

曲線要素を用いた有限要素法による ケーブル構造の大変形解析

LARGE DEFORMATION ANALYSIS OF CABLE STRUCTURES EMPLOYING CURVED FINITE ELEMENTS

中西 宏*・波田 凱夫**

By Hiroshi NAKANISHI and Yoshio NAMITA

1. ま え が き

本文では、3 節点アイソパラメトリック曲線要素を用いたケーブル構造の大変形解析法について述べる。問題の定式化にあたっては、全荷重-全変位についての表現をとり、混合法および変位法の所論を用いる。混合法による解析では一つの要素を 2 個の領域に分け、それぞれの領域で応力を一定とすることにより、また変位法では reduced integration の手法を併用することにより精度の高い解が得られることを示す。

ケーブルは、支持索としてのみならず、ケーブルトラスやケーブルネットなどのさまざまな形態の大スパン構造物に供されている。最近では海洋構造物へのケーブルの適用が見受けられる。大規模な浮体の係留索はその代表的なものであり、また海底資源開発用プラットフォームのステイとして種々の方式が提案されている。このような海洋構造物では、ケーブル自重、浮力、波力、潮流力など各種の外力が作用し、また構造系の変形も非常に大きく、ケーブルは極端に緊張された状態から大きく湾曲した状態までの種々の変形状態をとる。さらに海底に着地しているケーブルの一部やそれに結合された緩衝用の重錘が構造系の変形とともに水中に浮上するといった境界条件の変化もしばしば考慮されねばならない。本文では、このような構造物に対する静的な大変形問題の解析を一般的に論ずるための手法を提案するものである。

一般に、ケーブル構造の大変形解析の手法として、

- (a) 直線ケーブル要素または曲線ケーブル要素を用いた有限要素法によるもの
- (b) 分布荷重に釣り合うケーブル形状の解析解を利用して、ケーブル端でのつり合い条件式あるいは適合条件式を解くもの^{9)~7)}

が考えられる。(b) の解析解を併用する方法は、それぞれの所論で取り扱う範囲内の荷重が作用する限りにおいては高精度の解をもたらす。しかし、前記の海洋構造物のように変形の増大とともに境界条件が変化する問題を取り扱うことが容易でなく、また動的解析への拡張が困難であるといった点で汎用性に欠けるうらみがある。これに対し、有限要素法ではさまざまな荷重や境界条件を容易に取り扱うことができ、動的解析への拡張が容易である。有限要素法に基づく解法は直線要素によるものと曲線要素によるものとに大別される。その前者についての研究はこれまでに数多くなされているが、後者についての研究は非常に少なく、要素の湾曲がごく浅い場合を取り扱った解析法が示されているのみである^{8),9)}。

曲線要素による有限要素法では、要素の湾曲が大となるほど厳密には高次の変位関数が要求されるが、その場合、一要素内の節点数が多くなり、また計算時間が増大するなど実用面で不利な点が生ずる。したがって、要素の湾曲度の大きさにかかわらず、いかにして 2 次程度の低次の変位関数によって高精度の解を得るかがここでの重要な課題となる。

本文では、まず、そのような低次の変位関数による近似誤差が特に応力に顕著に現われることを考慮し、混合法^{10),11)}を用いることによって応力の正解からの局所的なばらつきを補正する。すなわち、3 節点アイソパラメトリック要素をとり、これを 2 分してそれぞれの領域で応力が一定値をとるようにする。これにより応力は階段状で、その値は、要素内の変位の近似関数より定まる応力をそれぞれの領域において平均したものとなる。本文ではいま一つの方法として既往の研究でその効果が知られている reduced integration の手法^{12),13)}を適用した変位法によるものについて論じている。若干の数値計算例によって両者の解の精度および収束性を比較し、さらにこれらの曲線要素を用いることにより、直線要素を用いた解析に比べてどのように計算の効率が高くなるかを

* 正会員 工博 (株) 神戸製鋼所構造研究所 研究員

** 正会員 工博 (株) 神戸製鋼所構造研究所 次席研究員

示す.

2. 混合法による解析

(1) 基礎式

ここではまず、本文で用いる応力-ひずみ関係、ひずみ-変位関係等を明示して、ケーブルの大変形問題に対する Hellinger-Reissner の汎関数を組み立てる.

ケーブル部材の応力・変位に関して次の仮定を設ける.

- ① ケーブル軸方向の応力のみが存在し、任意の一断面内において応力は一定である.
- ② 任意の一断面上のすべての点は等しい変位をなす.
- ③ ケーブル断面積はひずみの状態によらず一定である.

これらの仮定に基づき、以下の解析ではケーブルの物体力と表面力を分布荷重

$$w_i = A\rho F_i + \oint \bar{T}_i d\phi \dots \dots \dots (1)$$

として取り扱う. ここに、 w_i は無応力状態のケーブルに対する単位長さ当りの分布荷重、 ρ 、 F_i および \bar{T}_i はそれぞれ密度、単位質量当りの物体力および単位表面積当りの表面力を、 A は断面積を、 $\oint d\phi$ はケーブル外周に沿う積分を表わす.

次に、応力とひずみの関係について考える. ϵ を初期状態から測った伸びひずみ、 ds^* 、 ds_a および ds をそれぞれ変形後、初期状態および無応力状態の線素の長さ、 X_i を初期状態のケーブルの座標 (図-1)、 u_i を初期状態からのケーブルの変位とすると、

$$\epsilon = \frac{ds^* - ds_a}{ds} = g^* - g_a \dots \dots \dots (2)$$

となる. ここに、

$$\begin{aligned} g^{*2} &= X_{i,s}^* X_{i,s}^* \\ g_a^2 &= X_{i,s} X_{i,s} \\ X_{i,s}^* &= X_{i,s} + u_{i,s} \quad i=1, 2, 3 \end{aligned}$$

添字 s は曲線座標 s に関する微分を表わす. また、添字に関してはテンソル解析における総和規約を用いている.

また、

$$\sigma = E\epsilon, \quad P = EA\epsilon \dots \dots \dots (3)$$

となる. ここに σ および P はそれぞれ初期状態からの応力増分および張力の増分、 E はヤング係数である.

さて前述の仮定を満たすケーブルに対する Hellinger-Reissner の汎関数を π_{RC} とし、ケーブル構造の初期状態 (初期形状、初期張力) を基準にとって変位 u_i と応力増分 σ を含む項のみを示すと、

$$\pi_{RC} = A \int_{L_0} [(\sigma_0 + \sigma)\epsilon - W_c(\sigma)] ds$$

$$- \int_{L_0} w_i u_i ds - (A\bar{T}_i u_i)_{s=0} - (A\bar{T}_i u_i)_{s=L_0} \dots \dots \dots (4)$$

となる. ただし、ここでは力学的境界条件のみを考え、ケーブルの両端の断面に作用する単位面積当りの表面力を $\bar{T}_i|_{s=0}$ および $\bar{T}_i|_{s=L_0}$ としている. また σ_0 は初期応力を、 $W_c(\sigma)$ はコンプリメンタリエネルギーで、 $W_c(\sigma) = \sigma^2/2E$ である. L_0 は無応力長である.

