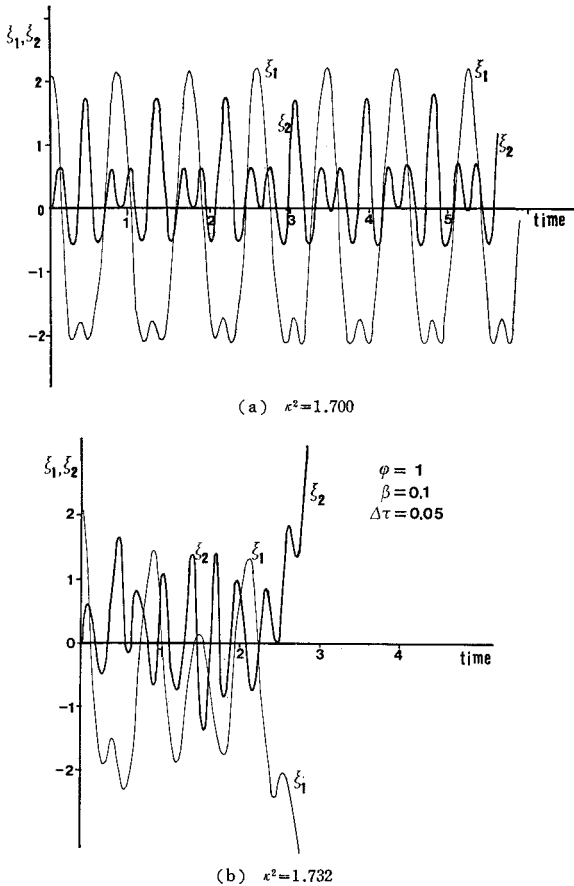


図-6 数値解 $\xi_1(\tau)$, $\xi_2(\tau)$ の挙動, $\varphi=1$; $\beta=0.1$

は明らかな不安定を呈することとなる。また対応する線形弾性柱は、文献 3) より $\kappa_{cr}^2=2.089$ で動的不安定（フラッタ）に入ることから、非線形弾性柱では図-5に示す斜線の範囲ですでに不安定状態になっているものと考えられる。

この結果を確認するために (1) と同様にして基本式 (6) を数値的に解いたものが図-6である。初期振幅は ξ_1 のみに与えてあり、図-2 の力-変位図から得られる値を $\tau=0$ で $A_{10}=2.0$ として初期値問題を解いたものである。図-6 (a) では $\kappa^2=1.70$ に対して解の発散はみられないが、 ξ_2 の励起が生じていることから振動状態に入っており、さらに同図 (b) の $\kappa^2=1.732$ の臨界荷重値に達すれば、解 $\xi_1(\tau)$, $\xi_2(\tau)$ に振動発散が起きている。

6. Beck の問題への考察

M. Beck⁹⁾ によって解かれた非保存的弾性柱の座屈問題を図-7に示す。同図 (a) に示すように柱は一端が固定され、自由端に接線方向集中力が作用している。柱

は連続体として、一様な曲げ剛性 EI と質量分布をもち、Beck は動的不安定となる臨界荷重 P_{cr}

$$P_{cr}=20.05 \frac{EI}{l^2}$$

を見出した。

この問題の柱が連続体であることに対して、その安定問題を解決するのに柱の微小振動を考えている。このとき荷重の増加とともに変化する固有振動は、いきなり高次モードから実現すると考えるのではなく、一次モードより順に高次モードへ移行するものと考えられる。そして座屈値の計算については、より低次の振動モードから考えて臨界値を求めている。Beck の計算においても一次固有振動数と二次固有振動数のみに注目して、それらの重根条件より動的不安定の臨界値を求めている。