式 (4) の第 1 変分をとると、

$$\begin{aligned} \delta\pi_{RC} &= A \int_{L_0} \left(\epsilon - \frac{1}{E} \sigma \right) \delta\sigma ds \\ &+ \int_{L_0} \left[A(\sigma_0 + \sigma) \frac{\partial \epsilon}{\partial u_{i,s}} \delta u_{i,s} - w_i \delta u_i \right] ds \\ &- (A\bar{T}_i \delta u_i)_{s=0} - (A\bar{T}_i \delta u_i)_{s=L_0} \dots \dots (5) \end{aligned}$$

となる. 式 (2) より、

$$(\sigma_0 + \sigma) \frac{\partial \epsilon}{\partial u_{i,s}} = (\sigma_0 + \sigma) \frac{X_{i,s}^*}{g^*}$$

である. ここで、

$$T_i = (\sigma_0 + \sigma) \frac{X_{i,s}^*}{g^*} \dots \dots \dots (6)$$

において、式 (5) に代入し、部分積分を施せば、

$$\begin{aligned} \delta\pi_{RC} &= A \int_{L_0} \left(\epsilon - \frac{\sigma}{E} \right) \delta\sigma ds - \int_{L_0} (AT_{i,s} + w_i) \delta u_i ds \\ &- A[(\bar{T}_i + T_i) \delta u_i]_{s=0} \\ &- A[(\bar{T}_i - T_i) \delta u_i]_{s=L_0} \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

を得る. 式 (7) より応力-ひずみ関係式

$$\epsilon - \frac{\sigma}{E} = 0 \dots \dots \dots (8)$$

部材内の任意の点でのつり合い式

$$AT_{i,s} + w_i = 0 \dots \dots \dots (9)$$

両端での力のつり合い式

$$\bar{T}_i + T_i = 0; \quad s=0 \dots \dots \dots (10)$$

$$\bar{T}_i - T_i = 0; \quad s=L_0 \dots \dots \dots (11)$$

を得る. 式 (9) は阿井ら⁷⁾が仮想仕事の原理より導いたつり合い式に一致する. 式 (10) および (11) において T_i の符号がそれぞれ正および負となっているのは、式 (6) の $X_{i,s}^*/g^*$ が部材の接線の方向余弦を表わしているからである.

(2) 要素内の応力と変位の近似

以下の解析では 図-1 に示す 3 節点の要素を用い

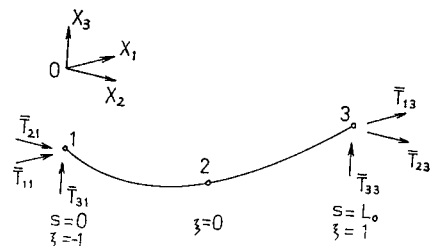


図-1 曲線要素

る。要素内の任意点の座標および変位はそれぞれ節点の座標および変位によって補間される。また要素を2つの小領域に分け、それぞれの小領域で応力を一定とする。すなわち、3節点アイソパラメトリック要素をとって、その応力場を階段状に近似する。

これより、式(4)の π_{RC} は、

$$\pi_{RC} = A \left\{ (\bar{\sigma}_{01} + \bar{\sigma}_1) \int_{L_{01}} \epsilon ds + (\bar{\sigma}_{02} + \bar{\sigma}_2) \int_{L_{02}} \epsilon ds - \frac{L_{01}}{2E} \bar{\sigma}_1^2 - \frac{L_{02}}{2E} \bar{\sigma}_2^2 \right\} - (\mathbf{F}_w + \mathbf{F}_c)^T \mathbf{q} \dots\dots\dots (12)$$

となる。ここに、 L_{01} および L_{02} はそれぞれ小領域 12 および 23 の無応力長、 $\bar{\sigma}_{01}$ 、 $\bar{\sigma}_{02}$ および $\bar{\sigma}_1$ 、 $\bar{\sigma}_2$ はそれぞれ各小領域において一定の値をとる初期応力および応力増分である。また、

$$\mathbf{F}_w = \left[\frac{\partial}{\partial u_{11}} \int_{L_0} w_1 u_1 ds \quad \frac{\partial}{\partial u_{12}} \int_{L_0} w_1 u_1 ds \quad \frac{\partial}{\partial u_{13}} \int_{L_0} w_1 u_1 ds \dots\dots \frac{\partial}{\partial u_{33}} \int_{L_0} w_3 u_3 ds \right]^T \dots (13)$$

$$\mathbf{F}_c = [\overline{AT}_{11} \ 0 \ \overline{AT}_{13} \ \overline{AT}_{21} \ 0 \ \overline{AT}_{23} \ \overline{AT}_{31} \ 0 \ \overline{AT}_{33}]^T$$

$$\mathbf{q} = [u_{11} u_{12} u_{13} u_{21} u_{22} u_{23} u_{31} u_{32} u_{33}]^T \dots\dots\dots (14)$$

である。ただし $u_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ は節点 j の X_i 座標軸方向の変位を表わす。同様に \overline{AT}_{ij} は節点 j における表面力の X_i 座標軸方向の成分である。

w_1, w_2, w_3 が s に関して一定である場合には式(13)は、

$$\mathbf{F}_w = \left[\frac{w_1}{1+\bar{\epsilon}_{a1}} \int_{-1}^0 NJ d\xi + \frac{w_1}{1+\bar{\epsilon}_{a2}} \int_0^1 NJ d\xi \quad \frac{w_2}{1+\bar{\epsilon}_{a1}} \int_{-1}^0 NJ d\xi + \frac{w_2}{1+\bar{\epsilon}_{a2}} \int_0^1 NJ d\xi \quad \frac{w_3}{1+\bar{\epsilon}_{a1}} \int_{-1}^0 NJ d\xi + \frac{w_3}{1+\bar{\epsilon}_{a2}} \int_0^1 NJ d\xi \right]^T \dots\dots\dots (15)$$

と書かれる。ここで、 ξ は図-1に示す正規化座標であり、 $\bar{\epsilon}_{a1}$ および $\bar{\epsilon}_{a2}$ はそれぞれ小領域 12 および 23 における一定の値の初期ひずみである。また、

$$\mathbf{N} = \left[\frac{1}{2} \xi(\xi-1) \quad -\xi^2+1 \quad \frac{1}{2} \xi(\xi+1) \right]$$

$$J = \{ (N'X_1)^2 + (N'X_2)^2 + (N'X_3)^2 \}^{1/2}$$

$$\left(N' = \frac{dN}{d\xi} \right)$$

$$\mathbf{X}_1 = [X_{11} \ X_{12} \ X_{13}]^T, \quad \mathbf{X}_2 = [X_{21} \ X_{22} \ X_{23}]^T,$$

$$\mathbf{X}_3 = [X_{31} \ X_{32} \ X_{33}]^T$$

である。ただし $X_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ は節点 j の X_i 座標値である。 $\bar{\epsilon}_{a1}$ および $\bar{\epsilon}_{a2}$ の値がごく小さいならば、式(15)を

$$\mathbf{F}_w = \left[w_1 \int_{-1}^1 NJ d\xi \quad w_2 \int_{-1}^1 NJ d\xi \quad w_3 \int_{-1}^1 NJ d\xi \right]^T$$

と書き直すことができる。

次に、 $\bar{\sigma}_1$ および $\bar{\sigma}_2$ に関する π_{RC} の停留条件から、

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{E}{L_{01}} \bar{e}_1, \quad \bar{\sigma}_2 = \frac{E}{L_{02}} \bar{e}_2 \dots\dots\dots (16)$$

が得られる。ここに、

$$\bar{e}_1 = \int_{L_{01}} \epsilon ds = \int_{-1}^0 (J^* - J) d\xi \dots\dots\dots (17)$$

$$\bar{e}_2 = \int_{L_{02}} \epsilon ds = \int_0^1 (J^* - J) d\xi \dots\dots\dots (18)$$

$$J^* = \{ (N'X_1^*)^2 + (N'X_2^*)^2 + (N'X_3^*)^2 \}^{1/2}$$

$$\mathbf{X}_1^* = [X_{11}^* X_{12}^* X_{13}^*]^T, \quad \mathbf{X}_2^* = [X_{21}^* X_{22}^* X_{23}^*]^T,$$

$$\mathbf{X}_3^* = [X_{31}^* X_{32}^* X_{33}^*]^T$$

であり、それぞれ小領域 12 および 23 の伸びを表わす。ただし $X_{ij}^* (i, j=1, 2, 3)$ は節点 j の変形後の X_i 座標値である。すなわち、

$$X_{ij}^* = X_{ij} + u_{ij} \quad (i, j=1, 2, 3)$$

以上の関係を用いて式(12)の汎関数を π_{Rm} と書き改め、かつ、全要素に関して総和をとると

$$\pi_R = \sum_m \pi_{Rm} = \sum_m A \left(\bar{\sigma}_{01} \bar{e}_1 + \bar{\sigma}_{02} \bar{e}_2 + \frac{E}{2L_{01}} \bar{e}_1^2 + \frac{E}{2L_{02}} \bar{e}_2^2 \right) - \mathbf{F}^T \mathbf{x} \dots\dots\dots (19)$$

となる。ここに、 \sum_m はすべての要素に関する総和を意味する。また、 \mathbf{x} は $f \times 1$ 次の節点変位ベクトル、 \mathbf{F} は $f \times 1$ 次の荷重ベクトルで全要素について前述の \mathbf{F}_w と \mathbf{F}_c を重ね合わせたものである。ただし、 f は構造の自由度である。

(3) つり合い式

式(19)の汎関数を節点変位で微分してつり合い式

$$\frac{\partial \pi_R}{\partial \mathbf{x}} = \sum_m A \left\{ \left(\bar{\sigma}_{01} + \frac{E}{L_{01}} \bar{e}_1 \right) \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \mathbf{x}} + \left(\bar{\sigma}_{02} + \frac{E}{L_{02}} \bar{e}_2 \right) \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \mathbf{x}} \right\} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (20)$$

を得る。ここで、式(17)、(18)を用いて、 $\partial \bar{e}_1 / \partial \mathbf{x}$ および $\partial \bar{e}_2 / \partial \mathbf{x}$ を要素ごとに書き下す。1要素内の3節点の変位成分 $u_{11} \sim u_{33}$ を使うと、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u_{11}} &= \int_{-1}^0 N_1' N' X_1^* (J^*)^{-1} d\xi \\ \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u_{21}} &= \int_{-1}^0 N_1' N' X_2^* (J^*)^{-1} d\xi \\ \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u_{31}} &= \int_{-1}^0 N_1' N' X_3^* (J^*)^{-1} d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

となる。ここに、 N_1' は N' の第1要素を表わす(式(15)参照)。また $\partial \bar{e}_1 / \partial u_{12}$ 、 $\partial \bar{e}_1 / \partial u_{22}$ 、 $\partial \bar{e}_1 / \partial u_{32}$ および $\partial \bar{e}_1 / \partial u_{13}$ 、 $\partial \bar{e}_1 / \partial u_{23}$ 、 $\partial \bar{e}_1 / \partial u_{33}$ は式(21)の右辺の N_1' をそれぞれ N_2' および N_3' に置換して得られる。同様に、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u_{11}} &= \int_0^1 N_1' N' X_1^* (J^*)^{-1} d\xi \\ \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u_{21}} &= \int_0^1 N_1' N' X_2^* (J^*)^{-1} d\xi \\ \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u_{31}} &= \int_0^1 N_1' N' X_3^* (J^*)^{-1} d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

であり、 $\partial \bar{e}_2 / \partial u_{12} \dots$ および $\partial \bar{e}_2 / \partial u_{13} \dots$ も同上の手続きで得られる。

さらに、

$$\left. \begin{aligned} \nu_{11} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u_{11}} & \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u_{21}} & \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u_{31}} \end{bmatrix}^T \\ \nu_{21} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u_{12}} & \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u_{22}} & \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u_{32}} \end{bmatrix}^T \\ \nu_{31} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u_{13}} & \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u_{23}} & \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u_{33}} \end{bmatrix}^T \\ \nu_{12} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u_{11}} & \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u_{21}} & \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u_{31}} \end{bmatrix}^T \\ \nu_{22} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u_{12}} & \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u_{22}} & \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u_{32}} \end{bmatrix}^T \\ \nu_{32} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u_{13}} & \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u_{23}} & \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u_{33}} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

とおくと、式 (20) は次のように書き表わすことができる。

$$\sum_m E_m g_m - F = 0 \dots \dots \dots (24)$$

ここに、 E_m は $f \times 9$ の行列であり、要素の自由度と構造の自由度との関係を与えるものである。たとえば、 u_{11} の構造の自由度の番号が k であれば、 E_m の第 1 列の k 番目の要素のみが 1 でほかは 0 である。また、

$$g_m = A \left(\bar{\sigma}_{01} + \frac{E}{L_{01}} \bar{e}_1 \right) \begin{bmatrix} \nu_{11} \\ \nu_{21} \\ \nu_{31} \end{bmatrix} + A \left(\bar{\sigma}_{02} + \frac{E}{L_{02}} \bar{e}_2 \right) \begin{bmatrix} \nu_{12} \\ \nu_{22} \\ \nu_{32} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (24)'$$

である。さらに $N_2' = -(N_1' + N_3')$ の関係から、

$$\nu_{21} = -(\nu_{11} + \nu_{31}), \nu_{22} = -(\nu_{12} + \nu_{32})$$

の関係がある。

g_m は、 $A(\bar{\sigma}_{01} + E\bar{e}_1/L_{01})\nu_{11}$ など、4 個の独立な力のベクトルから成り立っているが、それらの力は、 ν_{11} 等の定義から明らかなように 図-2 に示すような位置に働いている。すなわち、節点 1 と 2、および 2 と 3 においてそれぞれ大きさが等しく方向が反対の一对の力のベクトルが作用していることになる。

また本文の解析では、断面力と分布荷重をそれぞれ別個に取り扱っているので、要素内の二つの小領域では、断面力ベクトルは分布荷重によらず一定である。

いま、それぞれの小領域で応力が一定でなく変化しているものと考え、また、

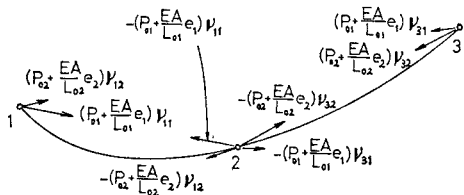


図-2 各節点での断面力ベクトル

$$\left. \begin{aligned} \nu_{11} &= - \left(\frac{dX^*}{ds^*} \right)_{\xi = \xi_a} \\ \nu_{32} &= \left(\frac{dX^*}{ds^*} \right)_{\xi = \xi_b} \end{aligned} \right\} \left(X^* = [X_1^* X_2^* X_3^*]^T \right) \left. \begin{aligned} &\dots \dots \dots (24)'' \\ &\text{.....} \end{aligned} \right\}$$