そこで、これから考える非線形弾性を有する連続体柱について同様の考察を行い、柱の微小振動の安定性は一次および二次の固有振動数によって支配されると仮定する。このような仮定をおくと、4. の安定解析より得られた条件は、柱の振動を基礎づける条件式となる。そして臨界振動数領域としては式 (16)、さらに柱の不安定移行が明確となるときには臨界振動数条件式 (16・b) が、いまの問題では適用される。このとき、式 (16・b) は、

$$4\omega_1^2 = \omega_2^2 \dots\dots\dots (17)$$

とも書いて、線形弾性柱についての臨界振動数条件

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 \dots\dots\dots (18)$$

と対応させることができる。ここに式 (17) によって臨界値の算定に入る。すなわち、Beck の柱における曲げ

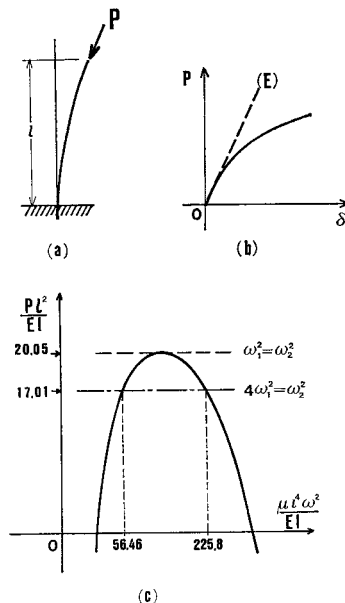


図-7 Beck の問題⁹⁾ への適用

剛性 EI を初期線形剛性にもち、図-7 (b) なる変形特性を有する非線形弾性柱に接線方向集中力が作用するとき、判定式 (17) は臨界値 P_{cr}

$$P_{cr} = 17.01 \frac{EI}{l^2} \dots \dots \dots (19)$$

を要求している。この値は 図-8 (c) の固有振動数曲線図中に一点鎖線で示してある。また Beck の柱の臨界荷重値は同図中の点線で示した振動数条件式 (式 (18)) を満たすときに得られていた。式 (19) の臨界値は線形弾性の Beck の柱の座屈値の約 0.85 倍と危険側への値を示している。

7. 結 論

従来の非保存的弾性安定問題で、その正しい解析性を認められてきた動的安定判別法を、非線形弾性を有する柱の安定問題にも適用した結果、座屈値の算定に関して次の結論を得た。

(1) 動的不安定による座屈形態に柱が入るときの臨界荷重値は、従来の固有振動数の重根条件による判定式よりも低い臨界値を与える固有振動数の領域 (本文式 (16))

$$0 \leq |\omega_1 - \omega_2| < \beta$$

によって決定されるべきであること (ω_1, ω_2 はそれぞれ線形系の一次および二次の固有振動数)。

(2) 静的不安定による座屈形態に柱が入るときの臨界荷重値は、線形系の振動数 ω に対して領域 (本文式 (15))

$$0 \leq |\omega| < \beta \quad (0 \leq \omega^2 < \beta^2)$$

によって決定されるべきであること、そしてこの固有振動数領域が従来の線形系の臨界値を低下させていること。

このように得られた結論 (1) を Beck の問題へ適用したところ、初期線形曲げ剛性 EI で、負荷による変形特性が非線形関係を有する柱では、振動数領域下限値として (本文式 (17) による)、

$$P_{cr} = 17.01 \frac{EI}{l^2} \quad (l: \text{材長})$$

で動的不安定に入るとを導いた。この値は Beck の問題の座屈値の約 0.85 倍であり、危険側への値を示している。

付録-1

基礎式 (3) から式 (6) への規準化によって変換される非線形項の各係数 $e_1 \sim e_6$ を次に掲げておく。ここで、各係数中の α_1, α_2 は座標変換の際の ϑ_1, ϑ_2 の一次結合定数であり、それぞれ α についての二次方程式

$$\begin{vmatrix} (g_1 l_1^2 + g_2) + \alpha \cdot g_2 l_2 & (2 - \kappa^2) - \alpha \\ g_2 l_2 + \alpha \cdot g_2 l_2^2 & (\varphi \kappa^2 - 1) + \alpha (1 - \kappa^2 + \varphi \kappa^2) \end{vmatrix} = 0$$