である点 ξ_a および ξ_b が存在すれば、断面力ベクトルが一定であることから式 (24)' における二つの応力 $\bar{\sigma}_{01} + E\bar{e}_1/L_{01}$ および $\bar{\sigma}_{02} + E\bar{e}_2/L_{02}$ はそれぞれ点 ξ_a および ξ_b での応力を表わす。

点 ξ_a および ξ_b を求めるのに dX^*/ds^* を $\xi=0$ のまわりに ξ についてテーラー展開し、2 次以上の項を無視して式 (24)'' を解くと、

$$\xi_a = -\frac{7}{12}, \xi_b = \frac{7}{12}$$

が得られる。

(4) 数値解析法

つり合い方程式(20)は変位に関する非線形多元連立方程式である。本文ではこれを解くのに Newton-Raphson 法を用いる。ただし、この方法を用いる場合、解の初期値あるいは構造・荷重によって解が発散することもあると考えられるので、これに対処する一つの手法を考案している。

いま、 $\partial \pi_R / \partial x$ を $\phi(x)$ と書き、 $x^{(i)}$ を第 i 回目の繰り返し計算における近似解ベクトル、 $\Delta x^{(i)}$ をこの近似解に対する修正ベクトルとする。すなわち第 $i+1$ 回目の繰り返しにおける近似解は、

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + \Delta x^{(i)}$$

となる。 $\phi(x^{(i+1)})$ を $x^{(i)}$ のまわりにテーラー展開し、 $\Delta x^{(i)}$ の 2 次以上の項を無視すると、 $\Delta x^{(i)}$ に関する線形方程式

$$J \Delta x^{(i)} + \phi(x^{(i)}) = 0 \dots \dots \dots (25)$$

を得る。ここに J は $f \times f$ の Jacobian matrix で、

$$J = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=x^{(i)}} \dots \dots \dots (26)$$

である。この J はまた接線剛性行列でもある。これを作成するには要素ごとに Jacobian matrix を作り、それらを構造全体について重ね合わせればよい。要素の Jacobian matrix (9×9) を G と表わすと、式 (24) より、

$$G = A \left\{ \left(\bar{\sigma}_{01} + \frac{E}{L_{01}} \bar{e}_1 \right) M_1 + \left(\bar{\sigma}_{02} + \frac{E}{L_{02}} \bar{e}_2 \right) M_2 + \frac{E}{L_{01}} M_3 + \frac{E}{L_{02}} M_4 \right\} \dots \dots \dots (27)$$

ここに、 $M_1 \sim M_4$ は次に示す 9×9 の行列である。

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \nu_{11}}{\partial u_{11}} & \frac{\partial \nu_{11}}{\partial u_{21}} & \frac{\partial \nu_{11}}{\partial u_{31}} & \dots & \frac{\partial \nu_{11}}{\partial u_{33}} \\ \frac{\partial \nu_{21}}{\partial u_{11}} & \frac{\partial \nu_{21}}{\partial u_{21}} & \frac{\partial \nu_{21}}{\partial u_{31}} & \dots & \frac{\partial \nu_{21}}{\partial u_{33}} \\ \frac{\partial \nu_{31}}{\partial u_{11}} & \frac{\partial \nu_{31}}{\partial u_{21}} & \frac{\partial \nu_{31}}{\partial u_{31}} & \dots & \frac{\partial \nu_{31}}{\partial u_{33}} \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \nu_{31}}{\partial u_{11}} & \frac{\partial \nu_{31}}{\partial u_{21}} & \frac{\partial \nu_{31}}{\partial u_{31}} & \dots & \frac{\partial \nu_{31}}{\partial u_{33}} \\ \frac{\partial \nu_{12}}{\partial u_{11}} & \frac{\partial \nu_{12}}{\partial u_{21}} & \frac{\partial \nu_{12}}{\partial u_{31}} & \dots & \frac{\partial \nu_{12}}{\partial u_{33}} \\ \frac{\partial \nu_{22}}{\partial u_{11}} & \frac{\partial \nu_{22}}{\partial u_{21}} & \frac{\partial \nu_{22}}{\partial u_{31}} & \dots & \frac{\partial \nu_{22}}{\partial u_{33}} \\ \frac{\partial \nu_{32}}{\partial u_{11}} & \frac{\partial \nu_{32}}{\partial u_{21}} & \frac{\partial \nu_{32}}{\partial u_{31}} & \dots & \frac{\partial \nu_{32}}{\partial u_{33}} \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} \nu_{11} & \nu_{11} \\ \nu_{21} & \nu_{21} \\ \nu_{31} & \nu_{31} \end{bmatrix}^T \quad M_4 = \begin{bmatrix} \nu_{12} & \nu_{12} \\ \nu_{22} & \nu_{22} \\ \nu_{32} & \nu_{32} \end{bmatrix}^T$$

また、 $\phi(x^{(i)})$ は第 i 回目の繰り返し段階でのつり合い力のベクトル ($f \times 1$) である。修正ベクトル $d\mathbf{x}^{(i)}$ は式 (25) よりただちに得られる。この手順を $\|\phi(x^{(i)})\|$ が許容値以下となるまで反復すればよい。

つり合い力のノルム $\|\phi(x^{(i)})\|$ は、上記の計算の反復とともに急減することが期待される。だがしかし、 $\|\phi(x^{(i+1)})\| \gg \|\phi(x^{(i)})\|$ となってつり合い力のノルムが発散するような場合には以下のようにして修正ベクトルを補正することを考える。すなわち、まず、

$$\frac{\|\phi(x^{(i+1)})\|^2}{\|\phi(x^{(i)})\|^2} > \alpha \quad (\alpha > 1) \dots \dots \dots (28)$$

のとき、その繰り返し段階での解の修正ベクトルとして、 $c d\mathbf{x}^{(i)}$ とする ($0 < c < 1$)。ここで、 c の値を 1/2, 1/4, 1/8, ... と順次小さくしていき、それに対応する $\|\phi(x^{(i+1)})\|^2 = \|\phi(x^{(i)} + c d\mathbf{x}^{(i)})\|^2$ を計算する。この値が c の値に応じて逐次降下していき、ある c の値に至って、逆に増加の傾向をみせたとする。このときの c の値とそれ以前の 2 個の c の値を用いて $\|\phi(x^{(i)} + c d\mathbf{x}^{(i)})\|^2$ を放物線で近似し、

$$\frac{d\|\phi(x^{(i)} + c d\mathbf{x}^{(i)})\|^2}{dc} = 0 \dots \dots \dots (29)$$

から c の最適な値を求める (文献 3) にはより一般的な方法が提案されている。この手順によって修正ベクトルが補正されて解の収束が早められる。

なお、Newton-Raphson 法における反復計算の収束条件として、

$$\|\phi(x^{(i)})\|^2 < \epsilon_c \dots \dots \dots (30)$$

を用いる。

また、応力、つり合い力、Jacobian matrix の計算において Gauss の数値積分法を用いる。その際、厳密な積分が実施できるだけの積分点数の数を必要とする。

以上の所論においては、一つの曲線要素を二つの領域に分け、それぞれの領域で一定な応力の場を与えて要素モデルの定式化を行ったが、これを一般化して N_e 個の一定応力場をもつ曲線要素モデルについて同様の定式化を行うことができる。付録 A にこれを述べる。また、付録 B に、このように一般化された要素モデルによる混合法の解と、次章で示す変位法の解との関連性について論

じている。

3. 変位法による解析

前章と同様に全荷重-全変位の定式化に基づいて全ポテンシャルエネルギー π を求めると、

$$\pi = \sum_m \left\{ A \int_{L_s} \left(\sigma_0 \epsilon + \frac{E}{2} \epsilon^2 \right) ds - \int_{L_s} w_i u_i ds \right\} - \mathbf{F}_D^T \mathbf{x} \dots \dots \dots (31)$$

が得られる。ここに、 \mathbf{F}_D は節点集中荷重の $f \times 1$ のベクトルであり、その他の記号は前章で用いたものと同じである。また前章と同様に 3 節点アイソパラメトリック要素を用い、要素の形状および変位を節点のそれぞれの値を用いて内挿する。さらに、要素内の初期応力の内挿関数を $\sigma_0(\xi)$ と表わし、 $\sigma_0(\xi)$ を数値積分の際の積分点での σ_0 の値を用いて補間する ($\sigma_0(\xi)$ の内挿関数形は陽には必要とされない)。また、式 (2) より、

$$\epsilon = \left(\frac{ds^*}{ds} - 1 \right) \frac{ds_a}{ds} \dots \dots \dots (32)$$

である。これらより、式 (19) に対応して、

$$\pi = \sum_m A \int_{-1}^1 \left\{ \sigma_0(\xi) \epsilon(\xi) + \frac{E}{2} [1 + \epsilon_a(\xi)] \epsilon(\xi)^2 \right\} J d\xi - \mathbf{F}^T \mathbf{x} \dots \dots (33)$$

を得る。ここに、 $\epsilon(\xi) = J^*/J - 1$ 、 $\epsilon_a(\xi) = \sigma_0(\xi)/E$ である。

式 (33) の π を節点変位で微分して式 (20) に対応するつり合い式

$$\sum_m A \int_{-1}^1 \left\{ \sigma_0(\xi) + E[1 + \epsilon_a(\xi)] \epsilon(\xi) \right\} \cdot \frac{\partial \epsilon(\xi)}{\partial \mathbf{x}} J d\xi - \mathbf{F} = \mathbf{0} \dots \dots \dots (34)$$

を得る。いま、式 (24) と同様に 1 要素について内力の節点力ベクトル \mathbf{g} (9 成分) を示すと、

$$g_{ij} = A \int_{-1}^1 \left\{ \sigma_0(\xi) + E[1 + \epsilon_a(\xi)] \epsilon(\xi) \right\} \cdot \frac{N_j' N_i' X_i^*}{J^*} d\xi \quad (i, j = 1, 2, 3) \dots \dots (35)$$

となる。ここに、 g_{ij} の第 1 添字は方向を、第 2 添字は節点を表わす。

本文では、式 (34) を前章と同様に Newton-Raphson 法により解く。

4. 数値計算例

若干の数値計算例をあげて、本文の混合法および変位法による解析の特徴を示す。

以下の数値計算においては式 (28) の α および式 (30) の ϵ_c をそれぞれ 10^8 および $0.1 t^2$ ($9.604 \times 10^8 N^2$) と

する。

(1) 要素分割と解の収束

図-3 に示す構造について混合法および変位法による解の精度と収束性を検討する。このモデルは、その全長にわたり X_2 方向の分布荷重 0.592 t/m (5801.6 N/m) が作用しているカテナリー部材で、その支間中央にさらに 100 t ($9.8 \times 10^5 \text{ N}$) の集中荷重 (X_2 方向) が作用するものとする。なお、解の初期値はすべて 0 とした。

この計算例では以下の 5 種類の計算を行いその結果を比較する。

① 混合法に基づく 2 応力場モデルを用いる。

② 混合法に基づく多応力場モデルを用いる (付録 A の所論に従い、1 要素内の応力場の数 N_e を 20 とする)。

③ 変位法を用い、reduced integration の手法を採用する (Gauss の数値積分法において積分点の数を 2 とする)。

④ 変位法を用い、数値積分における積分点の数を 3 とする。

⑤ 直線要素を用いる。

図-4 に、これらの 5 種類の計算から得られた集中荷重作用点の X_2 軸正方向の変位 δ_c を示す。図の横軸には構造の自由度をとり、その下段に曲線要素を用いたときの要素数を () を付して示す。直線要素の数は ()

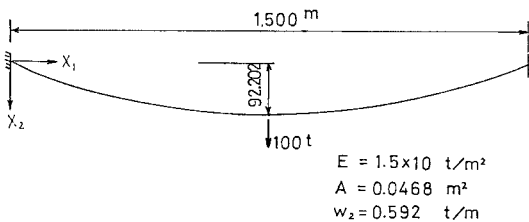


図-3 計算例 1: モデル

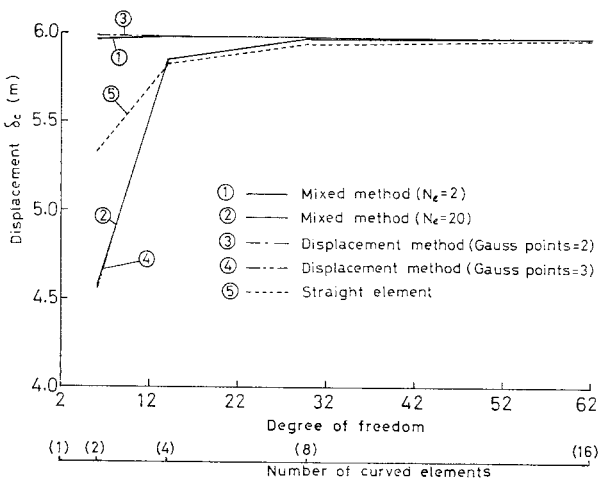


図-4 載荷点の変位

の中の数値の 2 倍である。

図より、2. に述べた混合法に基づく 2 応力場モデルによる解析 (①) と reduced integration を用いた変位法による解析 (③) とが精度の高い解をもたらし、ともに 2 要素 6 自由度の要素分割で解の収束をみていることがわかる。また、混合法に基づく多応力場モデルによる解 (②) と reduced integration によらない変位法による解 (④) とはほぼ同じ傾向を示し、これらの解は要素分割数が大となるに従って一定値に収束するものの、① および ③ の方法に比べて収束性はかなり低い。これは、変位法においては要素の湾曲度が大となるに従って、近似した変位関数 (正規化座標 ξ の 2 次式) によって計算される要素内の各点の応力値が不適当な分布となることによる。また、付録 B に示すように、混合法において一定応力場の数を増すにつれて、その解は変位法による解に近づいてくる。上記の傾向はその一つの例証と考えられる。

また、直線要素による計算結果では、8 要素 14 自由度の場合で 2.6% の誤差が認められ、16 要素 30 自由度で誤差は 0.7% である。解の精度と収束性は上記の ① および ③ の曲線要素を用いた解析に比べてかなり低い。なお、参考のため計算に要した時間を比較すると以下のようなのである。

30 自由度の場合について曲線要素 ① と直線要素 ⑤ を比較すると、CPU 占有時間で前者は 0.60 秒、後者は 0.37 秒 (IBM System 168) である。この場合、⑤ は ① より若干精度は低いものの、計算時間の点では優位に立つ。しかし、曲線要素 ① の場合は、2 要素 6 自由度ですでに十分の精度の解を与えており、この場合の計算時間は 0.26 秒である (なお、曲線要素 ③ についてもほぼ同様である)。