の 2 根で与えられる。

$$e_1 = \frac{g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_1 g_2 l_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 \cdot g_1^2 g_2^2 l_1^4 l_2^4} \{ \alpha_1 (g_2 l_2 + \alpha_2 g_2 l_2^2)^2 - (2 - 2 \alpha_1) (g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_2 g_2 l_2) (g_2 l_2 + \alpha_2 g_2 l_2^2) + (\alpha_1 - 1) (g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_2 g_2 l_2)^2 \}$$

$$e_2 = \frac{g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_2 g_2 l_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 \cdot g_1^2 g_2^2 l_1^4 l_2^4} [-2 \alpha_1 (g_2 l_2 + \alpha_2 g_2 l_2^2) (g_2 l_2 + \alpha_1 g_2 l_2^2) + (2 - 2 \alpha_1) \{ (g_2 l_2 + \alpha_2 g_2 l_2^2) (g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_1 g_2 l_2) + (g_2 l_2 + \alpha_1 g_2 l_2^2) (g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_2 g_2 l_2) \} - 2 (\alpha_1 - 1) (g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_1 g_2 l_2) (g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_2 g_2 l_2)]$$

$$e_3 = \frac{(g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_2 g_2 l_2)^2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 \cdot g_1^2 g_2^2 l_1^4 l_2^4} \left\{ \alpha_1 \cdot \frac{(g_2 l_2 + \alpha_1 g_2 l_2^2)^2}{g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_1 g_2 l_2} - (2 - 2 \alpha_1) (g_2 l_2 + \alpha_1 g_2 l_2^2) + (\alpha_1 - 1) (g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_2 g_2 l_2) \right\}$$

$$e_4 = \frac{(g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_2 g_2 l_2)^2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 \cdot g_1^2 g_2^2 l_1^4 l_2^4} \left\{ \alpha_2 \cdot \frac{(g_2 l_2 + \alpha_2 g_2 l_2^2)^2}{g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_2 g_2 l_2} - (2 - 2 \alpha_2) (g_2 l_2 + \alpha_2 g_2 l_2^2) + (\alpha_2 - 1) (g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_2 g_2 l_2) \right\}$$

$$e_5 = \frac{g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_1 g_2 l_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 \cdot g_1^2 g_2^2 l_1^4 l_2^4} [-2 \alpha_2 (g_2 l_2 + \alpha_2 g_2 l_2^2) (g_2 l_2 + \alpha_1 g_2 l_2^2) + (2 - 2 \alpha_2) \{ (g_2 l_2 + \alpha_2 g_2 l_2^2) (g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_1 g_2 l_2) + (g_2 l_2 + \alpha_1 g_2 l_2^2) (g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_2 g_2 l_2) \} - 2 (\alpha_2 - 1) (g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_1 g_2 l_2) (g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_2 g_2 l_2)]$$

$$e_6 = \frac{g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_2 g_2 l_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 \cdot g_1^2 g_2^2 l_1^4 l_2^4} \{ \alpha_2 (g_2 l_2 + \alpha_1 g_2 l_2^2)^2 - (2 - 2 \alpha_2) (g_2 l_2 + \alpha_1 g_2 l_2^2) (g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_1 g_2 l_2) + (\alpha_2 - 1) (g_1 l_1^2 + g_2 + \alpha_1 g_2 l_2)^2 \}$$

参 考 文 献

- 1) Bolotin, V.V. : Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press, N.Y., 1963.
- 2) Ziegler, H. : Principles of Structural Stability, Blaisdel Publishing Co., Massachusetts, 1968.
- 3) Ziegler, H. : Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik, Ing.-Arch., 20, p. 49, 1952.
Ziegler, H. : Linear Elastic Stability, ZAMP, 4, p. 89, 1953.
- 4) Herrmann, G. and I.-C. Jong : On the Destabilizing Effect of Damping in Nonconservative Elastic Systems, J. Appl. Mech., 32, p. 592, 1965.
Herrmann, G. and I.-C. Jong : On Nonconservative Stability Problems of Elastic Systems with Slight Damping, J. Appl. Mech., 33, p. 125, 1966.
- 5) Ziegler, H. : Trace Effects in Stability, IUTAM Symposium, Springer-Verlag, Berlin, p. 96, 1971.
- 6) Beck, M. : Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes, ZAMP, 3, p. 225, 1952.
- 7) Herrmann, G. : Dynamics and Stability of Mechanical Systems with Follower Forces, NASA-CR-1782, 1971.
(1980.4.2・受付)