このように曲線要素 ① または ③ を用いれば、要素剛性の計算は複雑になるが、解の精度が高いため、直線要素よりはるかに少ない自由度数で、経済的に計算を実行することができる。

なお、いずれの計算においても、Newton-Raphson 法の反復回数は 2 または 3 回であった。

(2) 大きく湾曲したケーブル

文献 5) には、ケーブルに自重のみが作用する場合について両端変位に関する接線剛性が与えられ、サグが著しく大きい懸垂線についての二つの数値計算例が示されている。ここでは同じ計算例を取り上げ、文献 5) の計算結果と比較する。

その一つは、スパン 80 m、サグ比 0.2109、伸び剛性 $2.55 \times 10^6 \text{ t}$ ($2.499 \times 10^{10} \text{ N}$)、分布荷重 1 t/m (9.8 kN/m) の懸垂線状ケーブルの中点

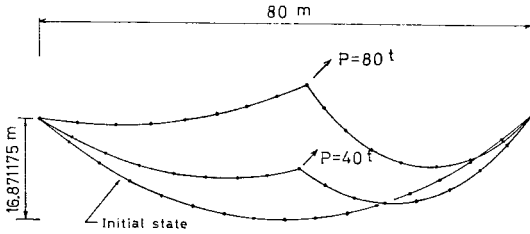


図-5 初期形状および変形状態

に斜め上方の集中荷重が作用する場合(図-5)である。いま一つは、スパン 20 m、サグ比 1.955 の同様のケーブルの中心に水平集中荷重が作用する場合(図-7)である。

ここでは荷重を逐次増加して荷重-変形曲線を求める。その際、解の初期値として荷重の第 1 ステップで 0 を、以後の荷重ステップでは、前ステップで得られている解を用いる。ただし、後者の計算例における $P=20, 40, 60, 80 \text{ t}$ (196, 392, 588, 784 kN) の場合には、載荷点で 2 分割されたそれぞれのケーブルが互いに交差するような大きい変形が生じるから、初期値の仮定が適当でないとい解の収束が困難となることもある。本文では $P=20 \text{ t}$ (196 kN) の場合、載荷点の変位を若干の試算によって与え、載荷点で 2 分割されたそれぞれのケーブルの形状を放物線近似して解の初期値としている。 $P=40 \text{ t}$ (392 kN) 以後の計算では、それぞれ前段階のステップで得られた解を初期値としている。

図-5 および 7 にそれぞれのモデルの初期形状および変形状態を示す。ただし、これらの変形状態は混合法に基づく 2 応力場モデルによる計算結果を示している。また、図中●印は節点を表わす。図-6 および 8 に、それぞれの計算例について本文で述べた混合法および変位法による計算結果と文献 5) の計算結果を示す。ただし、

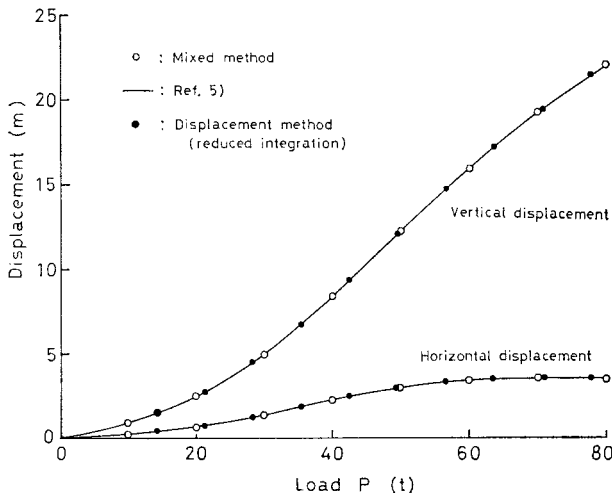


図-6 載荷点の変位置

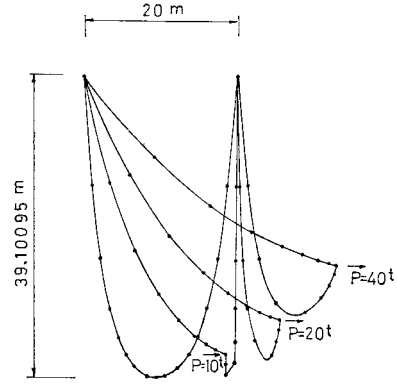


図-7 初期形状と変形状態

変位法による計算にはいずれも reduced integration を用いている。また、ここでは、曲線ケーブル要素の応力が局所的に負になれば、その領域の要素の剛性を 0 としている。図において実線は集中荷重作用点の変位に関する文献 5) の計算結果であり、○印は混合法、●印は変位法による解である。3 者はよく一致している。文献 5) の方法では、ケーブルの湾曲の程度は解の精度に直接の影響を及ぼさないで、その解(図の実線)は厳密解とみられる。上記の比較により本文の二つの解析法も、要素の湾曲が著しく大きい場合でも高い精度の解を与えているといえる。

なお、図-7 の計算例において、変位法による解析では、支間中央の水平荷重が 10 t (98 kN) を越えると、適切な解の初期値を与えても収束性は非常に悪く、200 回の反復計算を行ったが釣り合い状態は得られなくなった。混合法モデルによる場合にはこのような問題は起こらなかった。

(3) 海洋構造物の支索

図-9 は海洋資源開発などの目的で建設される一つの構造物をモデル化したものである。海中に直立する塔がその周囲に張り巡らされた索鎖(ケーブルおよびチェーン)によって支持されている。ケーブルの下端は、多数の鋼塊を一行にピン結合して作った重錘に接続されている。さらにこの重錘はチェーンによって海底につながれている。したがって波浪により塔頂が大きく変位し、ケーブルの張力が大きくなると、重錘が水中に浮上してケーブルの張力を緩和するようになっている。したがって解析上、境界条件が変位とともに変わることになる。図-9 に示すように X_1, X_2 座標をとってこの境界条件を式で表わせば、

$$X_2^* \geq 0, R_2 \geq 0$$

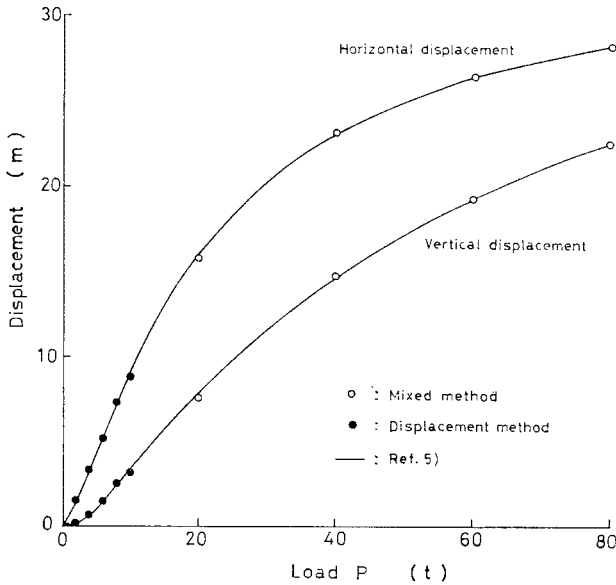


図-8 載荷点の変位量

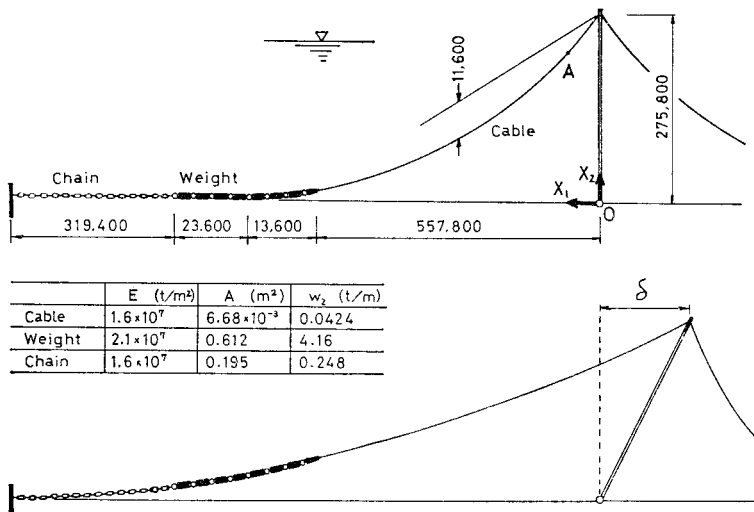


図-9 水中ガイドタワーモデル

となる。ここに、 X_2^* および R_2 はそれぞれ変形後の支持索鎖の鉛直方向の座標および反力である。この計算例では、各繰り返し段階において節点座標の近似解が上記第 1 式の領域をはみ出せば、その近似解に補正を加えて、その節点を境界上に戻すとともに、以後の計算ではこの節点が固定されているものとみなす。一方、境界上の節点において反力が上記第 2 式の領域をはみ出せば、その節点を自由節点として扱い、不つり合い力を計算し直す。このような操作を行って、上記の 2 条件とつり合い条件を同時に満たす変形状態を決定する。

以下の計算例では 1 本の支持索鎖を取り上げ、ケーブルを 2 個の曲線要素、重錘を 12 個の十分剛な直線要素、

チェーンを 2 個の直線要素に分割し、塔頂側のケーブル端に水平方向の強制変位を与えて 2 次元の大変形解析を行う。なお、チェーンを直線要素に置換するに際しては、チェーンを形成する個々のリンクの変形（曲げおよび伸び）からチェーンの伸びを知り、それと等価な変形をする直線要素を設定した。図-9 にケーブル、重錘およびチェーンの断面諸元および水中での分布荷重を示す。なお、塔側のケーブル端には 0.61 m 刻みで 21 ステップの強制変位を与える。第 1 ステップでは解の初期値を 0、以後のステップでは前回のステップで得られている解を初期値とする。図-10 に、混合法による 2 応力場モデルを用いた場合のケーブル張力（図-9 点 A における値）を示す。同様の計算を変位法（reduced integration を併用）によって行ったが、両者の計算結果にほとんど差は認められなかった。図-10 より、重錘の浮上に伴い、ケーブル張力の増加が緩和されている状態がわかる。

なお、初期つり合い状態に対し、強制変位 $\delta = 0.6096$ m を与えたときの数値計算の反復数は混合法による解析で 8 回、変位法による解析では 10 回であった。

5. 結 言

本文では、任意の分布荷重を受けるケーブル構造の大変形問題について、3 節点アイソパラメトリック要素を用いて混合法および変位法による有限要素解析法を示した。これらの解析法の特徴は以下のとおりである。

- (1) 一つの要素を二つの小領域に分け、それぞれの小領域で応力を一定とする要素モデルを用い、混合法に基づいて定式化することによって高い精度の解が得られる。また、その収束性も高い。
- (2) 変位法によって解析を行う場合には reduced integration の手法を併用すれば同様に高い精度の解が得られる。ただし、一部の計算例において収束性の低い場合がみられる。
- (3) 混合法による解析において要素内の応力一定の小領域の数を増してゆくと、その解は reduced integration を併用しないオリジナルな変位法の解に近いものとなる。このことは、一要素内で応力場の小領域の数を増すことが必ずしも解の精度の改善につながらないことを

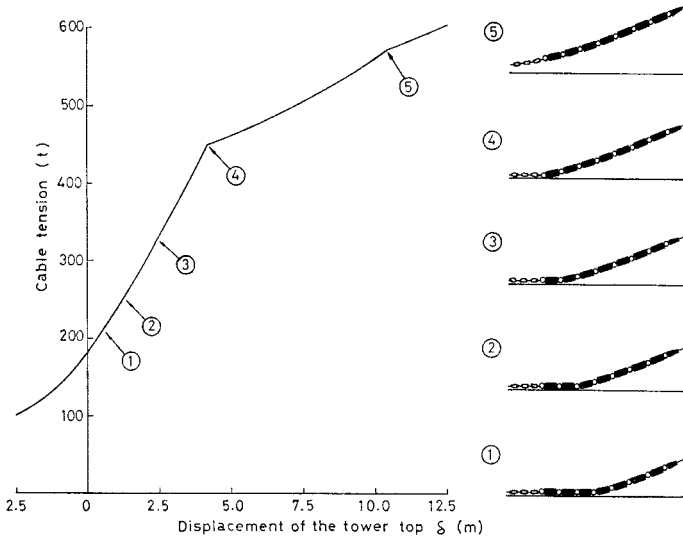


図-10 塔頂変位によるケーブル(A点)の張力

示している。

(4) 逆にいえば、混合法において応力場の小領域の数を最小限(2個)にすることが、変位法において reduced integration により積分点の数を減らすことと同じ効果をもたらすものと推論される。

(5) 本文の曲線要素を用いる場合には、直線要素を用いる場合に比べてかなり少ない要素分割で所要の解が得られる。

6. おわりに

一般にケーブル構造の静的解析を論ずる場合、形状決定問題に触れないわけにはいかない。直線要素を用いた形状決定問題は文献 1)~3)などに詳しいが、曲線要素によるものはまだ見当たらないようである。本文では紙面の都合でこの問題を取り上げることはできなかったが、ここで提案した要素モデルによって文献 3)と同様な形状決定理論を展開することが可能であり、これについては機会を改めて報告する予定である。

付録A 混合法に基づく要素モデルの一般化

本文 2. では、一つの要素内で応力場に関する二つの小領域を設け、それぞれの小領域では応力が一定であるとして有限要素モデルの定式化を行っている。この所論を一般化して N_e 個の小領域を設け、それぞれの内部で応力を一定として同様の解析を行うことができる。この場合の理論の展開は小領域の数を2から N_e にするだけで本文 2. に述べた一連の式をそのまま拡張使用すればよい。その結果、本文中に示した各種の式は以下のよう

に書き改められる。

・式(12)→

$$\pi_{RC} = \sum_n A \left\{ (\bar{\sigma}_{0n} + \bar{\sigma}_n) \cdot \int_{L_{0n}} \epsilon ds - \frac{L_{0n}}{2E} \bar{\sigma}_n^2 \right\} - (\mathbf{F}_w + \mathbf{F}_c)^T \mathbf{q}$$

ここに、 \sum_n は N_e 個の小領域についての総和を、 L_{0n} は第 n 小領域内の要素の無応力長を、 $\bar{\sigma}_{0n}$ および $\bar{\sigma}_n$ はそれぞれ第 n 小領域における初期応力および応力増分である。

・式(16)~(18)→

$$\bar{\sigma}_n = \frac{E}{L_{0n}} \bar{e}_n, \quad \bar{e}_n = \int_{L_{0n}} \epsilon ds$$

・式(19)→

$$\pi_R = \sum_m \pi_{Rm}$$

$$= \sum_m \sum_n A \left(\bar{\sigma}_{0n} \bar{e}_n + \frac{E}{2L_{0n}} \bar{e}_n^2 \right) - \mathbf{F}^T \mathbf{x}$$

・式(20)→

$$\frac{\partial \pi_R}{\partial \mathbf{x}} = \sum_m \sum_n A \left(\bar{\sigma}_{0n} + \frac{E}{L_{0n}} \bar{e}_n \right) \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

・式(21),(22)→

$$\frac{\partial \bar{e}_n}{\partial u_{11}} = \int_{c_n} N_1' N' X_1^* (J^*)^{-1} d\xi$$

$$\frac{\partial \bar{e}_n}{\partial u_{21}} = \int_{c_n} N_1' N' X_2^* (J^*)^{-1} d\xi$$

$$\frac{\partial \bar{e}_n}{\partial u_{31}} = \int_{c_n} N_1' N' X_3^* (J^*)^{-1} d\xi$$

ここに、 $\int_{c_n} d\xi$ は第 n 小領域に対応する ξ に関する積分を表わす。

・式(23)→

$$\mathbf{v}_{1n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial u_{11}} & \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial u_{21}} & \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial u_{31}} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{v}_{2n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial u_{12}} & \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial u_{22}} & \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial u_{32}} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{v}_{3n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial u_{13}} & \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial u_{23}} & \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial u_{33}} \end{bmatrix}^T$$

・式(24)'→

$$\mathbf{g}_m = \sum_n A \left(\bar{\sigma}_{0n} + \frac{E}{L_{0n}} \bar{e}_n \right) \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1n} \\ \mathbf{v}_{2n} \\ \mathbf{v}_{3n} \end{bmatrix}$$

数値解析では、本文 2. と同様に Newton-Raphson 法を用いる。その際に必要な Jacobian matrix 等の詳細については省略するが、式の展開等は本文 2. とほとんど同様である。

付録B 混合法および変位法による解の比較

2. に述べた混合法による解析では、応力を消去して、

式(19)に示すような、ひずみエネルギーを含む形の汎関数を導いている。ここでは付録Aに述べた一般化した要素モデルを用い、そのひずみエネルギーと変位法におけるひずみエネルギー(式(31))とを解析的に比較し、上記の二つの解析法から得られる解の相違点について考察する。

付録Aに述べた一般化した要素モデルの小領域 L_{0n} におけるひずみエネルギーを U_C 、変位法における同一の小領域 L_{0n} のひずみエネルギーを U_D と表わす。小領域 L_{0n} を等間隔 Δs の微小な変域に分け、それぞれの小変域内の s の任意の値を s_v とすると、積分の定義から

$$\begin{aligned} U_C &= A \left\{ \bar{\sigma}_{0n} \int_{L_{0n}} \epsilon ds + \frac{E}{2L_{0n}} \left[\int_{L_{0n}} \epsilon ds \right]^2 \right\} \\ &= A \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\{ \bar{\sigma}_{0n} \sum_v \epsilon(s_v) \Delta s + \frac{E}{2L_{0n}} \left[\sum_v \epsilon(s_v) \Delta s \right]^2 \right\} \\ U_D &= A \left\{ \int_{L_{0n}} \left(\sigma_0 \epsilon + \frac{E}{2} \epsilon^2 \right) ds \right. \\ &= A \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\{ \sum_v \sigma_0(s_v) \epsilon(s_v) \Delta s + \sum_v \epsilon(s_v)^2 \Delta s \frac{E}{2} \right\} \end{aligned}$$

である。ここに、 \sum_v は小変域 Δs についての総和を、 $\sigma_0(s_v)$ および $\epsilon(s_v)$ はそれぞれ $s=s_v$ における σ_0 および ϵ の値を表わす。また、 $L_{0n} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_v \Delta s$ より、Cauchyの不等式

$$\begin{aligned} \frac{E}{2} \int_{L_{0n}} \epsilon^2 ds - \frac{E}{2L_{0n}} \left[\int_{L_{0n}} \epsilon ds \right]^2 \\ = \frac{E}{2L_{0n}} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\{ \left[\sum_v \epsilon(s_v)^2 \right] \left[\sum_v \Delta s^2 \right] \right. \\ \left. - \left[\sum_v \epsilon(s_v) \Delta s \right]^2 \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

が得られる。これより小変域 L_{0n} において初期応力 σ_0 が一定であれば、ひずみ ϵ を生じている小領域では、

$$U_D > U_C$$

が成り立つ。これは、混合法による解析では、変位法による解析に比べて変位の絶対値が大となることを表わす。

また等号が成立するのは、 $\epsilon(s_1) = \epsilon(s_2) = \dots$ すなわち小領域 L_{0n} においてひずみが一定のときである。たとえば応力一定の小領域の数 N_e を無限に大きくし、小領域

L_{0n} を無限に小さくして小領域 L_{0n} 内でのひずみ ϵ を一定に近づけた場合がそれである。

なお、変位法による解析では、reduced integrationによる数値積分を採用することが多いが、これによる解は上記の考察の対象外である。

参考文献

- 1) 波田凱夫・中西 宏：吊構造の形状決定計算に関する一考察，日本建築学会論文報告集，No. 212，pp. 37~45，1973.10.
- 2) 中西 宏・波田凱夫：吊構造の形状決定に関する一計算手法について，日本建築学会論文報告集，No. 224，pp. 31~39，1974.10.
- 3) 中西 宏・波田凱夫：最適値問題の手法による吊構造の形状決定解析，日本建築学会論文報告集，No. 238，pp. 13~23，1975.12.
- 4) Nakanishi, H. and Y. Namita: Shape determination analysis of cable structures by means of the methods for optimization problem, International Symposium on Wide-Span Surface Structures, SFB 64, Univ. Stuttgart, Apr., 1976.
- 5) 後藤茂夫：柔ケーブル材の接線剛性方程式について，土木学会論文報告集，No. 270，pp. 41~49，1978.2.
- 6) 前田幸雄・林 正・前田研一：サグを考慮したケーブル部材の計算式，土木学会論文報告集，No. 257，pp. 123~126，1977.1.
- 7) 阿井正博・西岡 隆・奥村敏憲：ケーブル構造に関する一理論解析，土木学会論文報告集，No. 260，pp. 17~32，1977.4.
- 8) Henghold, W.H. and J.J. Russell: Equilibrium and natural frequencies of cable structures (a nonlinear finite element approach), Computer & Structures, Vol. 6, pp. 267~271, 1976.
- 9) Gambhir, M.L. and B. Batchelor: A finite element for 3-D prestressed cablenets, Int. J. Num. Meth. in Engineering, Vol. 11, pp. 1699~1718, 1977.
- 10) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，コンピュータによる構造工学講座 II-3-A，日本鋼構造協会編，培風館，1972.2.
- 11) Y.C. ファン著（大橋義夫・村上澄男・神谷紀生共訳）：固体の力学/理論，培風館，1972.4.
- 12) Zienkiewicz, O.C., R.L. Taylor and J.M. Too: Reduced integration technique in general analysis of plates and shells, Int. J. for Num. Methods in Engineering, Vol. 3, pp. 275~290, 1971.
- 13) Fried, I.: Accuracy and condition of curved (isoparametric) finite elements, J. of Sound and Vibration, Vol. 31, No. 3, pp. 345~355, 1973.

(1980.11.12・受付)